Kleyers Encyklopädie.

Lehrbuch
DER
ebenen
Elementar-Geometrie

III. Teil

von

Prof. Dr. J. Sachs

Ma.
0.
150m
2

Kleyers

Encyklopädie

der gesamten

mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Abteilung:

Raumgrössenlehre I.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Lehrbuch

der

ebenen Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

Dritter Teil:

Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen.
Die einfachen Vielecke.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 737 Erklärungen und 343 in den Text gedruckten Figuren.

Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. J. Sachs.

Bremerhaven.
Verlag von L. v. Vangerow.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Vorwort zum dritten Teile.

Der vorliegende dritte Teil dieses Lehrbuches verfolgt in der Behandlungsweise des geometrischen Lehrstoffes den in neuerer Zeit allgemein gewordenen Weg der Entstehung geometrischer Gebilde durch Bewegung. Während die Euklidische Geometrie durch ihre Starrheit den Lernenden kalt lässt, erfreut ihn die Anschaulichkeit dieser neueren Methode durch ihre natürlichere Anlehnung an das Leben. Daher widmet dieser Teil zunächst einige Abschnitte dem Studium der Bewegungsarten der geometrischen Elemente. Besonders fruchtbar erweist sich dabei die Anlehnung an die Anschauungen der synthetischen Geometrie, nämlich die Aufnahme des Dualitätsprinzipes zwischen dem Punkte und der Geraden.

Das Selbststudium einer Wissenschaft wird kaum mit besserer Befriedigung erfolgen können, als nach einer Methode, welche aus den gewonnenen Ergebnissen stets alle Folgerungen zieht und so alle Zweifel an der Gesamtgültigkeit zerstreut. Daher werden bei den einzelnen Lehrsätzen und Aufgaben die Grenzfälle besonders sorgfältig durchgeführt, um durch die Betrachtung derselben den vollen Inhalt des Gefundenen seinem ganzen Umfange nach erkennen zu lehren. Ausserdem bietet sich dadurch Gelegenheit, für scheinbar entlegene Dinge die nahe Berührung ihrer Grenzen zu erkennen und so die Kenntnisse zu verknüpfen.

Da das ganze Werk einen Hauptwert auf Aufgaben legt, so war es fast selbstverständlich, die Kongruenzbegriffe auf die eindeutigen Konstruktionen zu stützen. Dadurch gewinnt die ganze Lehre von den kongruenten Figuren eine anschaulichere Grundlage, und auch für das Auffassungsvermögen des Anfängers eine tiefere Begründung ihrer Berechtigung.

In der Auswahl der Aufgaben musste eine gewisse Rücksichtnahme stattfinden auf die selbständigen Aufgabensammlungen dieser Encyklopädie. Es sind daher in diesem Teile besonders solche Aufgaben in grosser Zahl eingesetzt, welche zur unmittelbaren Einübung des Lernstoffes dienen; dagegen sind von den praktischen Konstruktionsaufgaben nur die wichtigsten aufgenommen, und an den Hauptvertretern der einzelnen Gruppen wird gezeigt, wie die übrigen Aufgaben von entsprechender Gestalt zu behandeln sind.

Dadurch, dass im ersten Teile schon die grundlegenden Begriffe der Kreislehre niedergelegt sind, konnte der naturgemässere Lehrgang eingehalten werden, die Dreiecke, Vierecke und Vielecke erst zu behandeln und die Kreislehre im Zuhammenhange dem vierten Teile vorzubehalten.

Im November 1890.

Dr. J. Sachs.

Vorwort zum dritten Teile.

[illegible]

Inhaltsverzeichnis.

Die ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Dritter Teil.

Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.

	Seite
A. Ueber die geometrischen Gebilde im allgemeinen	1
B. Ueber die Lagenveränderungen der geometrischen Gebilde	6
1) Ueber die Deckung kongruenter Figuren durch Lagenveränderungen	6
2) Ueber die Umwendung oder Umklappung um eine Linie. Achsige Symmetrie	12
3) Ueber die Umdrehung um einen Punkt. Zentrische Symmetrie	27
4) Ueber die Verschiebung oder die Parallelverschiebung	45
C. Ueber die einfachen Vielecke	50
1) Ueber das Dreieck	50
a) Ueber die Seiten und Winkel des allgemeinen Dreiecks	50
b) Ueber die drei Höhen des Dreiecks	61
c) Ueber die besonderen Dreiecke	68
α) Ueber das gleichschenklige Dreieck	68
β) Ueber das gleichseitige Dreieck	78
γ) Ueber das rechtwinklige Dreieck	82
δ) Ueber das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck	86
d) Ueber die Konstruktion der Dreiecke	87
e) Ueber die Kongruenz der Dreiecke	98
2) Ueber das Viereck	109
a) Ueber die Seiten und Winkel des allgemeinen Vierecks	109
b) Ueber die besonderen Vierecke	114
α) Ueber das Trapez und seine Anwendungen	114
β) Ueber die achsig-symmetrischen Vierecke	122
$β^1$) Ueber das Antiparallelogramm	122
$β^2$) Ueber das Deltoid	126
γ) Ueber das zentrisch-symmetrische Viereck oder das Parallelogramm	130
δ) Ueber die achsig und zentrisch-symmetrischen Vierecke	136
$δ^1$) Ueber das Rhombus	136
$δ^2$) Ueber das Rechteck	140
$δ^3$) Ueber das Quadrat und seine gemeinschaftlichen Beziehungen mit den übrigen Vierecken	144
ε) Ueber das Sehnenviereck, Tangentenviereck und Kreisviereck	153
c) Ueber die Konstruktion der Vierecke	155
d) Ueber die Kongruenz der Vierecke	160
3) Ueber die allgemeinen Vielecke, ihre Konstruktion, Kongruenz und Symmetrie	163

Aufgaben-Sammlung.

Seite

A. Aufgaben über die Ortsveränderungen der geometrischen Gebilde 175
1) Aufgaben über die geometrischen Gebilde und ihre Ortsveränderungen im allgemeinen . 175
a) Gelöste Aufgaben . 175
b) Ungelöste Aufgaben . 176
2) Aufgaben über die Umwendung oder achsige Symmetrie 177
a) Gelöste Aufgaben . 177
b) Ungelöste Aufgaben . 190
3) Aufgaben über die Umdrehung oder zentrische Symmetrie 193
a) Gelöste Aufgaben . 193
b) Ungelöste Aufgaben . 205
4) Aufgaben über die Verschiebung 208
a) Gelöste Aufgaben . 208
b) Ungelöste Aufgaben . 211

B. Aufgaben über das Dreieck 213
1) Aufgaben über die Seiten, Winkel und Höhen des allgemeinen Dreiecks 213
a) Gelöste Aufgaben . 213
b) Ungelöste Aufgaben . 220
2) Aufgaben über das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck . . 221
a) Gelöste Aufgaben . 221
b) Ungelöste Aufgaben . 232
3) Aufgaben über die Konstruktion von Dreiecken 235
a) Ueber die Konstruktionsaufgaben im allgemeinen 235
b) Gelöste Aufgaben . 236
b) Ungelöste Aufgaben . 253
4) Aufgaben über die Kongruenz der Dreiecke 255
a) Gelöste Aufgaben . 255
b) Ungelöste Aufgaben . 260

C. Aufgaben über das Viereck 261
1) Aufgaben über das allgemeine Trapezoid und Trapez 261
a) Gelöste Aufgaben . 261
b) Ungelöste Aufgaben . 268
2) Aufgaben über das achsig-symmetrische und das zentrisch-symmetrische Viereck: Antiparallelogramm, Deltoid, Parallelogramm . . 270
a) Gelöste Aufgaben . 270
b) Ungelöste Aufgaben . 286
3) Aufgaben über die achsig- und zentrisch-symmetrischen Vierecke: Rhombus, Rechteck, Quadrat 289
a) Gelöste Aufgaben . 289
b) Ungelöste Aufgaben . 302
4) Aufgaben über die Konstruktion und Kongruenz der Vierecke . . 304
a) Gelöste Aufgaben . 304
b) Ungelöste Aufgaben . 319

D. Aufgaben über die Konstruktion, Kongruenz und Symmetrie der Vielecke . . . 324
a) Gelöste Aufgaben . 324
b) Ungelöste Aufgaben . 328

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben 330

Berichtigungen . 336

Ebene Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

3. Teil.

Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.

A. Ueber die geometrischen Gebilde im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter einem geometrischen Gebilde?

Erkl. 1. Für diejenigen Zweige der Geometrie, welche sich nicht — wie die Planimetrie — auf ebene Figuren beschränken, tritt als weiteres Raumelement hinzu die Ebene. (Siehe Seipp, Lehrbuch der Stereometrie.)

Antwort. Unter einem geometrischen Gebilde, oder einem Raumgebilde, oder einer Raumgrösse versteht man jegliche durch Punkte und gerade Linien erzeugte Figur.

Der Punkt und die gerade Linie heissen daher auch die Grundgebilde oder die Raumelemente der Planimetrie.

Frage 2. Auf welche Weise können Punkt und Gerade ein Raumgebilde erzeugen?

Erkl. 2. Im ersten Teile dieses Lehrbuches ist gezeigt worden, wie durch Bewegung eines Punktes erzeugt werden: eine Strecke, eine gerade oder krumme Linie, ein Kreis u. s. w. Im zweiten Teile ist gezeigt worden, wie durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden: ein Winkel, ein Vieleck u. s. w. Aber auch ein Kreis oder eine krumme Linie kann durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden. Siehe den Abschnitt über den Kreis im nächsten Teile dieses Lehrbuches.

Erkl. 3. Die Drehung eines einzelnen Punktes um sich selbst erzeugt keine neue

Antwort. Punkt und Gerade erzeugen ein geometrisches Gebilde durch Bewegung, d. h. indem sie ihre Lage verändern, oder indem sie ihren Ort wechseln, oder indem sie eine andere Stelle einnehmen.

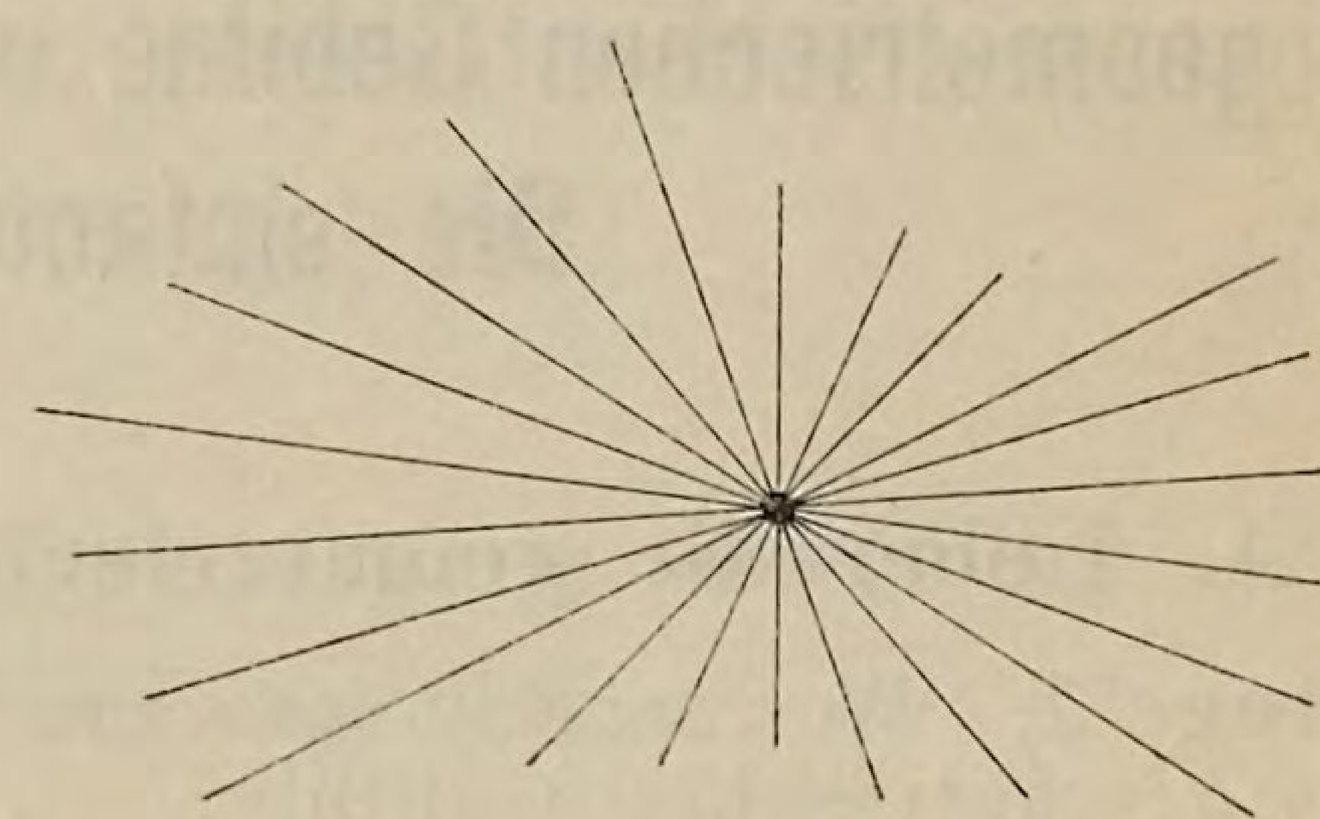
Die Ortsveränderung eines Punktes ist die Verschiebung.

Die Lageveränderung einer Geraden ist die Drehung.

Figur, da der Punkt dabei stets dieselbe Lage beibehält. Die Verschiebung einer einzelnen geraden Linie in sich selbst erzeugt ebenfalls keine neue Figur, da die Linie als ganze dabei sich ebenfalls stets gleich bleibt.

Erkl. 4. Diejenige seitliche Verschiebung einer geraden Linie, durch welche nach Antwort auf Frage 41 und 42 des ersten Teiles eine ebene Fläche erzeugt wird, bildet keine Ausnahme von der nebenstehenden Behauptung, sondern steht nach Erkl. 110 des zweiten Teiles über den gemeinsammen unendlich fernen Punkt aller parallelen Geraden auf gleicher Stufe mit der Erzeugung eines Winkels durch Drehung eines Strahles um seinen Scheitel. Die sämtlichen „Erzeugenden“ der Ebene behalten nämlich bei der Erzeugung der Ebene denselben unendlich fernen Punkt gemeinsam, und die Ebene wird erzeugt durch Drehung einer Geraden um ihren unendlich fernen Punkt, gerade wie ein Winkel erzeugt wird durch Drehung seiner Schenkel um den im Endlichen gelegenen Scheitel.

Figur 1.



Erkl. 5. Die Grundgebilde Punkt und Gerade können einander auch gegenseitig erzeugen. So wird eine Gerade beschrieben von dem sie durchlaufenden Punkt; ein Punkt wird bestimmt durch die um ihn sich drehende Gerade (siehe Figur 1).

Frage 3. Wie nennt man die in der vorigen Antwort angedeutete Gegenüberstellung der Erzeugungsweise eines geometrischen Gebildes durch die beiden Raumelemente Punkt und Gerade?

Antwort. Die Gegenüberstellung der Erzeugungsweise eines geometrischen Gebildes durch die beiden Raumelemente Punkt oder gerade Linie nennt man den Grundsatz des gegenseitigen Entsprechens zwischen Punkt und Gerade, oder das Prinzip der Reciprocität, oder den Dualismus, oder die Dualität.

Erkl. 6. Das Wort Reciprocität kommt vom lateinischen reciprocus (re = zurück, capere fassen), welches soviel heisst als rückbezüglich, gegenseitig. Dualismus stammt von dem griechischen Wort δύαλος (von δύο = zwei): doppelt, zwiefach, zu zweien angeordnet.

Erkl. 7. Der Dualismus oder die Dualität ist die Anwendung der Reciprocitätsgesetze auf die ebene Geometrie. In der räumlichen Geometrie besteht eine erweiterte Reciprocität, bei welcher Punkt und Ebene einander gegenübergestellt werden, während die gerade Linie sich selbst entspricht (siehe Seipp, Lehrbuch der Stereometrie).

Frage 4. Welche allgemeinen Begriffe der seitherigen Entwicklungen in den beiden ersten Teilen dieses Lehrbuches stehen sich dualistisch gegenüber?

Antwort. Von den allgemeinen geometrischen Begriffen, welche den in den beiden vorigen Teilen enthaltenen Entwicklungen zu Grunde liegen, lassen sich die folgenden dualistisch gegenüberstellen:

1)	Ein Punkt.	Eine Gerade.
2)	Auf einer Geraden liegen unendlich viele Punkte.	Durch einen Punkt gehen unendlich viele Gerade.
3)	Zwei Punkte bestimmen eindeutig eine Verbindungslinie.	Je zwei Gerade bestimmen eindeutig einen Schnittpunkt.
4)	Zwei Punkte auf einer Geraden begrenzen zwischen sich eine Strecke auf ihrer Verbindungs-Geraden.	Zwei Gerade durch einen Punkt begrenzen zwischen sich einen Winkel an ihrem Schnittpunkt.
5)	Die eine Strecke begrenzenden Punkte heissen Anfangspunkt und Endpunkt der Strecke.	Die einen Winkel begrenzenden Linien heissen Anfangsschenkel und Endschenkel des Winkels.
6)	Aus der Lage des Anfangspunktes einer Strecke in die Lage des Endpunktes derselben kann ein Punkt verschoben werden, indem er entweder die Strecke selbst oder die Verlängerung der Strecke durchläuft.	Aus der Lage des Anfangsschenkels eines Winkels in die Lage des Endschenkels desselben kann eine Gerade gedreht werden, indem sie entweder den Innenraum des Winkels selbst oder den Nebenwinkelraum des Winkels überstreicht.
7)	Die beiden Richtungen der Verschiebung, in welcher sich dabei der bewegte Punkt auf der die Strecke enthaltenden Linie verschiebt, sind einander entgegengesetzt wie positive und negative Grössen.	Die beiden Richtungen der Drehung, in welcher sich dabei die bewegte Gerade um den Scheitel des Winkels dreht, sind einander entgegengesetzt wie positive und negative Grössen.

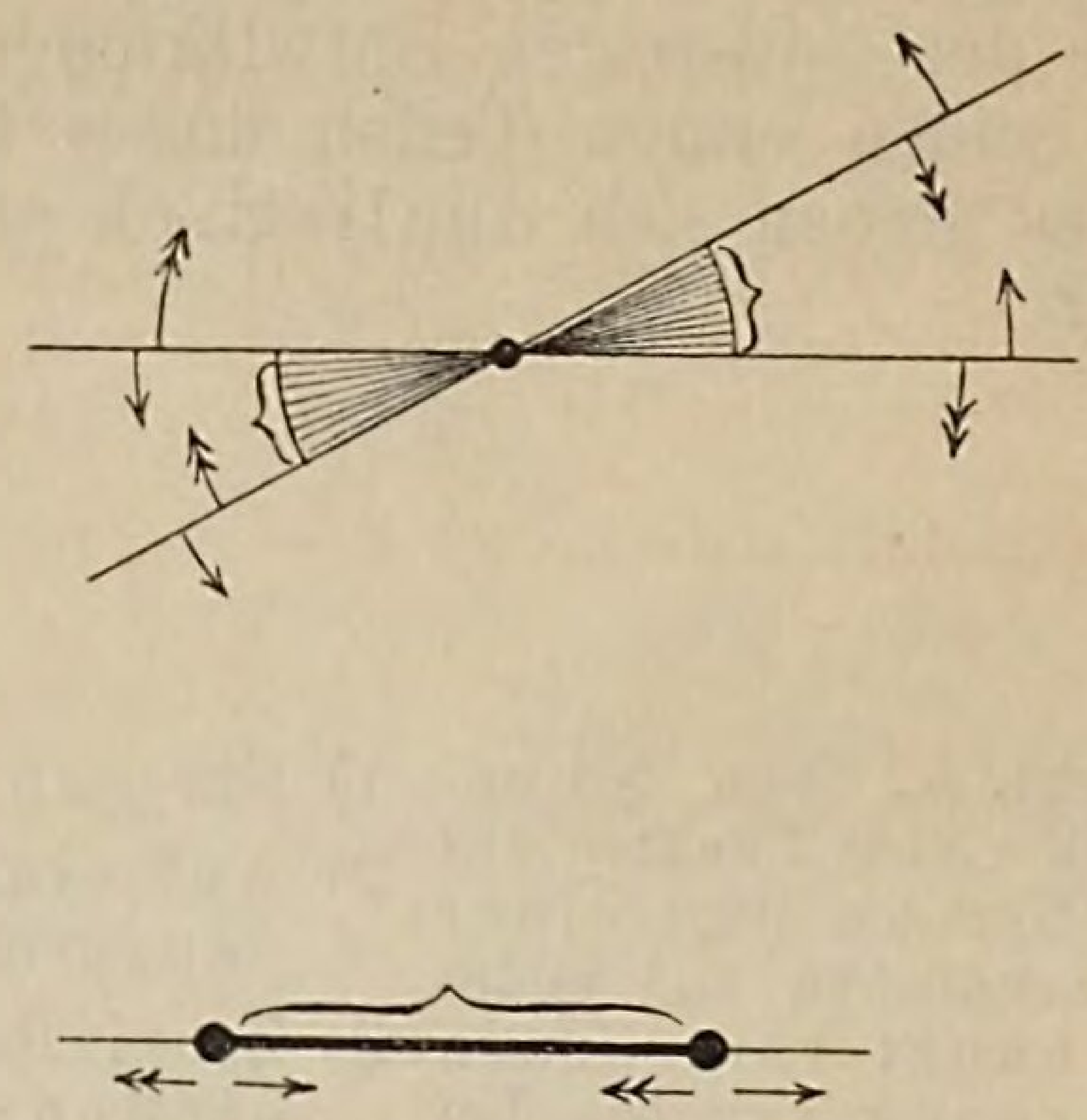
Erkl. 8. Von den unendlich vielen Punkten auf einer Geraden liegt einer im Unendlichen und bildet den ununterbrochenen Uebergang zwischen den beiden vom Anfangspunkt nach beiden Seiten ausgehenden Strahlen. Unter den unendlich vielen durch einen Punkt gehenden Geraden entspricht in manchen Beziehungen, wie sich später zeigen wird, die zur Anfangslage senkrechte Linie jenem im Unendlichen liegenden Punkte (vergl. Erkl. 11a).

Erkl. 9. Durch die zwei Endpunkte einer Strecke wird eine Linie nur in zwei getrennte Stücke zerlegt, nämlich den Innenraum der Strecke und die scheinbar auseinanderliegenden, bei dieser Betrachtungsweise aber im Unendlichen durch den unendlich fernen Punkt zusammenhängenden beiden Verlängerungen der Strecke. Ueber den unendlich fernen Punkt hinweg kann man daher vom Anfangspunkt der Strecke zum Endpunkt der Strecke gelangen, ohne ins Innere der Strecke einzudringen.

Erkl. 10. Durch die zwei einander schneidenden Geraden werden vier Winkelräume gebildet. Nach der vorliegenden Betrachtungsweise hängen aber davon je zwei Scheitelwinkelräume im Unendlichen zusammen, so dass man Winkel und Scheitelwinkel nicht als getrennte Winkelräume aufzufassen hat. Denn wenn der eine Strahl den einen Winkel bestreicht, so bestreicht gleichzeitig seine Verlängerung den Scheitelwinkelraum, also wird bei Drehung der geraden Linie der Winkelraum und der Scheitelwinkel-

raum gleichzeitig bestrichen. Da also bei dieser Betrachtungsweise die Unterscheidung der beiden entgegengesetzt gerichteten Strahlen wegfällt, so ist auch die Lage des Endschenkels (als ganze Linie) schon erreicht, wenn die bewegte Gerade den Nebenwinkel (und zwar wieder beide Nebenwinkelräume gleichzeitig) durchlaufen hat.

Figur 2.



Frage 5. Welche Massbegriffe von Strecke und Winkel lassen sich dualistisch gegenüberstellen?

Antwort. Von den Massbegriffen über Strecken und Winkel stehen sich die folgenden dualistisch gegenüber:

1) Alle Strecken sind ähnlich; gleiche Strecken sind kongruent und können so aufeinandergelegt werden, dass sie sich decken, dass nämlich Anfangspunkt und Endpunkt beider Strecken sich decken.	Alle Winkel sind ähnlich; gleiche Winkel sind kongruent und können so aufeinandergelegt werden, dass sie sich decken, dass nämlich Anfangsschenkel und Endschenkel beider Winkel sich decken.
2) Eine Strecke ist das Mass für den Abstand ihrer Grenzpunkte oder für die Verschiebungsgrösse, welche der eine Grenzpunkt durchlaufen muss, um mit dem andern zusammenzufallen.	Ein Winkel ist das Mass für den Richtungsunterschied seiner Schenkel oder für die Drehungsgrösse, welche der eine Schenkel durchlaufen muss, um mit dem andern zusammenzufallen.
3) Derjenige Punkt, welcher die Hälfte dieser Verschiebungsgrösse zurückgelegt hat, hat vom Anfangs- und Endpunkt der Strecke den gleichen Abstand und heisst Mittelpunkt der Strecke.	Diejenige Gerade, welche die Hälfte dieser Drehungsgrösse zurückgelegt hat, hat mit Anfangs- und Endschenkel des Winkels den gleichen Richtungsunterschied und heisst Halbierungslinie des Winkels.
4) Die Strecke ist als Gesamtheit ihrer Punkte eine eindimensionale Raumgrösse; ihre erzeugenden Bildungselemente sind die Punkte, welche auf der die Strecke enthaltenden Linie liegen.	Der Winkel ist als Gesamtheit seiner Strahlen eine eindimensionale Raumgrösse; ihre erzeugenden Bildungselemente sind die Geraden, welche durch den Scheitel des Winkels gehen.

Erkl. 11. Hierher gehört auch die ganze Reihe von dualistisch sich gegenüberstehenden Aufgaben, welche im ersten Teile dieses Lehrbuches als Aufgaben 45 bis 52 für die Strecke durchgeführt sind und im zweiten Teile als Aufgaben für den Winkel angegeben sind.

Erkl. 11a. Wird der eine Punkt zum andern geführt in positiver Richtung durch das Innere der Strecke, so hat er die Hälfte durchlaufen im sog. Mittelpunkt der Strecke; wird er in negativer Richtung durch das Aeussere der Strecke zum andern Punkt geführt, so hat er die Hälfte durchlaufen im unendlich fernen Punkt der Linie. Die gerade Linie hat die Hälfte durchlaufen bei positiver Richtung in der Lage der Winkelhalbierenden, bei negativer Richtung in der Lage der Halbierungslinie des Nebenwinkels (vergl. Erkl. 8).

Erkl. 12. Eine Grösse heisst eindimensional, wenn das Fortschreiten von einem ihrer Bildungs-

elemente zum andern nicht auf beliebig vielerlei Wegen möglich ist. So kann man nach dem letzten Abschnitt der vorigen Antwort innerhalb einer Strecke oder eines Winkels nur auf eine einzige Weise von einem ihrer erzeugenden Punkte oder Geraden zur andern gelangen.

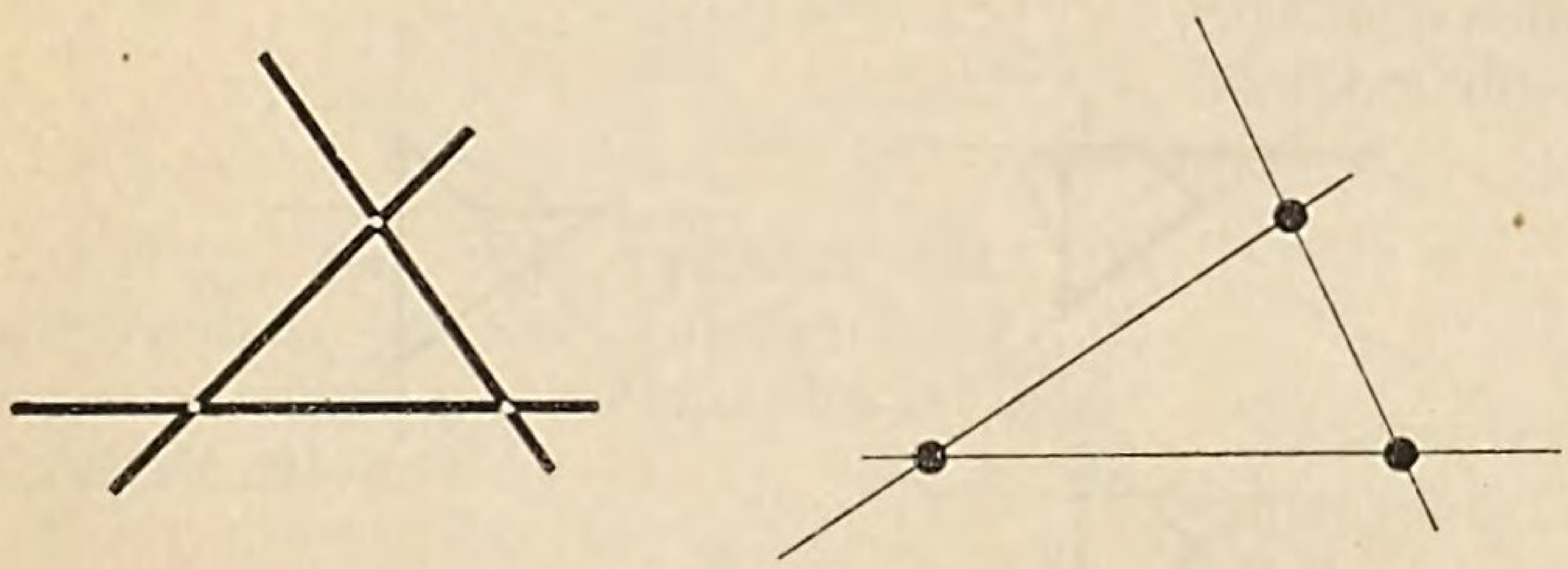
Erkl. 13. Dass in der Ebene doppelt unendlich viele Punkte und Geraden seien, kann man sich so erklären, dass es noch unendlichmal so viele seien, als Punkte auf einer Geraden liegen, oder als Gerade durch einen Punkt gehen.

5) In einer Ebene gibt es doppelt unendlich viele Punkte. | In einer Ebene gibt es doppelt unendlich viele Gerade.

Frage 6. Wie lassen sich die im vorigen Teile dieses Lehrbuches angestellten Betrachtungen über Vielecke dualistisch gegenüberstellen?

Antwort. Ueber die Vielecke kann man folgende dualistischen Ueberlegungen vornehmen:

Figur 3.



Erkl. 14. Ueber die Beschränkung, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen dürfen, und keine drei Gerade durch einen Punkt gehen dürfen, vergleiche man die Antworten auf Fragen 69 und 132.

Erkl. 15. Die Subtraktion $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n$ ergibt durch Gleichnamigmachen:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}$$

Erkl. 15a. Man vergleiche mit nebenstehenden

1) Drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, bilden mit ihren Verbindungslinien ein Dreieck (siehe Figur 3). | Drei gerade Linien, welche nicht durch einen Punkt gehen, bilden mit ihren Schnittpunkten ein Dreiseit (siehe Figur 3).

2) n Punkte, von welchen keine drei auf derselben Geraden liegen, bestimmen ein n-Eck mit n Seitenlinien und n Seitenstrecken. | n Gerade, von welchen keine drei durch denselben Punkt gehen, bestimmen ein n-Seit mit n Eckpunkten und n Winkeln.

3) Unter n Punkten gibt es im ganzen $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Verbindungslinien; also hat ein n-Eck ausser seinen n Seiten noch $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n$ oder $\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}$ Diagonalen. | Unter n Geraden gibt es im ganzen $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Schnittpunkte; also hat ein n-Seit ausser seinen n Ecken noch $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n$ oder $\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}$ weitere Schnittpunkte seiner Seitenlinien.

4) Aus n gegebenen Punkten und ihren Verbindungslinien lassen sich $(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 5 \cdot 4 \cdot 3$ verschiedene n-Ecke herstellen. | Aus n gegebenen Geraden und ihren Schnittpunkten lassen sich $(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 5 \cdot 4 \cdot 3$ verschiedene n-Seite herstellen.

Dualitäten die Ergebnisse der Aufgaben 46 und 47 des vorigen Teiles.

Erkl. 16. Die Anzahl von $3\cdot 4\cdot 5\cdots(n-1)$ verschiedenen n-Ecken oder n-Seiten aus gegebenen n Punkten oder n Geraden kann selbstverständlich nur erhalten werden durch Zurechnung „überschlagener“ und einspringender Figuren (vergleiche die Aufgaben 41 und 44 im zweiten Teile).

Erkl. 17. Zum vierten und fünften Teile der nebenstehenden Antwort vergleiche man die Aufgabe 1 der Aufgabensammlung am Ende dieses Teiles, wo für 5 Punkte bezw. für 5 Gerade die $4\cdot 3$ oder 12 verschiedenen 5-Ecke bezw. 5-Seite durchgeführt sind. In Figur 64 des zweiten Teiles ist dasselbe für vier Punkte geschehen, in nebenstehender Figur 4 für vier Gerade; es entstehen aus denselben vier Geraden dreierlei Vierecke, nämlich sechs solche, von denen je zwei sich nur durch die Umlaufsrichtung unterscheiden.

5) Unter den

$$(n-1)(n-2)\cdots 5\cdot 4\cdot 3$$

verschiedenen n-Ecken, welche sich aus n gegebenen Punkten und ihren Verbindungslinien herstellen lassen, ist nur ein einziges n-Eck, das in Ecken und Seiten mit einem von denjenigen

$$(n-1)(n-2)\cdots 5\cdot 4\cdot 3$$

n-Seiten zur Deckung gebracht werden kann, welche sich aus n beliebigen von den $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ Verbindungslinien der gegebenen n Punkte herstellen lassen.

Unter den

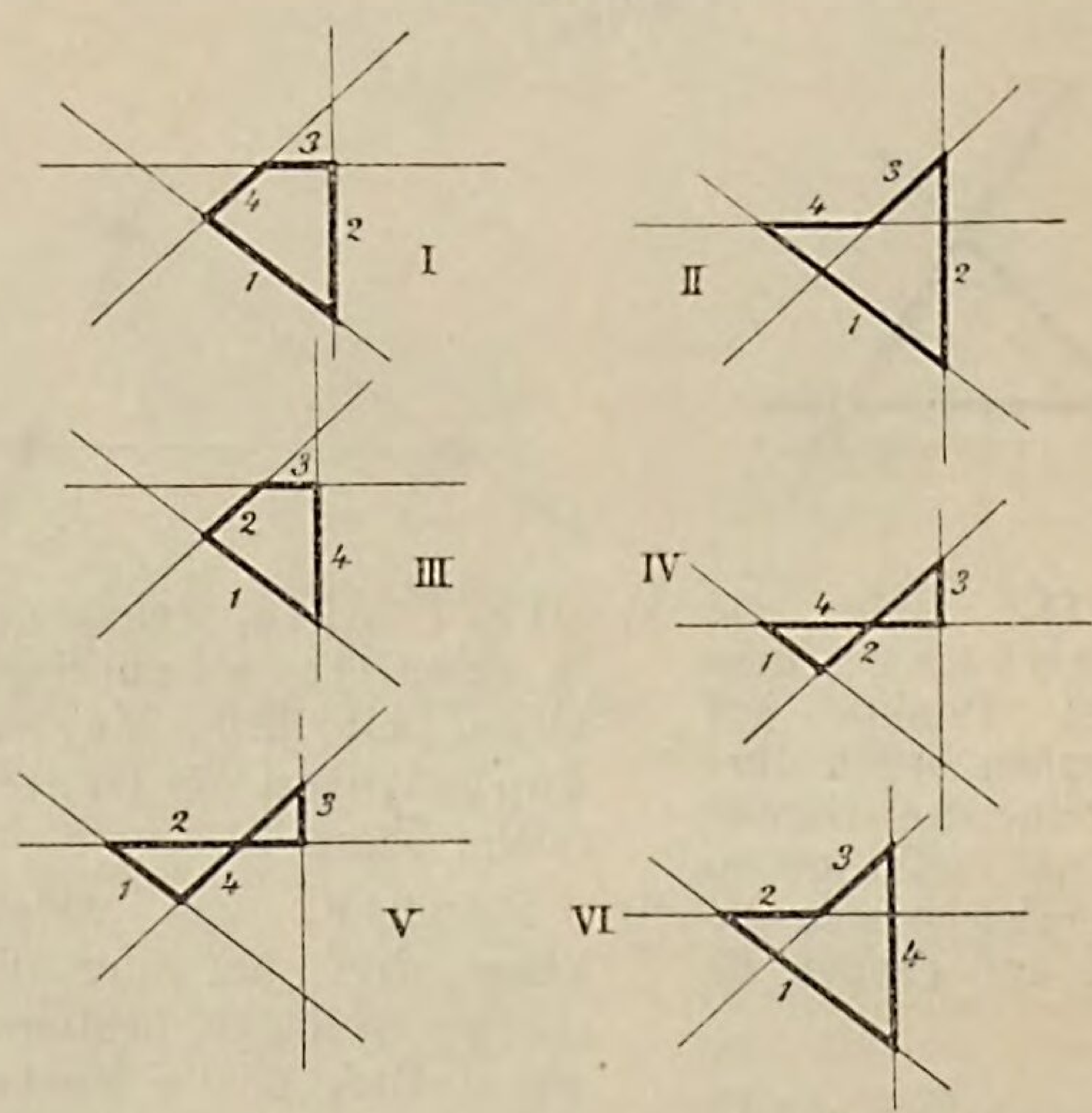
$$(n-1)(n-2)\cdots 5\cdot 4\cdot 3$$

verschiedenen n-Seiten, welche sich aus n gegebenen Geraden und ihren Schnittpunkten herstellen lassen, ist nur ein einziges n-Seit, das in Seiten und Ecken mit einem von denjenigen

$$(n-1)(n-2)\cdots 5\cdot 4\cdot 3$$

n-Ecken zur Deckung gebracht werden kann, welche sich aus n beliebigen von den $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ Schnittpunkten der gegebenen n Seiten herstellen lassen.

Figur 4.



B. Ueber die Lagenveränderungen der geometrischen Gebilde.

1) Ueber die Deckung kongruenter Figuren durch Lagenveränderungen.

Frage 7. Wie wurde verfahren bei der Untersuchung, ob zwei Strecken oder zwei Winkel gleich oder kongruent seien?

Erkl. 18. Auf die in nebenstehender Antwort angegebene Weise wurde z. B. verfahren im ersten Teile dieses Lehrbuches in der Ant-

Antwort. Um zu untersuchen, ob zwei Strecken oder zwei Winkel gleich oder kongruent seien, dachte man sich das eine Gebilde so neben, bezw. auf das andere gelegt, dass einer

wort auf Frage 28 bei Untersuchung der Kongruenz zweier Strecken, sowie im zweiten Teile in der Antwort der Frage 8 bei der Untersuchung der Kongruenz zweier Winkel. Was also an den angegebenen Orten mit Strecke und Winkel allein geschehen war, soll nunmehr auf allgemeine geometrische Gebilde übertragen werden.

der Endpunkte, oder der Schenkel des einen neben, bezw. auf einen der Endpunkte, oder der Schenkel des andern Gebildes zu liegen kam, und dass dasselbe auch zwischen den benachbarten Punkten, bezw. Strahlen der beiden Gebilde stattfand. Die beiden Strecken, oder Winkel sind gleich und damit kongruent, wenn sich ergibt, dass auch die beiden anderen Endpunkte oder Schenkel beider Gebilde in der gedachten Weise neben, bezw. aufeinander zu liegen kommen.

Je zwei solche Punkte, bezw. Strahlen dieser beiden Gebilde (also nicht nur die Endpunkte oder die Schenkel), welche bei dieser Deckung der Gebilde aufeinander zu liegen kommen, heissen entsprechende Punkte oder Strahlen, oder homologe Punkte bezw. Strahlen der kongruenten Gebilde.

Frage 8. Wie verfährt man im allgemeinen bei der Untersuchung, ob zwei beliebige geometrische Gebilde kongruent sind?

Erkl. 18a. Nach der nebenstehenden Antwort genügt es nicht zur Kongruenz zweier geometrischen Gebilde als Ganzer, wenn zu jeder einzelnen Strecke und zu jedem Winkel und zu jeder Kreislinie u. s. w. der einen Figur eine gleiche Strecke, Winkelgrösse oder Kreislinie in der andern Figur enthalten ist, sondern es müssen ausdrücklich die etwa an einer ersten gleichen Strecke beiderseits anliegenden Strecken, Winkel und Kreislinien u. s. w., auch gerade mit denjenigen Strecken, Winkeln und Kreislinien u. s. w. der andern Figur übereinstimmen, welche an jener ersten gleichgrossen Strecke an beiden Seiten anliegen; und ebenso auch die beiderseits darauffolgenden in beiden Figuren in der gleichen Reihenfolge (vergleiche hiezu die in Erkl. 250 für zwei Dreiecke gemachten Ausführungen).

Antwort. Um zu erfahren, ob zwei allgemeine geometrische Gebilde oder ob zwei Figuren kongruent sind, untersucht man diese Figuren in Beziehung der Mengen und Formen der sie bildenden geometrischen Grundgebilde und prüft, ob diese die Figur erzeugenden Grundgebilde sowohl einzeln als auch in den Arten und Weisen ihrer Nebeneinanderlagerung so übereinstimmen, dass die durch ihre Gesamtheit dargestellten Figuren vollständig zur Deckung gebracht werden können, d. h. dass gleichzeitig sämtliche Punkte und Geraden, Strecken und Winkel der einen Figur auf die ihnen einzeln gleichen Punkte und Geraden, Strecken und Winkel der andern Figur zu liegen kommen können.

Je zwei solche Punkte, Geraden, Strecken, Winkel oder Figurenteile der beiden Figuren, welche bei dieser Deckung der ganzen Figuren aufeinander zu liegen kommen, heissen entsprechende oder homologe Punkte, Geraden, Strecken, Winkel oder Figurenteile der beiden kongruenten Figuren.

Frage 9. Was kann man von zwei kongruenten Figuren rücksichtlich des in voriger Antwort definierten Kongruenzbegriffes aussagen?

Antwort. Von zwei kongruenten Figuren kann man die Aussage machen:

Satz 1. Wenn sämtliche Strecken und Winkel zweier Figuren in gleicher Reihenfolge einzeln kongruent sind, so sind die Figuren als Ganze kongruent.

Und umgekehrt:

Satz 1a. Wenn zwei Figuren als Ganze kongruent sind, so sind auch ihre sämtlichen entsprechenden Strecken und Winkel einzeln in gleicher Reihenfolge kongruent und gleich.

Erkl. 19. Die Richtigkeit der in nebenstehender Antwort aufgestellten Behauptungen kann man wie folgt, darthun:

Wenn die einzelnen Strecken und Winkel zweier Figuren der Reihe nach kongruent sind, so kann man dieselben so aufeinanderlegen, dass der Reihe nach jede Strecke und jeder Winkel der einen Figur auf eine Strecke oder einen Winkel der andern Figur zu liegen kommt. Ist dies aber geschehen, so deckt die eine Figur als Ganze die andere Figur, also sind beide kongruent. — Wenn umgekehrt zwei Figuren als Ganze kongruent sind, so kann man sie so aufeinanderlegen, dass sie sich vollständig decken, und dabei kommt je eine Strecke und je ein Winkel der einen Figur auf die homologe Strecke und den homologen Winkel der andern Figur zu liegen, also decken sich diese sämtlich einzeln, d. h. sie sind einzeln kongruent.

Frage 10. Worin besteht nach dem vorigen der Vorgang bei der Untersuchung, ob eine Figur mit einer andern kongruent sei?

Antwort. Der Vorgang der Untersuchung, ob eine Figur mit einer andern kongruent sei, besteht nach dem vorigen in folgendem:

Die zu untersuchende Figur wird von der durch sie eingenommenen Stelle weggenommen, sie wird aus ihrer ursprünglichen Lage fortbewegt, um sie auf die in Frage stehende zweite Figur aufzulegen. Kann durch diese Fortbewegung die erste Figur in eine solche Lage gebracht werden, dass sie sich mit der zweiten vollständig deckt, so sind die beiden Figuren kongruent.

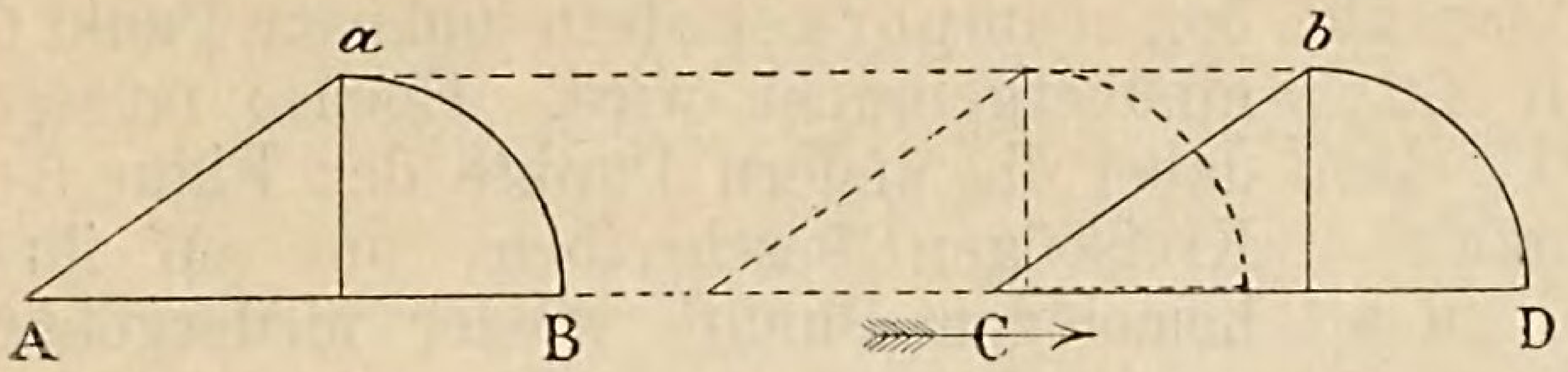
Erkl. 19a. Ein äusserst einfaches und praktisches Mittel, um kongruente Figuren zu erzeugen, ist das sogenannte „Durchpausen“ einer Zeichnung, oder das „Durchstechen“ einer solchen, wobei zwei Blätter aufeinandergelegt werden und eine solche Figur erzeugt wird, deren einzelne Punkte und Linien sich aufs genaueste decken mit den Punkten und Linien der darunter oder darauf liegenden Zeichnung.

Eine zweite Art zur Erzeugung kongruenter Figuren ist die, dass mit einer Schere aus einem in mehrfache Schichten aufeinandergelegten oder zusammengefalteten Papier mit gleichzeitigem Schnitt durch sämtliche Einzelblätter hindurch beliebige Figuren ausgeschnitten werden.

Frage 11. Aus welchen einfachsten Arten der Bewegungen kann diejenige Lageveränderung einer Figur bestehen, durch welche sie mit einer in der gleichen Ebene liegenden kongruenten Figur zur Deckung gebracht werden kann?

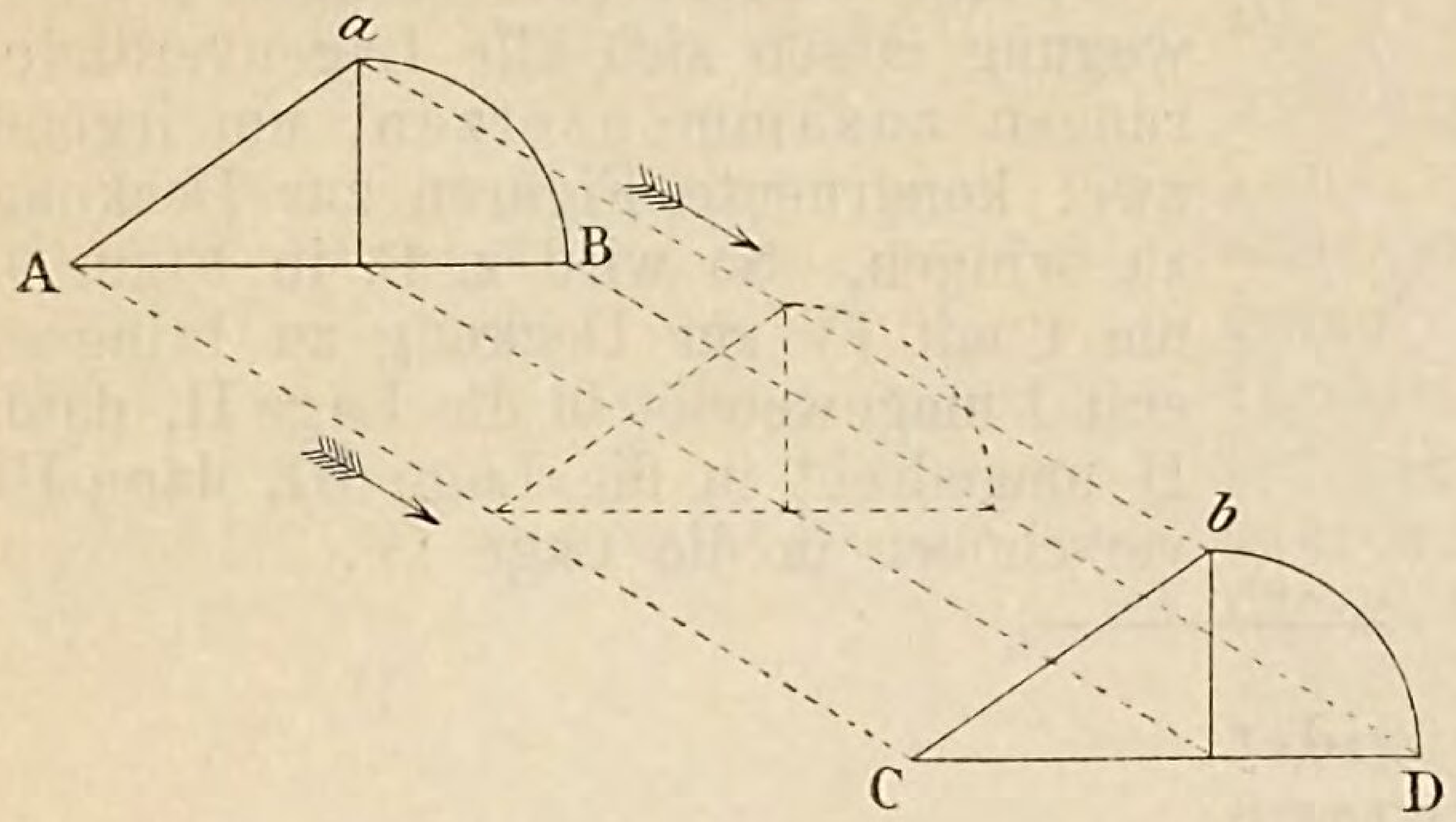
Antwort. Die einfachsten Arten der Bewegung, durch welche eine Figur mit einer kongruenten Figur zur Deckung gebracht werden kann, sind aus den Figuren 5 bis 9 zu erkennen:

Figur 5.



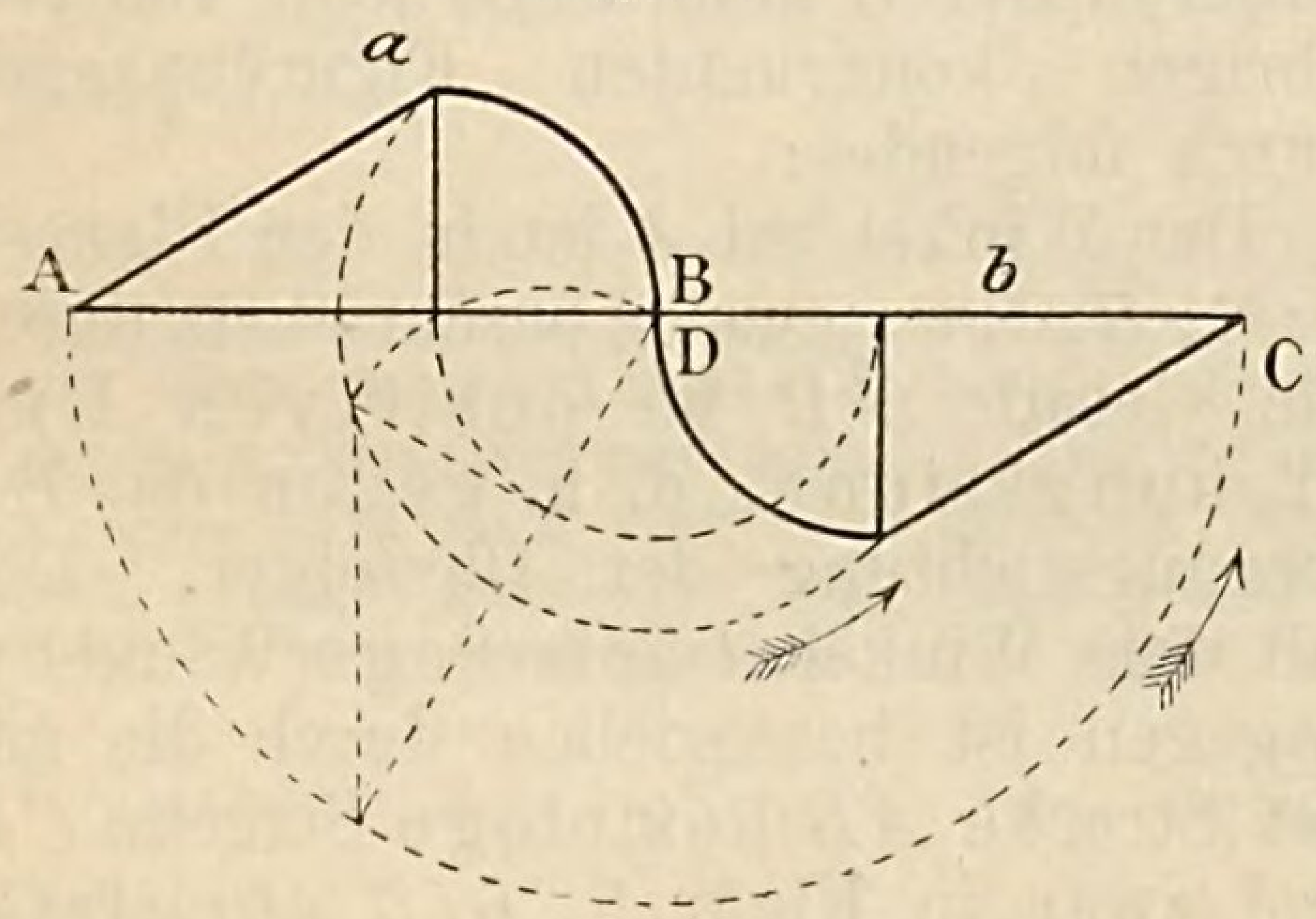
1) Um Figur 5 *a* mit ihrer kongruenten Figur 5 *b* zur Deckung zu bringen, genügt es, Figur 5 *a* längs ihrer Grundlinie *AB* soweit nach rechts zu verschieben bis Punkt *A* auf Punkt *C*, Punkt *B* auf Punkt *D* und damit die ganze Figur 5 *a* auf die Figur 5 *b* zu liegen kommt.

Figur 6.



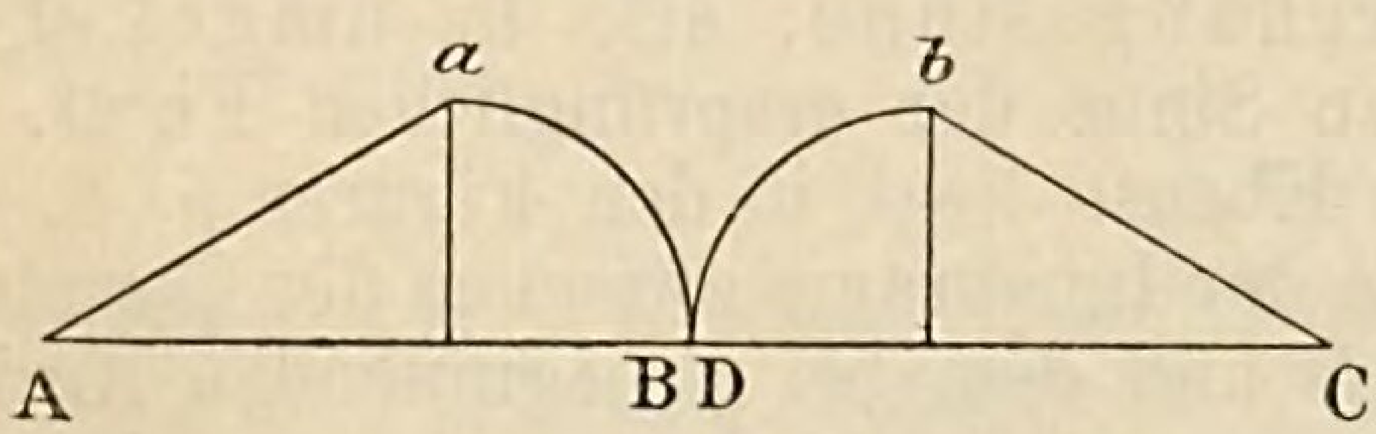
2) Um Figur 6 *a* mit der kongruenten Figur 6 *b* zur Deckung zu bringen, muss die Linie *AB* der Figur 6 *a* auf die parallele Linie *CD* der Figur 6 *b* gebracht werden. Dies kann geschehen, indem Punkt *A* auf der Linie *AC* und Punkt *B* auf der Linie *BD* fortgeschoben wird, bis gleichzeitig *A* auf *C*, und *B* auf *D* angekommen ist. Während dieser Verschiebung wird *AB* stets zu seiner ursprünglichen und zu seiner nachherigen Lage parallel bleiben.

Figur 7.



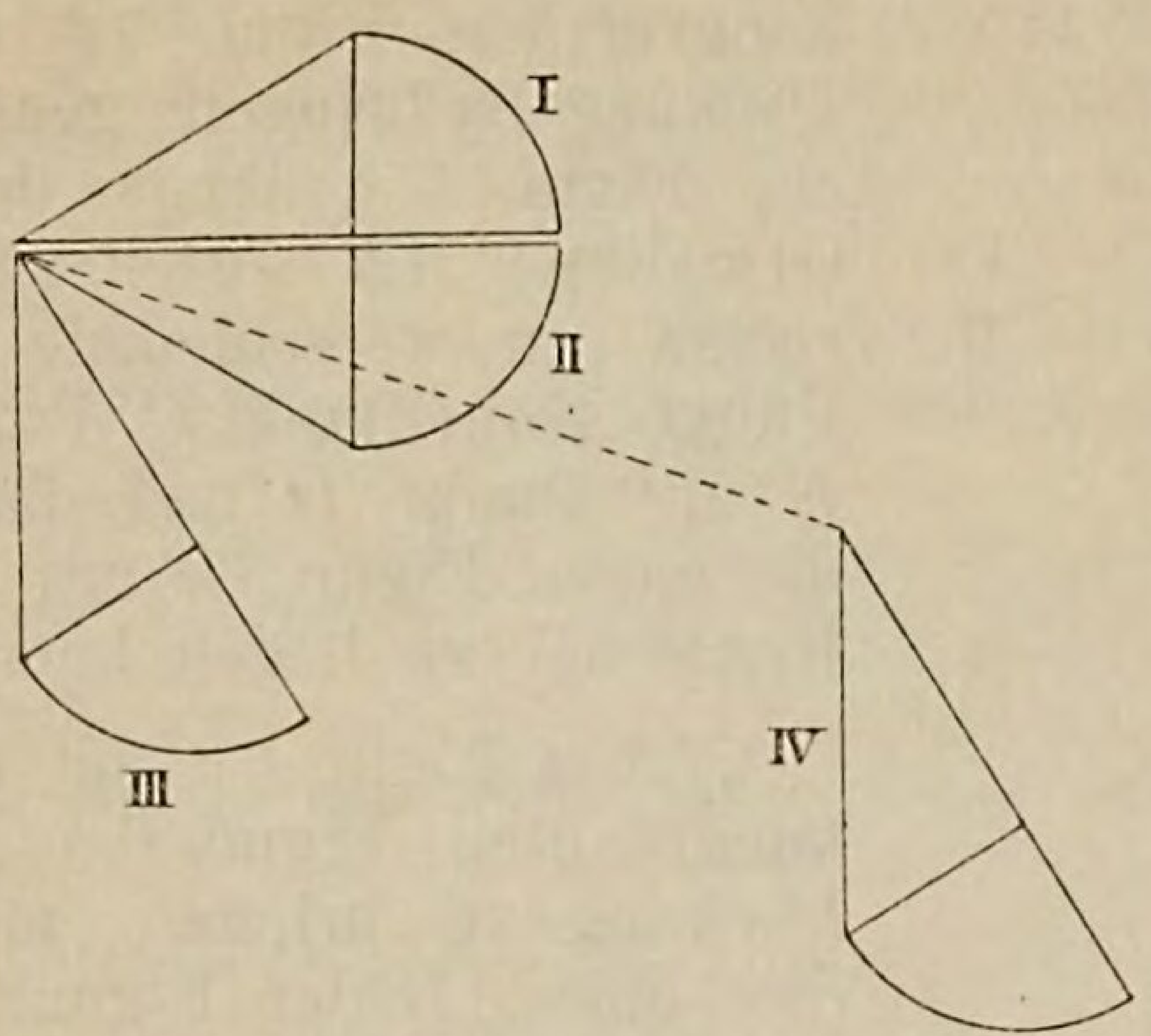
3) Um Figur 7 *a* mit der kongruenten Figur 7 *b* zur Deckung zu bringen, genügt es, Figur 7 *a* um den Punkt *B* entweder in positiver oder in negativer Drehungsrichtung soweit herumzudrehen, bis Punkt *A* auf den Punkt *C* und damit die ganze Figur 7 *a* auf Figur 7 *b* zu liegen kommt. Während dieser Umdrehung wird Punkt *B* stets seinen Platz beibehalten, und jeder Punkt der Fig. 7 *a* wird einen Kreis um Punkt *B* beschreiben.

Figur 8.



4) Um Figur 8 *a* mit der kongruenten Figur 8 *b* zur Deckung zu bringen, genügt weder Verschiebung noch Umdrehung, denn durch diese Bewegungsarten würden nur die aus Figur 6 und 7 zu ersehenden Lagen der Figur entstehen. Man kann daher die Figur 8 *a* nicht auf Figur 8 *b* bringen, ohne die Figur 8 *a* vollständig aus der sie enthaltenden Ebene herauszunehmen, und in anderer Lage, als ihrer vorigen, wieder niederzulegen. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass man die Figur 8 *a* umklappt oder umwendet, so dass der Punkt *B* an seinem Platze

Figur 9.



bleibt, dagegen Punkt A in einem Kreisbogen emporgehoben und nach Punkt C hinübergebracht wird. Ebenso müssen dabei die andern Punkte der Figur 8 a Kreisbögen beschreiben, um auf ihre homologen Punkte wieder niedergelegt zu werden.

5) Aus diesen drei Gattungen der Bewegung lassen sich alle Lagenveränderungen zusammensetzen, um irgend zwei kongruente Figuren zur Deckung zu bringen. So wird z. B. in Figur 9, um I mit IV zur Deckung zu bringen, erst I umgewendet in die Lage II, dann II umgedreht in die Lage III, dann III verschoben in die Lage IV.

Frage 12. Wodurch unterscheidet sich das kongruente Figurenpaar 8 von den ebenfalls kongruenten Figurenpaaren 5, oder 6, oder 7?

Antwort. Während in allen vier kongruenten Figurenpaaren sämtlicke Strecken und sämtliche Winkel einzeln und in gleicher Reihenfolge kongruent sind, unterscheidet sich das Figurenpaar 8 ganz auffallend von den übrigen kongruenten Figurenpaaren durch folgendes:

Der Winkel bei A ist in den Figuren 5, 6, 7, 8 a jeweils beschrieben durch die Gerade AB im positiven Umdrehungssinne, d. h. gegen die Bewegungsrichtung der Uhrzeiger. Der mit dem Winkel A homologe Winkel C dagegen ist beschrieben durch die mit der Strecke AB homologe Strecke CD und zwar in Figur 5, 6, 7 ebenfalls im positiven Umdrehungssinne, also ebenso wie in der andern Figur, dagegen in Figur 8 b im negativen Umdrehungssinne, also im umgekehrten Sinne der ursprünglichen Figur.

Ebenso liegt in den Figuren 5, 6, 7, 8 a der Innenraum zwischen der Geraden AB und dem bei B beginnenden Kreisbogen auf der linken Seite der Richtung A nach B. Der mit jenem Teile der Figur homologe Raum zwischen der mit AB homologen Geraden CD und dem in D beginnenden Kreisbogen liegt in den Figuren 5, 6, 7 ebenfalls auf der linken Seite der Richtung von

Erkl. 20. Dasselbe, was in nebenstehender Antwort für Punkt A, Winkel A und Strecke AB durchgeführt ist, gilt gleicherweise auch für B und D. Auch dort hat man beim Uebergang von der Geraden auf den Kreisbogen bei B in den Figuren 5, 6, 7, 8 a das Innere der Figur zur Linken, bei D in Figur 8 b dagegen zur Rechten. Und um den Zwischenraum zwischen der Geraden und dem Kreisbogen durch die Gerade überstreichen zu lassen, muss man die Gerade AB in den Figuren 5, 6, 7 und 8 a um Punkt B als Scheitel drehen im negativen Umdrehungssinne (mit dem Uhrzeiger) dagegen die Strecke DC in Figur 8 b um Punkt D im positiven Drehungssinne (gegen den Uhrzeiger). Ebenso sind die Unterscheidungen an den übrigen Eckpunkten.

Erkl. 20a. Statt aus der Lage des Innern der Figur, kann man die gleichwendige oder ungleichwendige Kongruenz zweier Figuren auch aus den Umdrehungsrichtungen der Winkel entnehmen und man nennt dann zwei kongruente Figuren gleichwendig oder ungleichwendig, wenn homologe Winkel von homologen Strecken in gleichem oder ungleichem Drehungssinne beschrieben werden.

C nach *D*, also wie in der andern Figur, dagegen in Figur 8 *b* auf der rechten Seite der mit *AB* homologen Richtung *CD*.

Während also ein die Figuren 5 bis 8 *a* in der Richtung *AB* umlaufender Punkt das Innere der Figur stets zur linken Seite hat, wendet ein die Figur 8 *b* in der zu *AB* homologen Richtung *CD* umlaufender Punkt dem Innern dieser Figur stets seine rechte Seite zu. Solche zwei kongruente Figuren, wie 5, oder 6, oder 7, deren Inneres beim homologen Umlauf auf der gleichen Seite liegt, heissen zwei gleichwendig kongruente Figuren, dagegen solche zwei kongruente Figuren, wie 8 *a*, *b*, deren Inneres beim homologen Umlauf um die Figuren auf ungleicher Seite liegt, heissen ungleichwendig kongruente Figuren.

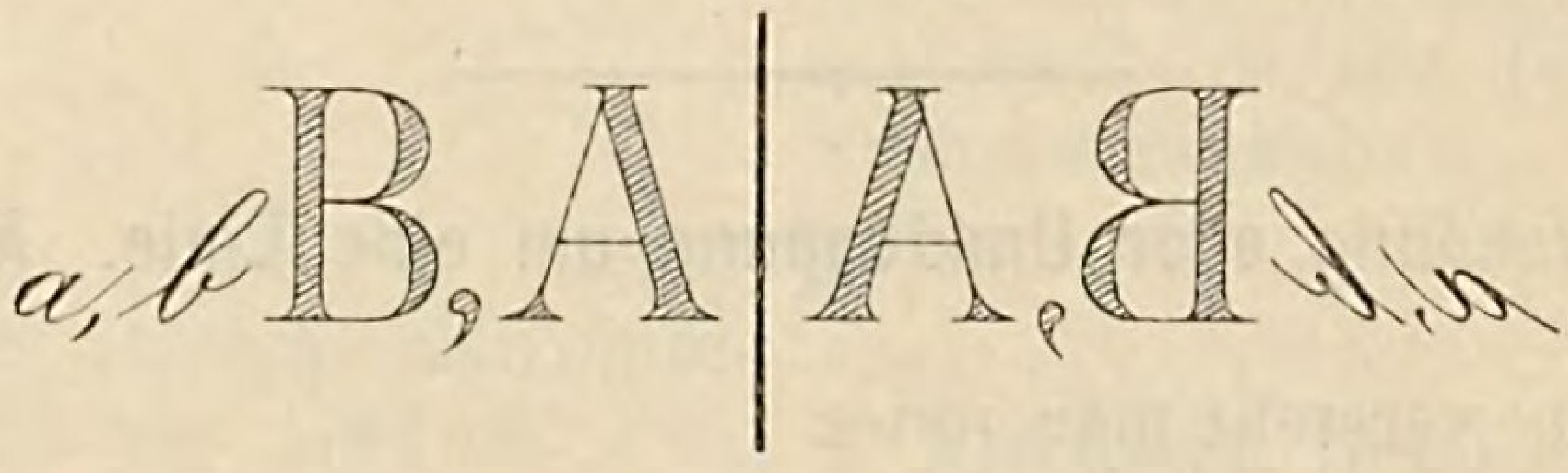
Frage 13. Was kann man auf Grund der in voriger Antwort angestellten Erwägungen aussagen über die Deckung zweier ungleichwendig kongruenten Figuren?

Erkl. 21. Ein vortreffliches Beispiel für nebenstehenden Satz liefern zwei Buchstaben, deren einer in richtiger Schrift, deren anderer in sog. Spiegelschrift geschrieben ist. Man würde sich vergeblich bemühen, dieselben aufeinanderzulegen, ohne dass der eine von beiden umgewendet würde (siehe Figur 10).

Antwort. Ueber die Deckung zweier ungleichwendig kongruenten Figuren kann man auf Grund des bisherigen aussagen:

Satz 2. Ungleichwendig kongruente Figuren können erst dann zur Deckung gebracht werden, wenn die eine zuvor umgeklappt oder umgewendet worden ist.

Figur 10.



Frage 14. Welche Reihenfolge wird man am besten einhalten bei der Aufsuchung derjenigen Einzelbewegungen, durch welche zwei beliebige kongruente Figuren zur Deckung gebracht werden können?

Antwort. Um zu ermitteln, durch welche Einzelbewegungen eine Figur mit einer beliebig kongruenten Figur zur Deckung gebracht werden kann, sucht man zunächst irgend ein in beiden

Figuren homologes Streckenpaar auf und prüft, ob homologe Innenräume beider Figuren auf gleichen oder auf ungleichen Seiten dieser homologen Strecken liegen. Im letzteren Falle wird die eine Figur zunächst **umgeklappt**, so dass zwei gleichwendig kongruente Figuren vorliegen.

Sodann **dreht** man die eine Figur in der die beiden Figuren enthaltenden Ebene um einen solchen Winkel herum, dass die beiden homologen Strecken, welche zuerst aufgesucht waren, gleichgerichtet parallel werden.

Endlich **schiebt** man die eine Figur, sie sich selbst parallel erhaltend, in derselben gemeinsamen Ebene beider Figuren so gegen die andere hin, dass die beiden vorher parallel gelegten homologen Strecken aufeinanderfallen. Dann gelangt auch die ganze erste Figur mit der zweiten Figur zur Deckung.

Erkl. 22. In dem Figurenpaar 5 und ebenso 6 ist der erste und zweite der im nebenstehenden geschilderten Vorgänge schon vollzogen gedacht und nur der dritte noch nötig. In dem Figurenpaar 7 ist nur der zweite, beim Figurenpaar 8 nur der erste Vorgang nötig. Dagegen zeigt Figur 9 I bis IV die Anwendung aller drei Vorgänge in der nebenstehend eingehaltenen Reihenfolge.

Erkl. 22 a. Der in Figur 5 erkennbare Vorgang, als der einfachste, wird im folgenden zuletzt betrachtet: er heisst Verschiebung oder Parallelverschiebung. Der Vorgang in Figur 6 ist ebenfalls eine Verschiebung, wobei aber keine Linie in sich selbst verschoben werden kann. Der Vorgang in Figur 7 heisst die Umdrehung, und jener in Figur 8 die Umwendung oder Umklappung.

Frage 15. Welche einzelnen Arten der Lagenveränderung einer Figur sind nach dem vorhergehenden einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen?

Antwort. Nach dem in der vorigen Antwort gesagten sind besonders zu untersuchen folgende einzelne Arten der Bewegung einer Figur:

1) Die Umwendung oder Umklappung.

2) Die Umdrehung.

3) Die Verschiebung od. Parallelverschiebung.

Erkl. 23. Wie in Antwort auf die Frage 11 an der Figur 9 gezeigt wurde, kann man aus den nebenstehend aufgezählten Einzelbewegungen jegliche Lagenveränderung einer Figur zusammensetzen, durch welche diese mit einer kongruenten Figur zur Deckung gebracht wird.

2) Ueber die Umwendung oder Umklappung um eine Linie. Achsige Symmetrie.

Frage 16. Was versteht man unter Umwendung?

Antwort. Unter Umwendung oder Umklappung versteht man diejenige Lageveränderung einer Ebene, bei welcher diese um eine in ihr liegende gerade Linie soweit umgedreht wird, dass ihre eine Hälfte auf die andere kommt, oder dass die eine Halbebene mit der andern zur Deckung gelangt, oder dass die beiden Halbebenen gegenseitig ihre Lage vertauschen.

Erkl. 24. Die Drehungsgrösse, um deren Betrag die Ebene gedreht wird, ist nach nebenstehender Antwort gleich 180°. Würde sie auf 360° weitergeführt, so käme jede Halbebene wieder an ihren ursprünglichen Ort.

Erkl. 25. Man kann sich die Umwendung auf zweierlei Art ausgeführt denken. Es kann nämlich entweder die **ganze** Ebene um die Symmetrieachse herumgeklappt werden: und

dann gelangt die eine Halbebene in diejenige Lage, welche zuvor von der andern eingenommen wurde, während diese andere selbst in jene Lage übergeführt wird, welche zuvor von der ersten Halbebene eingenommen wurde. Dabei haben also beide Halbebenen ihre Lage wirklich vollständig vertauscht. — Es kann aber auch nur eine Hälfte der Ebene, nur die eine Halbebene, um die Symmetrieachse umgewendet werden: und dann gelangt diese eine Halbebene in diejenige Lage, welche vorher und nachher von der andern eingenommen wird, ohne dass diese zweite Halbebene ihren Ort verlässt. Dabei kommt die erste Halbebene zur Deckung mit der zweiten.

Erkl. 26. Das Wort „Symmetrie" kommt aus dem Griechischen: συν = zusammen, μέτρον = Mass, σύμμετρος = gleichmassig, ebenmässig. Das Wort Achse ist vom Lateinischen axis = die Achse.

Diejenige Gerade, um welche die Drehung stattfindet, heisst Achse oder Symmetrieachse. Die beiden Lagen, welche eine in der Ebene enthaltene Figur vor und nach der Umwendung einnimmt, heissen achsig-symmetrisch, sie heissen miteinander achsig-symmetrisch zu der Geraden als Symmetrieachse.

Frage 17. Wie kann man sich eine Vorstellung oder ein Bild einer Umwendung verschaffen?

Antwort. Man kann sich eine Vorstellung oder ein Bild einer Umwendung verschaffen, indem man z. B. mittels Tinte oder Tusche oder irgend eines anderen flüssigen Materials auf der ebenen Fläche eines Zeichenpapiers eine beliebige Figur zeichnet und dann dieses Zeichenpapierblatt, während die Zeichnung noch nicht abgetrocknet ist, um eine beliebige in demselben enthaltene gerade Linie umknickt und zusammenfaltet, so dass auf der andern Hälfte des Papiers ein Abklatsch der noch feuchten Zeichnung entsteht. Dann sind die ursprüngliche Figur und ihr Abklatsch auf der andern Seite miteinander achsig-symmetrisch zu der Faltungslinie als Symmetrieachse.

Erkl. 27. Die Gerade, um welche das Umwenden oder Umklappen stattfindet, braucht durchaus nicht ausserhalb der ursprünglichen Figur zu verlaufen, sondern kann auch durch dieselbe hindurchgehen. Dabei entsteht dann gleichzeitig Abklatsch von der einen Halbebene auf die zweite und von der zweiten auf die erste.

Frage 18. Was versteht man unter achsig-symmetrischer Lage?

Antwort. Unter achsig-symmetrischer Lage zweier ebenen Figuren versteht man nach dem Vorhergehenden diejenige Lage zweier Figuren, bei welcher

entweder durch eine Umwendung der sie enthaltenden ganzen Ebene um eine in ihr liegende Gerade als Symmetrieachse die beiden Figuren gegenseitig ihre Lage vertauschen,

oder bei welcher durch Umwendung eines die eine Figur enthaltenden Ebenen-

Erkl. 27a. Der die eine Figur enthaltende Ebenenteil kann, wenn die Symmetrieachse durch die Figur selbst hindurchgeht, auch die Symmetrieachse selbst enthalten, wie durch Berücksichtigung von Erkl. 27 erkannt wird. Liegt die Symmetrieachse aber ganz ausserhalb der Figur, so ist am besten die eine Halbebene als der umzuklappende Ebenenteil zu wählen.

teiles um die Symmetrieachse die beiden Figuren zur Deckung kommen.

Eine Figur, deren Punkte und Gerade durch Umwendung um eine Gerade nur wieder auf Punkte und Gerade derselben Figur zu liegen kommen, heisst auch kurz selbst achsig-symmetrisch zu dieser Geraden als Symmetrieachse.

Frage 19. Aus welchen Gegenständen des täglichen Lebens kann man sich eine Vorstellung der achsig-symmetrischen Lage verschaffen?

Erkl. 28. Ausser der in nebenstehend aufgezählten Beispielen erkennbaren sog. „ebenen Symmetrie", d. h. Symmetrie ebener Figuren, gibt es auch eine Symmetrie räumlicher Figuren, sog. „räumliche Symmetrie", welche auftritt zwischen rechter und linker Seite einer menschlichen, tierischen oder pflanzlichen Gestalt, zwischen einem Gegenstande und seinem Spiegelbilde u. s. w. Man sehe über dieselbe den über „räumliche Symmetrie" handelnden Abschnitt in Seipp, „Lehrbuch der Stereometrie".

Antwort. Gegenstände des täglichen Lebens, aus deren Betrachtung man sich eine Vorstellung der achsig-symmetrischen Lage verschaffen kann, sind unter andern die folgenden:

die Umrandungen der beiden Druckseiten eines aufgeschlagenen Buches oder einer Zeitung;

die beiden Teile eines Fensters, einer Flügelthüre, eines Thores;

die Rahmen eines Bildes, eines Spiegels;

die Anordnung mehrerer an einer Zimmerwand aufgehängten Bilder um einen Mittelgegenstand, oder die Anordnung der Fenster und Verzierungen einer Häuserfront zu beiden Seiten eines Mittelportals;

die beiderseitigen Flügel eines Schmetterlings oder Vogels;

die Blütenformen u. Blattformen vieler Pflanzen;

Schrift und Spiegelschrift,

Drucktypen und Druckschrift;

Pettschafte, Siegel, Stempel, „Abziehbilder" und ihre Abdrücke;

u. v. a. m.

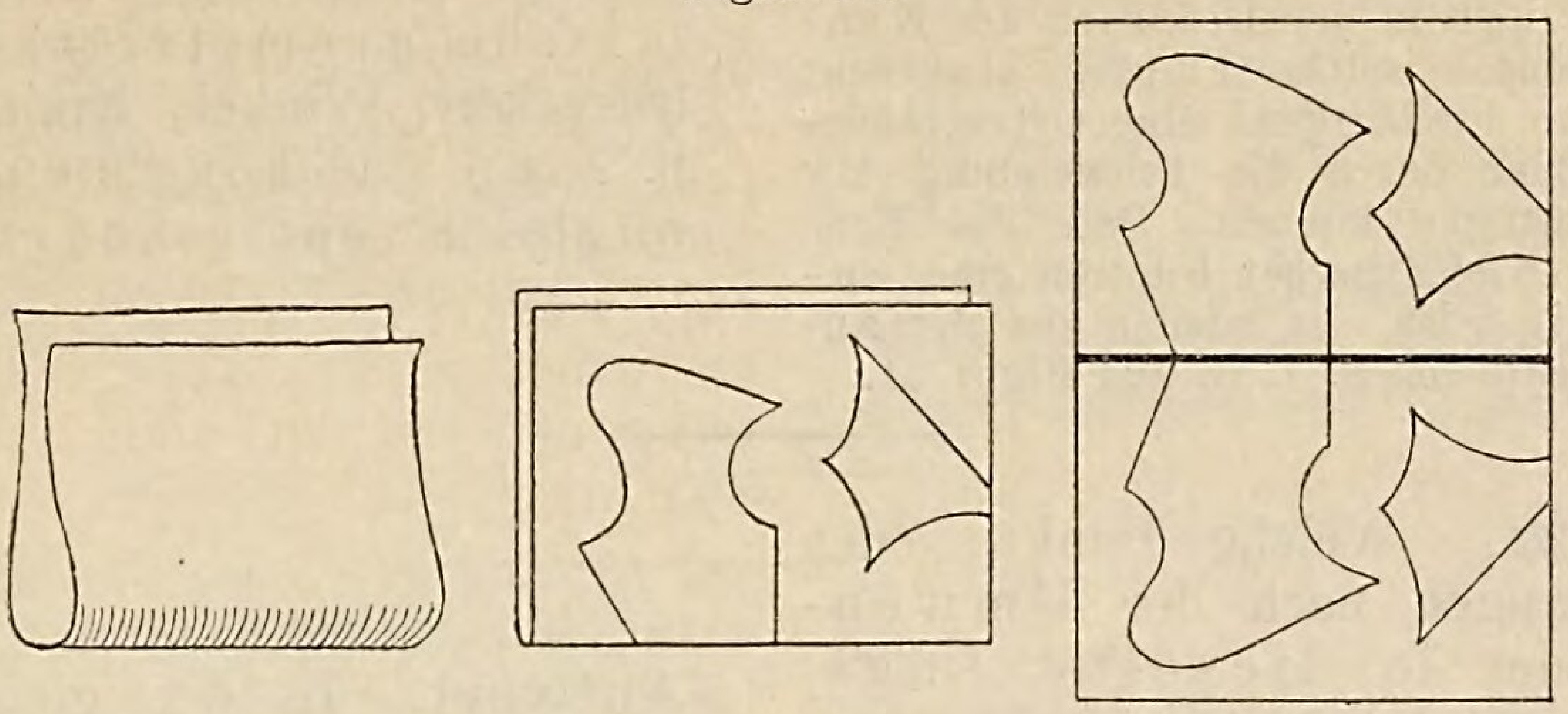
Frage 20. Auf welche Weise kann man sich am einfachsten beliebige achsig-symmetrische Figuren herstellen?

Erkl. 29. Die nebenstehend beschriebene Art ist sehr häufig im Gebrauch zur Herstellung von Spielzeug oder Verzierungen u. s. w. aus Papier (siehe Figur 11).

Antwort. Um sich beliebige achsig-symmetrische Figuren herzustellen, kann man entweder so verfahren, wie in Antwort auf Frage 17 angegeben wurde, oder aber wie folgt:

Man falte ein Blatt Papier um eine beliebige Kante zusammen, so dass man

Figur 11.



ein an jener Kante umgebogenes Doppelblatt erhält, dessen beide Blätter an der einen Geraden zusammenhängen. Alsdann schneide man mit der Schere aus dem zusammengefalteten Blatt beliebige Figuren aus, falte das Doppelblatt wieder auseinander und lege dasselbe wieder glatt auf eine ebene Fläche aus. Dadurch entstehen auf den beiden Hälften des vorigen Doppelblatts zwei achsig-symmetrische Figuren, für welche die Faltungskante des Blattes Symmetrieachse ist. Denn die beiden Figuren besitzen die in Antwort auf Frage 18 gekennzeichnete Eigenschaft, dass durch Umklappen um die Faltungskante die eine Figur mit der andern zur Deckung kommt. Die nach dem Auseinanderfalten und Auflegen des ganzen Papierblattes erhaltene Gesamtfigur ist nach Antwort 18 selbst eine zur Faltungskante als Achse symmetrische Figur.

Frage 21. Welche Aussagen über achsig-symmetrische Figuren kann man machen auf Grund der aus dem bisherigen hervorgehenden Vorstellungen über die achsige Symmetrie und achsig-symmetrische Lage?

Erkl. 30. Die allgemeine Richtigkeit der in Satz 3 ausgesprochenen Behauptung folgt unmittelbar aus der Anschauung, dass ein geometrisches Grundgebilde (Punkt oder Gerade) bei wiederholtem Umklappen jedesmal nur mit ein und demselben Punkt oder mit einer und derselben Geraden der andern Halbebene zur Deckung kommt.

Antwort. Auf Grund der Antworten auf die Fragen 17 bis 20 kann man über achsig-symmetrische Figuren folgendes aussagen:

Satz 3. Zu einem geometrischen Gebilde (Punkt, Gerade, Strecke, Winkel, Kreis, Vieleck u. s. w.) gibt es zu einer Symmetrieachse nur ein einziges achsig-symmetrisches Gebilde.

Erkl. 31. Der Beweis für die Richtigkeit des Satzes 4 liegt in der Definition der Kongruenz, wonach solche Figuren kongruent heissen, welche durch irgend eine Ortsveränderung, also hier durch die Umwendung zur Deckung gelangen können. Dass die Kongruenz achsig-symmetrischer Figuren eine ungleichwendige ist, ist wieder aus der Anschauung zu entnehmen, z. B. aus Figur 11.

Satz 4. Zu einer Achse symmetrische geometrische Gebilde (Strecken, Winkel, Kreise, Vielecke u. s. w.) sind kongruent und zwar ungleichwendig kongruent.

Frage 22. Welche Punkte oder Gerade gelangen nach der Umwendung wieder in dieselbe Lage, welche sie zuvor eingenommen?

Erkl. 32. Von solchen Punkten oder Geraden, welche nach der Umwendung dieselbe Lage einnehmen wie zuvor, sagt man, sie seien mit sich selbst achsig-symmetrisch oder sie entsprechen sich selbst achsig-symmetrisch.

Erkl. 33. Die beiden Strahlen, in welche eine Achsensenkrechte durch ihren Schnittpunkt mit der Symmetrieachse getrennt wird, vertauschen bei der Umwendung ihre Lage. Daher ist ein jeder dieser Strahlen einzeln zu seiner Verlängerung achsig-symmetrisch, aber die Achsensenkrechte als ganze Linie zu sich selbst.

Antwort. In der gleichen Lage, wie vor der Umwendung, befinden sich nach derselben

1) die Punkte der Achse selbst, die sogen. Achsenpunkte, welche bei der Umwendung ihre Stelle gar nicht verlassen;

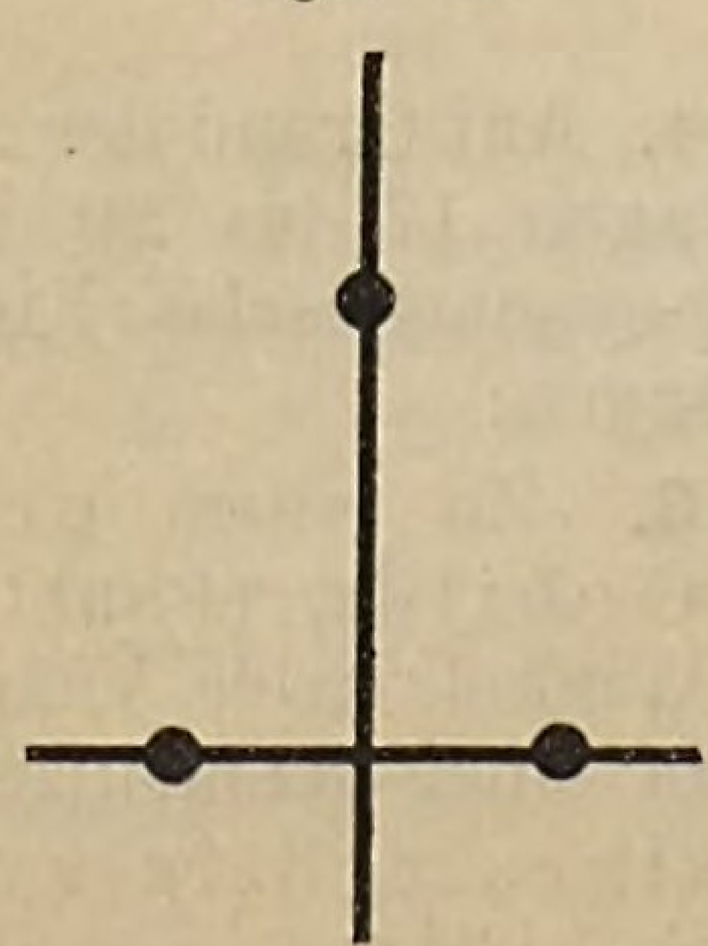
2) die Achse selbst als Gesamtheit der ebengenannten Punkte;

3) die auf der Achse senkrechten Geraden, die sogen. „Achsensenkrechten.“

Denn nach Antwort auf Frage 21 muss der Strahl, welcher vor der Umwendung einen rechten Winkel mit der Achse bildete, nach der Umwendung wieder senkrecht zur Achse sein, also auf seine eigene Verlängerung zu liegen kommen, da es keine zweierlei Senkrechten geben kann. Daher fällt die Achsensenkrechte als ganze Gerade nach der Umwendung in die gleiche Lage wie zuvor, nur mit vertauschten Strahlen.

Frage 23. In welcher Weise lässt sich das Ergebnis der vorigen Antwort zusammenfassen?

Figur 12.



Antwort. Auf Grund der Antwort auf die vorige Frage und der Erkl. 32 kann man aussagen:

Satz 5. Jeder Achsenpunkt entspricht sich selbst achsig-symmetrisch.

Satz 6. Die Symmetrieachse ist eine sich selbst achsig-symmetrische Gerade.

Satz 7. Jede Achsensenkrechte entspricht sich selbst achsig-symmetrisch.

Erkl. 34. Man hat wohl zu unterscheiden, dass einzelne Punkte auf der Symmetrieachse und der Achsensenkrechten in ganz verschiedener Weise sich entsprechen. Auf der Symmetrieachse bleibt jeder einzelne Punkt an derselben Stelle, dagegen auf einer Achsensenkrechten vertauscht jeder Punkt seinen Platz mit einem andern Punkt, der allerdings wieder auf derselben Geraden gelegen ist.

Satz 5a. Kein Punkt ausserhalb der Achse kann sich selbst achsig-symmetrisch entsprechen.

Satz 7a. Keine gerade Linie, die nicht mit der Symmetrieachse entweder zusammenfällt, oder rechte Winkel bildet, kann sich selbst achsig-symmetrisch entsprechen.

Frage 24. Welche Beziehungen bestehen zwischen der Lage eines Punktes ausserhalb der Achse und seines achsig-symmetrischen Punktes?

Erkl. 35. Nach Lehrsatz 32 des zweiten Teiles gibt es zu einer geraden Linie durch einen ausserhalb gegebenen Punkt nur eine einzige Senkrechte; daher sagt man auch ausdrücklich „die Achsensenkrechte“, statt allgemein „eine Achsensenkrechte“ durch einen gegebenen Punkt.

Erkl. 36. Eine Linie, welche auf einer Strecke senkrecht steht und durch den Mittelpunkt derselben geht, heisst Mittelsenkrechte dieser Strecke, oder auch nur Mittelsenkrechte der Endpunkte jener senkrecht halbierten Strecke.

Antwort. Um die Beziehungen zwischen der Lage zweier beliebigen achsig-symmetrischen Punkte derselben Ebene zu finden, denke man sich durch den einen derselben die Achsensenkrechte gezeichnet. Alsdann muss nach Lehrs. 7 und Erkl. 34 der symmetrische Punkt wieder auf derselben Achsensenkrechten liegen. Und zwar muss die Strecke zwischen dem Schnittpunkt der Achse mit der Achsensenkrechten und dem zweiten Punkte beim Umklappen gleich lang werden, wie dieselbe Strecke zwischen Achsenschnittpunkt und dem ersten, zum ebengenannten symmetrischen Punkte. Der Achsenpunkt ist also der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der beiden symmetrischen Punkte, und diese Verbindungslinie selbst ist eben die Achsensenkrechte.

Frage 25. Welche Aussagen über die Beziehungen zweier achsig-symmetrischen Punkte zur Symmetrieachse folgen aus der Antwort auf Frage 24?

Erkl. 37. Es ist nützlich, sich die Beziehungen zwischen Symmetrieachse und symmetrischen Grundgebilden in den verschiedensten Fassungen zu vergegenwärtigen, da dieselben in sehr ausgedehnter Weise Anwendung finden.

Erkl. 38. Die Beweise für die Richtigkeit der nebenstehend aufgestellten Behauptungen sind sämtlich schon in der Antwort auf Frage 24 enthalten. Doch kann auch jede einzelne Aussage für sich bewiesen werden, wie z. B. für Satz 8c folgendermassen geschieht (s. Fig. 13):

Antwort. Auf Grund der in voriger Antwort angestellten Betrachtungen kann man folgende Aussagen machen:

Satz 8. Zwei Punkte auf derselben Achsensenkrechten, welche vom Achsenschnittpunkte entgegengesetzt gleichen Abstand haben, sind achsig-symmetrisch;

und umgekehrt:

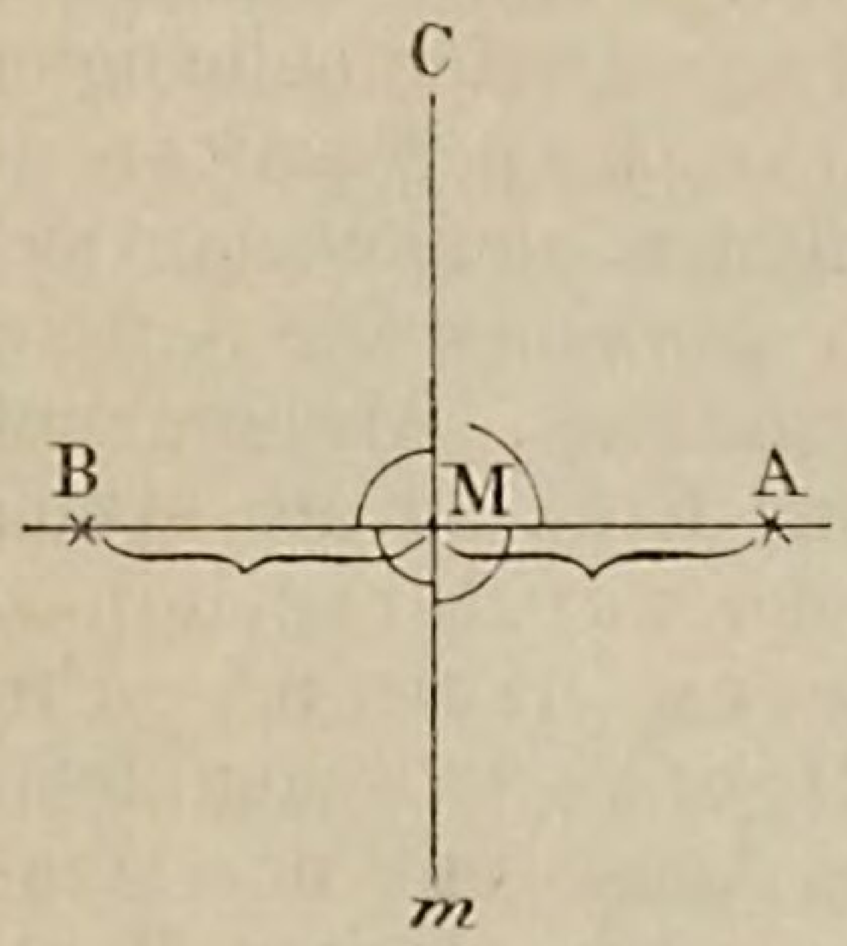
Satz 8a. Zwei achsig-symmetrische Punkte liegen auf derselben Achsensenkrechten und haben entgegengesetzt gleichen

Voraussetzung. A und B seien symmetrische Punkte zur Symmetrieachse m.

Behauptung. $CM \perp AB$
$MA = MB$.

Beweis. Nach Satz 7 erhält man den symmetrischen Punkt zu A, indem man die Achsensenkrechte durch A zieht und auf deren Verlängerung die gleichgrosse Strecke abträgt. Für den so entstandenen Punkt ist dann die Behauptung erfüllt. Da es aber nur einen achsig-symmetrischen Punkt zu A gibt, so muss derselbe Punkt B mit dem vorigen zusammenfallen, also dieselben Eigenschaften aufweisen.

Figur 13.



Abstand von dem Achsenschnittpunkte.

Oder in veränderter Ausdrucksweise:

Satz 8b. Die Verbindungsgerade zweier achsig-symmetrischen Punkte steht auf der Achse senkrecht;

und umgekehrt:

Satz 8c. Die Symmetrieachse steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden zweier symmetrischen Punkte und halbiert deren Verbindungsstrecke,

oder:

Satz 8d. Die Symmetrieachse ist Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke zweier achsig-symmetrischen Punkte.

Oder:

Satz 9. Eine Senkrechte von einem Punkte auf die Symmetrieachse geht (bei genügender Verlängerung) auch durch den andern achsig-symmetrischen Punkt.

Satz 9a. Fällt man von zwei achsig-symmetrischen Punkten Senkrechte auf die Symmetrieachse, so fallen diese in eine und dieselbe Gerade und bilden gleichlange Strecken zwischen der Achse und den symmetrischen Punkten.

Frage 26. Welche Eigenschaften muss eine Gerade haben, damit sie Symmetrieachse zu zwei beliebigen Punkten sei?

Erkl. 39. Dem nebenstehenden Satz 10 könnte man auch folgende Fassung geben:

Zwei beliebige Punkte können zur Deckung gebracht werden durch Umklappung oder Umwendung um diejenige Linie, welche den Abstand der Punkte senkrecht halbiert, d. h. durch Umwendung um die Mittelsenkrechte der beiden Punkte.

Antwort. Aus Lehrsatz 8d folgt zunächst als Umkehrung:

Satz 10. Zu zwei beliebigen Punkten ist die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungsstrecke Symmetrieachse.

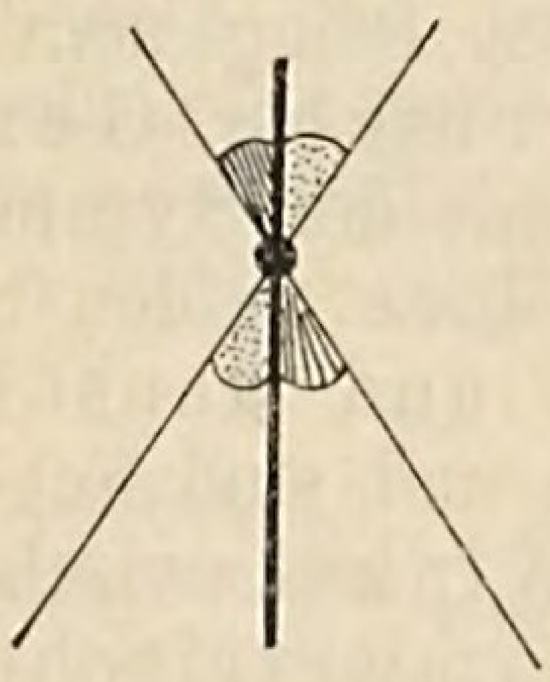
Da es nun zu einer Strecke nur einen Mittelpunkt und in diesem Mittelpunkt nur eine Senkrechte gibt, so folgt ferner:

Satz 10a. Zu zwei beliebigen Punkten gibt es nur eine einzige Symmetrieachse, nämlich ihre Mittelsenkrechte.

Frage 27. Welche Beziehungen bestehen zwischen der Lage einer Geraden und ihrer achsig-symmetrischen Geraden?

Erkl. 40. Man beachte wohl, dass Frage 27 sich an Satz 7a in Antwort auf Frage 23 genau ebenso anschliesst, wie Frage 24 an Satz 5a derselben Antwort, dass also die Antworten und Fragen 27 bis 29 die dualistischen Uebertragungen der Antworten und Fragen 24 bis 26 sind. Dass dabei die Dualität nicht so vollständig werden kann, wie in den Antworten auf die Fragen 4 bis 6 dieses Teils, rührt daher, dass als Grundlage der Betrachtung die Umwendung um eine gerade Linie festgehalten wird für beide Entwicklungsreihen.

Figur 14.



Antwort. Um die Beziehungen zwischen der Lage zweier beliebigen achsig-symmetrischen Geraden zu finden, denke man sich die eine derselben mit der Symmetrieachse zum Schnitt gebracht. Der dem Achsenschnittpunkt der ersten Geraden entsprechende Punkt der symmetrischen Geraden ist alsdann nach Satz 5 ebenderselbe Achsenpunkt, also muss die symmetrische Gerade wieder durch denselben Achsenpunkt gehen. Und zwar muss der Winkel zwischen der Symmetrieachse und der zweiten geraden Linie beim Umklappen gleich gross werden, wie derselbe Winkel zwischen der Symmetrieachse und der ersten, zur ebengenannten symmetrischen Geraden. Zu beiden Seiten der Achse liegen also zwei gleichgrosse Winkel am gleichen Scheitel und dieser Scheitel ist der Schnittpunkt der beiden symmetrischen Geraden miteinander und mit der Achse; und die Achse selbst ist gemeinschaftlicher Schenkel beider Winkel, also Winkelhalbierende des Winkels der beiden symmetrischen Geraden.

Frage 28. Welche Aussagen über die Beziehungen zweier achsig-symmetrischen Geraden zur Symmetrieachse folgen aus der Antwort auf Frage 27?

Erkl. 41. Die Winkel der beiden symmetrischen Geraden mit der Symmetrieachse heissen entgegengesetzt gleich, weil sie in entgegengesetztem Drehungssinne beschrieben sind, nämlich der eine mit, der andere gegen die Uhrzeigerdrehung.

Erkl. 42. Die Beweise für die nebenstehenden Behauptungen gehen alle hervor aus der Antwort auf Frage 27. Doch kann auch jeder Satz einzeln bewiesen werden, z. B. Satz 11d in folgender Weise (siehe Figur 15):

Voraussetzung. a und b seien symmetrische Geraden zur Symmetrieachse m.

Behauptung. m geht durch den Schnittpunkt von a und b:

$$\sphericalangle(ma) = \sphericalangle(mb)$$

Antwort. Auf Grund der in voriger Antwort enthaltenen Ueberlegungen kann man folgende Aussagen machen:

Satz 11. Zwei gerade Linien durch denselben Achsenpunkt, welche mit der Symmetrieachse entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, sind achsig-symmetrisch;

und umgekehrt:

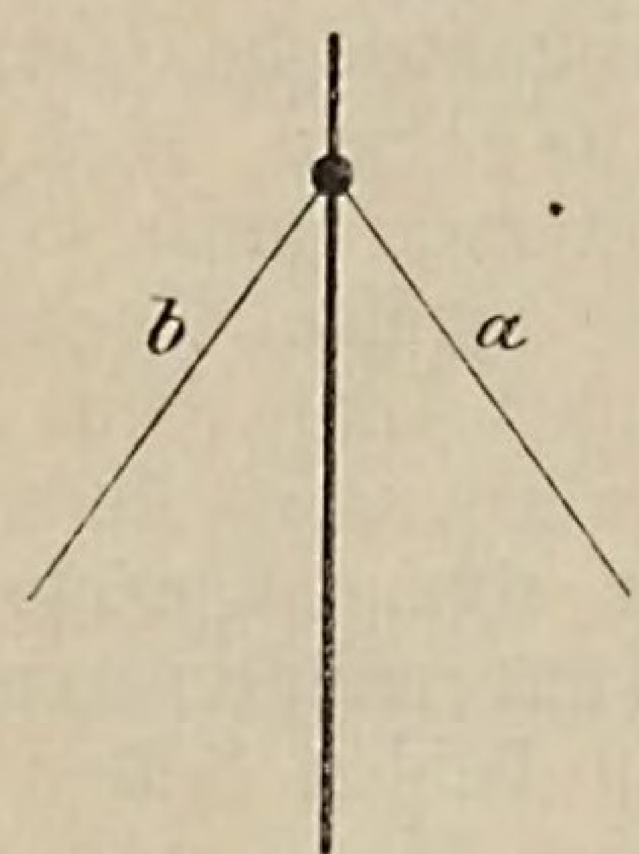
Satz 11a. Zwei achsig-symmetrische Geraden gehen durch denselben Achsenpunkt und bilden entgegengesetzt gleiche Winkel mit der Symmetrieachse.

Oder in veränderter Ausdrucksweise:

Satz 11b. Der Schnittpunkt zweier achsig-symmetrischen

Beweis. In Berücksichtigung des Satzes 5 erhält man die achsig-symmetrische Gerade zu a, indem man a mit der Achse zum Schnitt bringt und am Schnittpunkt nach der andern Seite denselben Winkel anträgt. Für den so erhaltenen Winkelschenkel ist die Behauptung erfüllt. Da es aber nur eine symmetrische Gerade zu a gibt, so muss dieselbe Gerade mit der vorigen zusammenfallen, also dieselben Eigenschaften aufweisen.

Figur 15.



Geraden liegt auf der Achse, — je zwei achsig-symmetrische Geraden schneiden sich in einem Achsenpunkte;

und umgekehrt:

Satz 11c. Die Symmetrieachse geht durch den Schnittpunkt je zweier achsig-symmetrischen Geraden und halbiert den Winkel derselben;

oder:

Satz 11d. Die Symmetrieachse ist Halbierungslinie des Schnittwinkels je zweier achsig-symmetrischen Geraden.

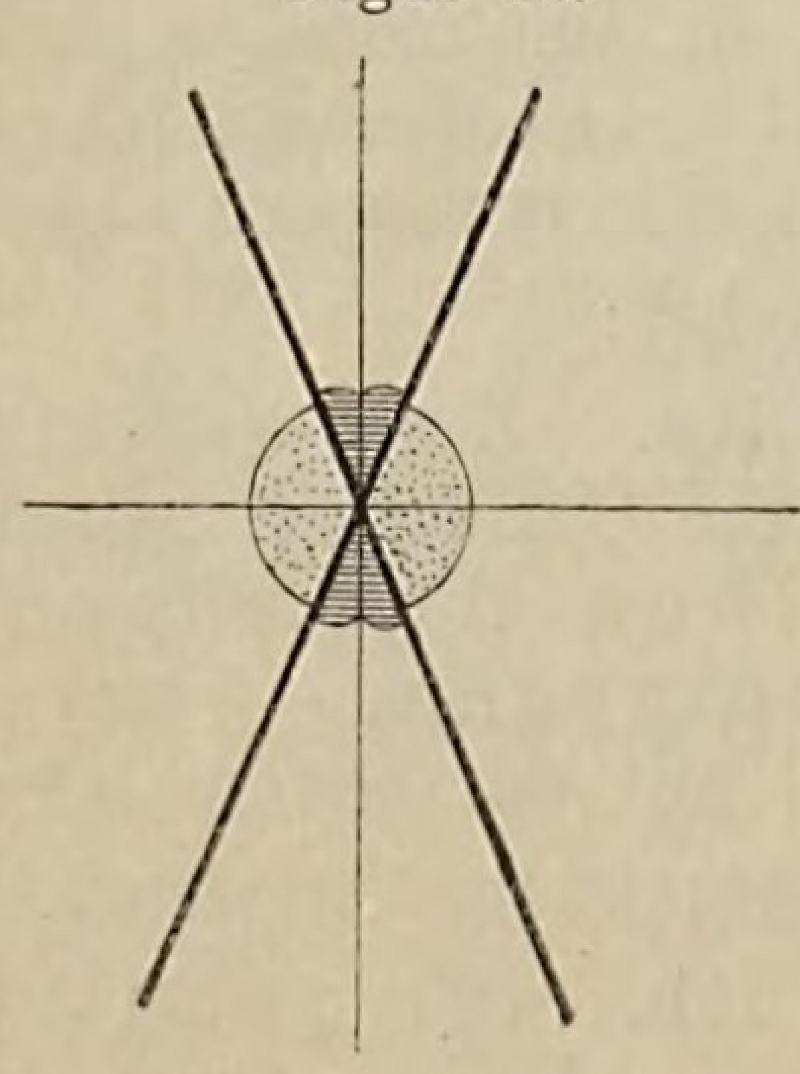
Satz 12. Die achsig-symmetrische Gerade zu einer gegebenen Geraden geht durch denselben Achsenpunkt wie diese.

Satz 12a. Bringt man zwei achsig-symmetrische Geraden zum Schnitt mit der Symmetrieachse, so fallen diese beiden Schnittpunkte in einen und denselben Punkt zusammen und sind Scheitel gleichgrosser Winkel zwischen der Achse und den symmetrischen Geraden.

Frage 29. Welche Eigenschaften muss eine Gerade haben, damit sie Symmetrieachse zu zwei beliebigen geraden Linien sein kann?

Erkl. 43. Nach Lehrsatz 9 des zweiten Teiles bilden die Halbierungslinien zweier Scheitelwinkel einen gestreckten Winkel, diejenigen zweier Nebenwinkel einen rechten Winkel. Also sind die beiden Symmetrieachsen zu zwei beliebigen geraden Linien zu einander senkrecht.

Figur 16.



Antwort. Aus Satz 11c folgt zunächst als Umkehrung:

Satz 13. Zu zwei beliebigen Geraden ist die Halbierungslinie ihres Schnittwinkels Symmetrieachse.

Da nun von zwei beliebigen Geraden vier Winkel gebildet werden und jeder Winkel eine Winkelhalbierende besitzt, so wären zunächst vier gerade Linien in Betracht zu ziehen. Weil aber von den vier Winkeln zweier Geraden je zwei Scheitelwinkel sind, und nach Lehrsatz 9 des zweiten Teils die Halbierungslinien eines Winkels und seines Scheitelwinkels eine und dieselbe Gerade bilden, so bleiben noch zwei gerade Linien übrig; also folgt:

Satz 13a. Zu zwei beliebigen Geraden (als Ganzen) gibt es zwei Symmetrieachsen, nämlich die

Erkl. 43a. Aus einer Vergleichung der Antworten auf die Fragen 24 bis 26 und 27 bis 29 erkennt man, dass im allgemeinen wieder Punkt und Gerade einander dualistisch gegenüberstehen. Jedoch geht diese Genauigkeit der Durchführung verloren, wenn die Symmetrieachse selbst Gegenstand des Lehrsatzes wird; denn diese tritt eben in beiden Entwicklungsreihen als gerade Linie auf und zwar in der einen Betrachtungsweise als

Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke zweier Punkte,

in der andern als

Halbierungslinie des Schnittwinkels zweier Geraden.

Dass aber in einzelnen Fällen der Dualismus vollständig zur Durchführung gelangen kann, ist aus der folgenden Frage und Antwort 30 und 31 zu erkennen.

Winkelhalbierenden zweier von ihnen gebildeten Nebenwinkel.

Dagegen gilt natürlich für zwei vom gleichen Punkt ausgehende Strahlen allein, entsprechend dem Satz 10a, auch hier:

Satz 13b. Zu den Schenkeln eines bestimmten Winkels gibt es nur eine einzige Symmetrieachse, nämlich die Winkelhalbierende.

Frage 30. Wie kann man finden, welche von den durch zwei achsig-symmetrische Punkte gehenden Geraden wieder symmetrisch sind?

Frage 31. Wie kann man finden, welche von den auf zwei achsig-symmetrischen Geraden liegenden Punkten wieder symmetrisch sind?

Erkl. 44. Die Richtigkeit der in nebenstehenden Sätzen ausgesprochenen Behauptungen geht daraus hervor, dass wenn zwei Punktepaare oder zwei Geradenpaare zur Deckung gelangen, dann notwendigerweise auch die Verbindungsgerade bezw. der Schnittpunkt zur Deckung gelangt, da zwischen zwei Punkten nur eine einzige Verbindungsgerade und für zwei Gerade nur ein einziger Schnittpunkt existiert.

Erkl. 44a. Die Wichtigkeit der nebenstehenden Sätze 14 bis 15 geht hauptsächlich hervor aus deren Anwendung auf die Lehre vom Dreieck, insbesondere vom „gleichschenkligen Dreieck“, welche im vorletzten Abschnitt dieses Teiles enthalten ist.

Erkl. 44b. Den Satz 14 könnte man auch in folgender Fassung aussprechen:

Jeder Punkt der Symmetrieachse, d. h. der Mittelsenkrechten von zwei

Antwort. Um zu finden, welche von den durch zwei achsig-symmetrische Punkte gehenden Geraden wieder achsig-symmetrisch sind, kann man auf zweierlei Weise verfahren:

1) Da nämlich ein Achsenpunkt bei der Umwendung seine vorige Lage wieder einnimmt, und die symmetrischen Punkte selbst ihre Lage vertauschen, so müssen stets symmetrische Geraden entstehen, wenn man zwei symmetrische Punkte mit einem beliebigen Achsenpunkt verbindet; also (siehe Figur 17):

Satz 14. Die Verbindungsgeraden zweier achsig-symmetrischen Punkte mit gleichen Achsenpunkten sind achsig-symmetrisch; sie bilden daher gleiche Winkel mit der Achse und enthalten gleiche

Um zu finden, welche von den auf zwei achsig-symmetrischen Geraden liegenden Punkten wieder achsig-symmetrisch sind, kann man auf zweierlei Weise verfahren:

Da nämlich eine Achsensenkrechte bei der Umwendung ihre vorige Lage wieder einnimmt, und die symmetrischen Geraden selbst ihre Lage vertauschen, so müssen stets symmetrische Punkte entstehen, wenn man zwei symmetrische Geraden mit einer beliebigen Achsensenkrechten zum Schnitt bringt; also:

Satz 15. Die Schnittpunkte zweier achsig-symmetrischen Geraden mit gleichen Achsensenkrechten sind achsig-symmetrisch; sie haben daher gleichen Abstand von der Achse und sind Scheitel gleicher

beliebigen Punkten hat gleichen Abstand von diesen Punkten.

Und umgekehrt:

Jeder Punkt, der von zwei beliebigen Punkten gleichen Abstand hat, liegt auf der Symmetrieachse, d. h. auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte.

Denn wenn um die Winkelhalbierende der beiden Abstands-Strecken umgeklappt wird, so fallen die Strecken aufeinander, also auch die Punkte, und jene Winkelhalbierende ist auch Symmetrieachse der beiden Punkte. Genauere Ausführung dieser beiden Sätze findet man im nächsten Teil dieses Lehrbuches bei der Lehre von den „geometrischen Oertern“.

Abstandsstrecken zwischen dem Achsenschnittpunkt und den ursprünglichen Punkten.

2) Da ferner eine Achsensenkrechte bei der Umwendung ihre vorige Lage wieder einnimmt, und ein Winkel bei der Umwendung gleich gross bleibt, so müssen auch stets achsig-symmetrische Geraden entstehen, wenn man in zwei achsig-symmetrischen Punkten an ihrer Achsensenkrechten nach entgegengesetzten Drehungsrichtungen gleich grosse Winkel anträgt; also:

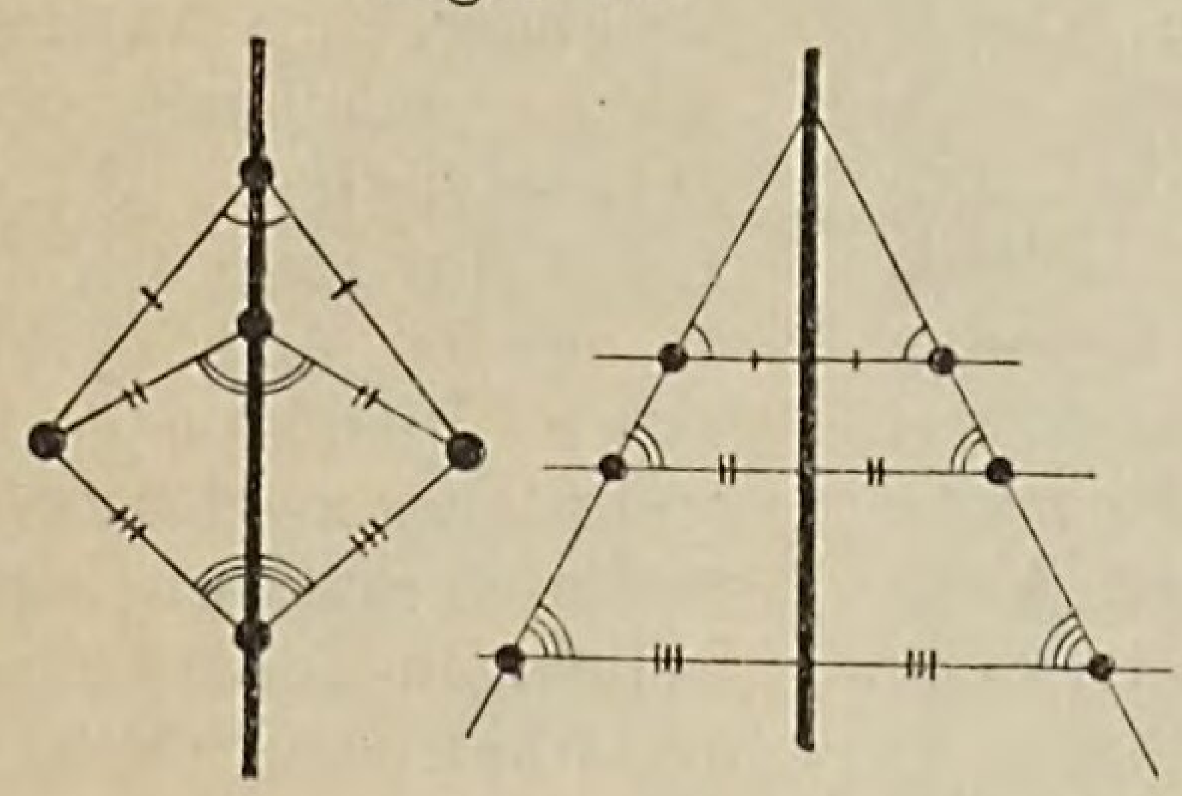
Satz 14a. Zwei Gerade durch zwei achsig-symmetrische Punkte, welche mit deren Verbindungslinie entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, sind achsig-symmetrisch, bilden also auch an ihrem Achsenschnittpunkt entgegengesetzt gleiche Winkel mit der Achse und enthalten gleiche Abstandsstrecken zwischen dem Achsenschnittpunkt und den ursprünglichen Punkten (s. Figur 18).

Schnittwinkel zwischen der Achsensenkrechten und den ursprünglichen Geraden (s. Figur 17).

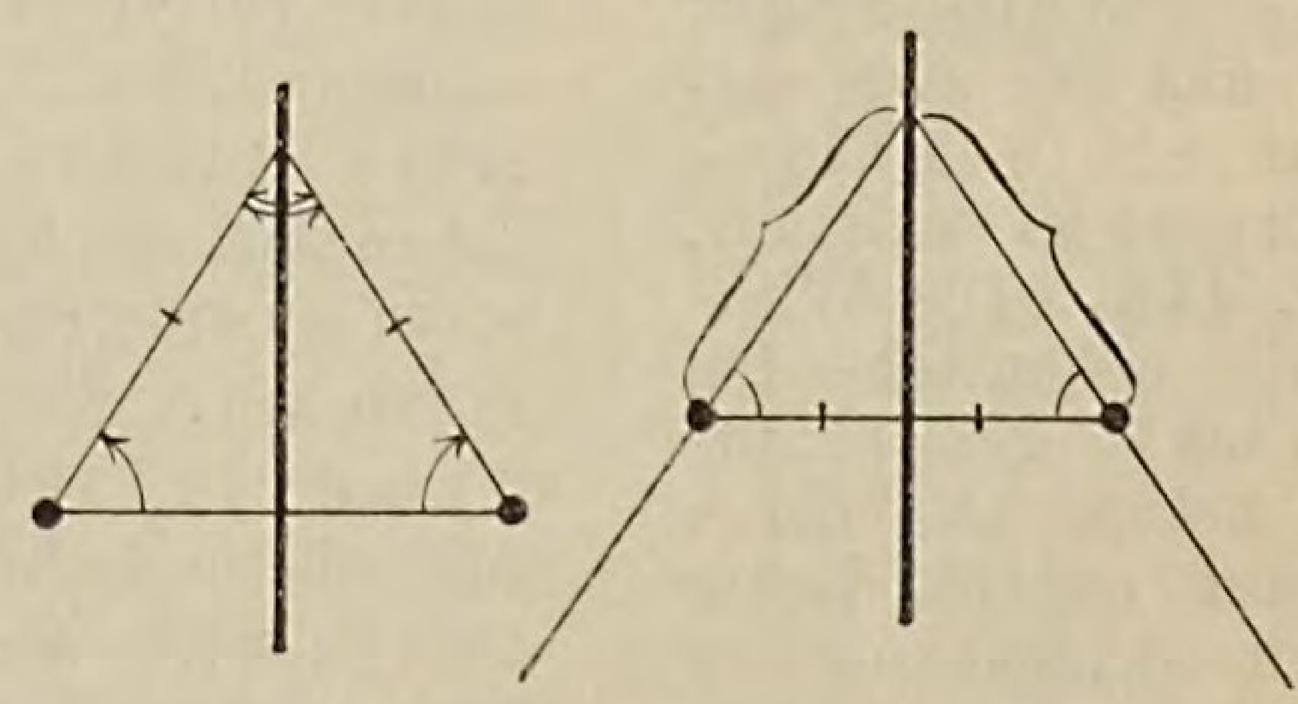
Da ferner ein Achsenpunkt bei der Umwendung seine vorige Lage wieder einnimmt, und eine Strecke bei der Umwendung gleich gross bleibt, so müssen auch stets achsig-symmetrische Punkte entstehen, wenn man auf zwei achsig-symmetrischen Geraden von ihrem Achsenschnittpunkt aus nach beiden Seiten gleiche Strecken abträgt; also (s. Figur 18):

Satz 15a. Zwei Punkte auf zwei achsig-symmetrischen Geraden, welche von deren Schnittpunkt beiderseits gleiche Abstände haben, sind achsig-symmetrisch, haben also auch auf ihrer Achsensenkrechten entgegengesetzt gleiche Abstände von der Achse nnd sind Scheitel gleicher Winkel zwischen der Achsensenkrechten und den ursprünglichen Geraden.

Figur 17.



Figur 18.



Frage 32. Wie kann man sich nach den beiden in Antwort auf Frage 30 und 31 durchgeführten Betrachtungsweisen zwei achsig-symmetrische Figuren entstanden denken?

Erkl. 45. Sind die ursprünglichen Gebilde nach einer der beiden Arten entstanden, welche

Antwort. Auf Grund der Durchführungen der vorigen Antwort kann man sich achsig-symmetrische Figuren auf doppelte Weise entstanden denken:

in den Antworten der Fragen 4 bis 6 angegeben sind, so entsteht auch das achsig-symmetrische Gebilde auf dieselbe Weise, indem Punkten Punkte entsprechen und der Verbindungslinie der Punkte die Verbindungslinie der symmetrischen Punkte, Winkeln zweier Verbindungslinien die Winkel der symmetrisch entsprechenden Verbindungslinien u. s. w.

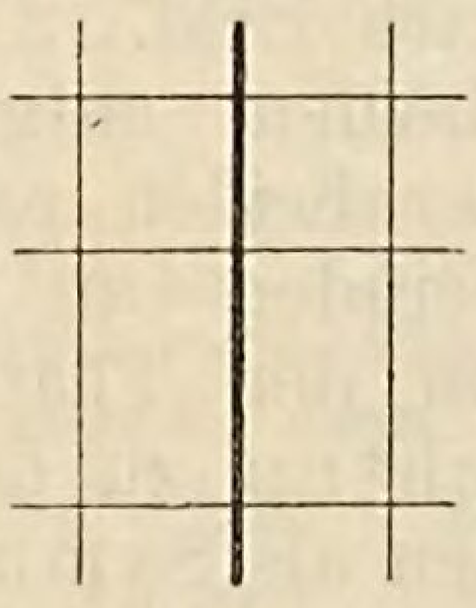
1) Man kann sich die Figuren entstanden denken durch eine Anzahl achsig-symmetrischer Punkte (als „Punktgebilde“) und erhält alsdann symmetrische Geraden durch die nach den Sätzen 14 bis 15 gleichfalls symmetrischen Verbindungsgeraden der vorhandenen symmetrischen Punkte.

2) Man kann sich die Figuren entstanden denken durch eine Anzahl achsig-symmetrischer Geraden (als „Liniengebilde“) und erhält alsdann symmetrische Punkte durch die nach den Sätzen 14 bis 15 gleichfalls symmetrischen Schnittpunkte der vorhandenen symmetrischen Geraden.

Frage 33. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Sätzen 14 bis 15 für den besonderen Fall, dass die durch einen von zwei achsig-symmetrischen Punkten gezogene Gerade mit der Symmetrieachse parallel läuft?

Erkl. 46. Nach Lehrsatz 25 des zweiten Teiles sind drei gerade Linien sämtlich parallel, wenn eine von ihnen zu zwei andern parallel ist; nach Lehrsatz 31 des zweiten Teiles ist eine Linie, welche auf einer von zwei Parallelen senkrecht ist, auch auf der andern senkrecht.

Figur 19.



Antwort. Geht eine Gerade mit der Achse parallel, so ist der Achsenschnittpunkt der unendlich ferne Punkt der Achse. Da die zur ursprünglichen Geraden achsig-symmetrische Gerade nach Satz 12 durch denselben Achsenpunkt gehen muss, so ist dieselbe ebenfalls zur Achse parallel. Demnach sind wegen der Lehrsätze 28 und 31 des zweiten Teiles beide symmetrischen Geraden mit der Achse und unter sich parallel und alle Achsensenkrechten sind senkrecht auf jeder der beiden symmetrischen Geraden und ergeben symmetrische Strecken als Abstände der Schnittpunkte jeder Achsensenkrechten mit der Achse und den symmetrischen Geraden selbst. Der Winkel der beiden symmetrischen Geraden, welche parallel sind, ist $= 0^0$, die Symmetrieachse als Halbierungslinie dieses Winkels bildet ebenfalls einen Winkel von 0^0 mit jeder der beiden Geraden.

Frage 34. Wie lassen sich die Ergebnisse der vorigen Antwort in Sätzen zusammenfassen?

Antwort. In Rücksicht des in voriger Antwort Gesagten kann man folgende Behauptungen aufstellen:

Satz 16. Ist eine Gerade zur Symmetrieachse parallel, so ist ihre achsig-symmetrische Gerade ebenfalls parallel.

Satz 16 a. Sind zwei Gerade parallel, so ist ihre Symmetrieachse ebenfalls parallel und halbiert sämtliche Strecken, welche auf den beiden Geraden senkrecht sind.

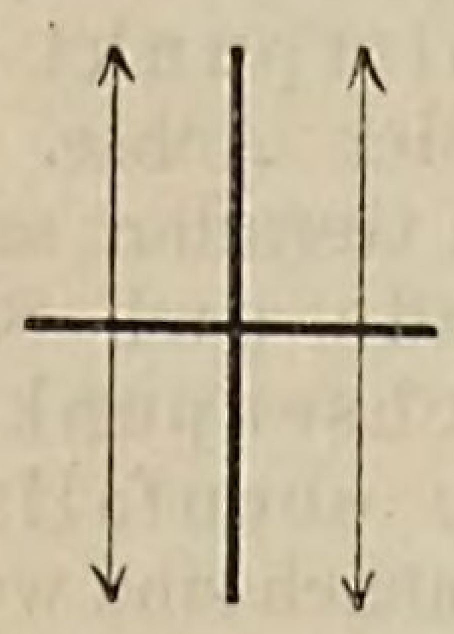
Erkl. 47. Eine Gerade, welche zu zwei andern parallel ist und eine, also nach Satz 16 sämtliche auf den beiden Geraden senkrechten Strecken halbiert, heisst „Mittelparallele" der beiden Geraden.

Oder nach Erkl. 47:

Satz 16 b. Die Symmetrieachse zu zwei parallelen Geraden ist ihre Mittelparallele.

Frage 35. Was wird bei zwei parallelen symmetrischen Geraden aus der zweiten Symmetrieachse, welche nach Satz 13 a für zwei beliebige Geraden vorhanden sein sollte?

Figur 20.



Erkl. 48. Dass die beiden parallelen Geraden bei der Umwendung um eine senkrechte Gerade nicht ihren Platz je mit der andern Geraden vertauschen, sondern nur die Lage ihrer Strahlen mit derjenigen ihrer eigenen Verlängerungen vertauschen, entspricht dem Vorgange beim Umwenden zweier beliebigen sich schneidenden Geraden um die beiden Halbierungslinien ihrer Nebenwinkel. Dabei vertauscht nämlich ein Strahl seinen Platz einmal mit dem einen Strahl der andern Geraden, das andere Mal mit dessen Verlängerung. Eine Ortsveränderung paralleler Geraden, bei welcher die eine ihren Platz vertauscht mit der entgegengesetzt parallelen Richtung des andern Strahls, wird im nächsten Abschnitt von der Umdrehung betrachtet werden (vergleiche Antwort der Frage 37).

Antwort. Nach Satz 13 a und Erkl. 43 müsste die zweite Symmetrieachse zweier Parallelen den Nebenwinkel derselben halbieren und auf der ersten Symmetrieachse senkrecht stehen im Schnittpunkt der beiden Geraden. Zur ersten Symmetrieachse, nämlich nach Satz 16 zur Mittelparallelen der parallelen symmetrischen Geraden, ist nun aber senkrecht jegliche Achsensenkrechte. Der Schnittpunkt der parallelen Geraden aber ist unendlich fern, und da ihr Winkel 0^0 beträgt, so ist ihr Nebenwinkel gleich 180^0 zu setzen. Einen Winkel von 180^0 bilden aber nach Erkl. 121 des zweiten Teiles die beiden entgegengesetzten Richtungen der beiden parallelen symmetrischen Geraden an jeder Stelle. Wählt man in der That irgend eine der Senkrechten zu den beiden parallelen Geraden als Symmetrieachse, so bilden die beiden Geraden umgekehrt selber Achsensenkrechte derselben, sind also nach Satz 7 jede zu sich selbst symmetrisch. Es bilden also die beiden parallelen Geraden nach dem Umklappen um irgend eine der Senkrechten wieder dieselbe Figur wie zuvor, und es kommt dabei zur Deckung, nicht wie bei dem Umklappen um die Mittelparallele, die eine Parallele mit der andern, sondern jede mit sich

selber. An Stelle der zweiten Symmetrieachse zweier beliebigen Geraden erhält man also eine unbegrenzte Anzahl solcher und kann die Behauptung aufstellen:

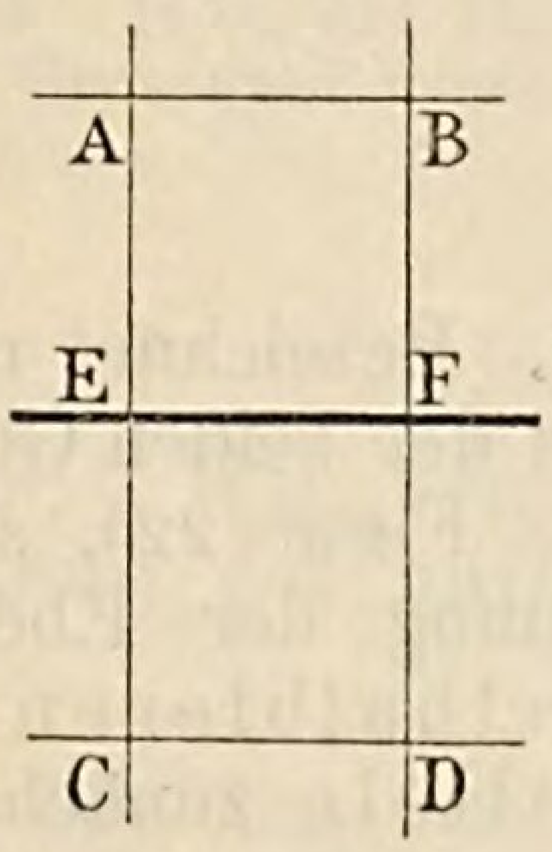
Satz 17. Zwei beliebige parallelen Geraden bilden eine symmetrische Figur zu jeglicher zu beiden senkrechten Geraden als Symmetrieachse.

Frage 36. Was geschieht mit den übrigen zu zwei parallelen Geraden senkrechten Strecken, wenn um eine dieser letztern als Symmetrieachse umgeklappt wird?

Antwort. Wenn um eine zu zwei parallelen Geraden senkrechte Linie umgeklappt wird, so sind alle übrigen zu beiden Geraden senkrechten Strecken unter sich und zur Symmetrieachse parallel. Also kommen bei der Umwendung je solche zwei dieser Strecken zur Deckung, für welche die als Achse gewählte die Mittelparallele ist. Und umgekehrt kann man je zwei beliebige der zu zwei parallelen Geraden senkrechten Strecken zur Deckung bringen, indem man diejenige unter den übrigen als Symmetrieachse wählt, welche die Mittelparallele der beiden gewählten ist. Wenn aber je zwei beliebige dieser Strecken zur Deckung gebracht werden können, so müssen auch je zwei beliebige, also sämtliche dieser Strecken unter sich gleich sein; und man kann die Aussage machen:

Satz 18. Alle senkrechten Strecken zwischen zwei parallelen Geraden sind gleich lang.

Figur 21.



Erkl. 49. Man kann den Beweis für den nebenstehend bewiesenen Satz auch in folgender Weise direkt führen (siehe Figur 21):

Voraussetzg. $AC \parallel BD$

$CA \perp AB \perp BD$

$BD \perp DC \perp CA$

Behauptung. $AB = CD$

Beweis. Zum Beweise suche man die Mittelparallele zu AB und CD und klappe um diese die Figur um. Nach Satz 16 und früheren ist dann:

$AE = EC$ und $\perp EF$,

sowie: $BF = DF$ und $\perp EF$

Also sind nach Satz 8 die Punkte A und C, sowie B und D symmetrische Punkte zur Achse EF. Fallen aber beim Umklappen die Punkte A und B bezw. auf die Punkte C und D, so muss auch die Verbindungsstrecke der Punkte AB auf die Verbindungsstrecke der Punkte CD fallen; folglich sind beide Verbindungsstrecken kongruent, also gleich.

Erkl. 50. Zwei Strecken, wie AB und CD, welche gleichzeitig parallel und gleichgross sind, werden oft dadurch bezeichnet, dass das Schriftzeichen für Parallelität und

Gleichheit zusammengefasst wird, nämlich in die Gestalt $\#$. Man schreibt also:

$$AB \# CD$$

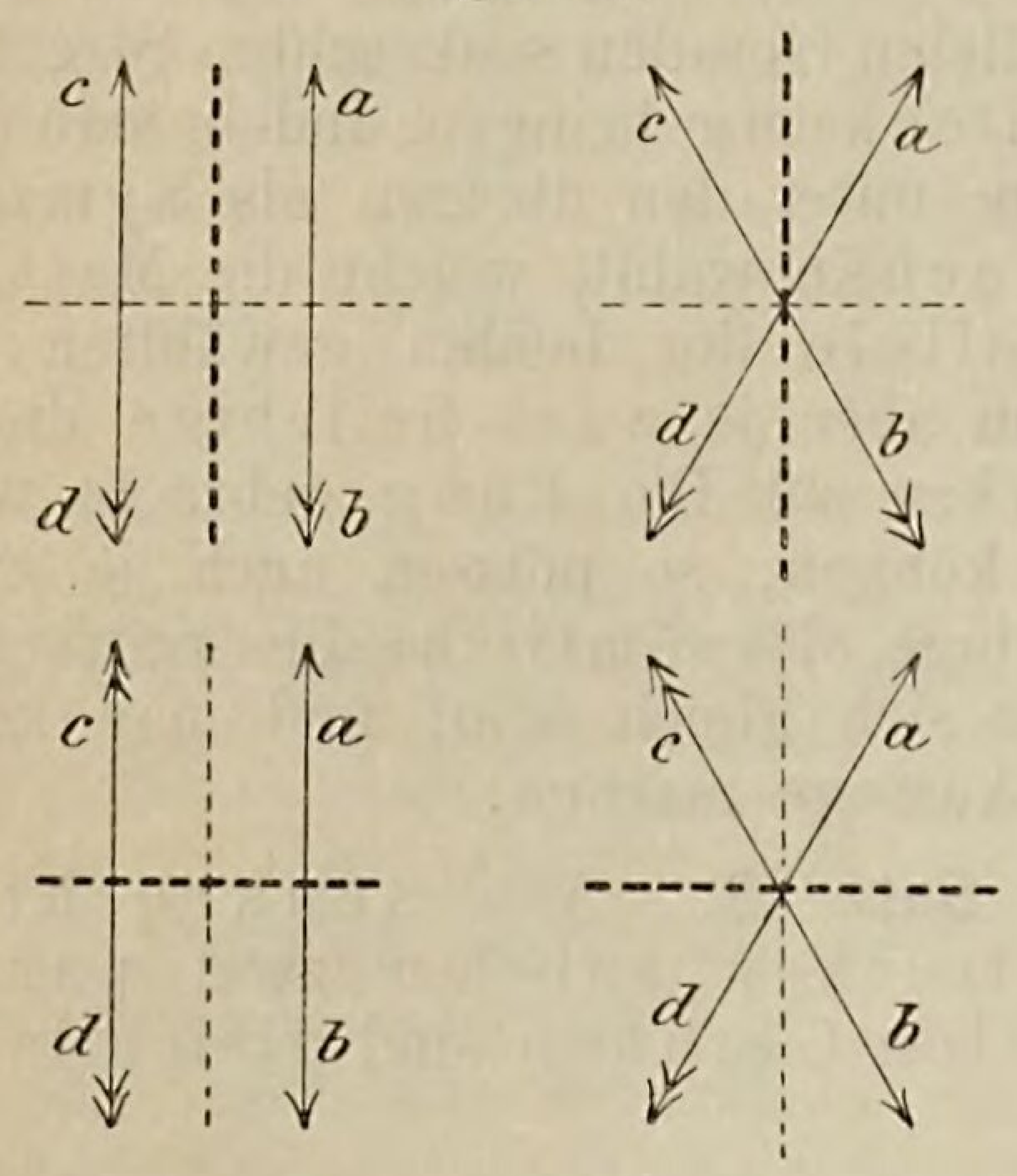
und liest dasselbe:

„*AB* parallel und gleich *CD*.“

Erkl. 51. Satz 18 ist ein Ergebnis der Betrachtungen über die Umwendung von Figuren, zu welchen auch die im folgenden Abschnitt zu behandelnde Betrachtung der Umdrehung von Figuren führt, und zwar in der durch Satz 32 ausgesprochenen erweiterten Form. Ihre Hauptanwendung finden diese Sätze bei der Lehre von den Vierecken und von den „besondern Vierecken“ (siehe den Abschnitt C 2 dieses Teiles].

Frage 37. Welche Ortsveränderung erfahren zwei beliebige und insbesondere zwei parallele Geraden, wenn dieselben zweimal nacheinander umgeklappt werden: erst um ihre eine, dann ihre andere Symmetrieachse; bezw. die parallelen Geraden erst um ihre Mittelparallele und dann noch um eine der hiezu senkrechten Geraden?

Figur 22.



Erkl. 52. Dass durch eine einzelne Umklappung einer Figur nicht diejenige Lage erreicht werden kann, welche aus einer zweimaligen Umwendung hervorgeht, erkennt man unter Berücksichtigung des Satzes 4. Nach diesem sind nämlich solche geometrische Gebilde, welche in Bezug auf eine Achse symmetrisch sind, ungleichwendig kongruent. Durch zweimaliges Umklappen werden also die Gebilde wieder gleichwendig kongruent, sie können aber diese Eigenschaft nach einmaliger Umklappung nie beibehalten.

Antwort. Bezeichnet man die vier Richtungen der beiden Geraden mit *a*, *b*, *c*, *d* (siehe Figur 22), so kommt bei der Umwendung der Ebene um ihre eine Winkelhalbierende bezw. die Mittelparallele zunächst:

Richtung *a* auf die Stelle von *c*
„ *b* „ „ „ „ *d*
„ *c* „ „ „ „ *a*
„ *d* „ „ „ „ *b*

Folgt alsdann die zweite Umwendung der Ebene um die Senkrechte zur vorigen Achse, so kommt das, was umgetauscht ist mit der ursprünglichen

Richtung *a*, auf die Stelle der ursprünglichen *b*,
„ *b*, „ „ „ „ „ *a*,
„ *c*, „ „ „ „ „ *d*,
„ *d*, „ „ „ „ „ *c*.

Berücksichtigt man also die schon in der ersten Umdrehung entstandene Ortsveränderung, so ergibt sich für die

ursprüngl. Richtung *a* die endgültige Lage *d*,
„ „ *b* „ „ „ *c*,
„ „ *c* „ „ „ *b*,
„ „ *d* „ „ „ *a*.

Während also bei jeder einzelnen Umwendung die beiden Richtungen *a* und *c* oder *b* und *d* die gleichgerichtet parallele Richtung beibehalten haben, hat durch die wiederholte Umklap-

pung jede Richtung eine entgegengesetzt parallele Lage angenommen.

Diese neue Lage lässt sich nicht erreichen durch eine einzelne Umklappung um irgend eine in derselben Ebene gelegene Symmetrieachse, sondern wird als einmalige Ortsveränderung erreicht durch die sogenannte „halbe Umdrehung“.

3) Ueber die Umdrehung um einen Punkt. Zentrische Symmetrie.

Frage 38. Was versteht man unter Umdrehung?

Erkl. 53. Die Drehungsgrösse, um deren Betrag die Ebene gedreht wird, ist nach nebenstehender Antwort im allgemeinen eine beliebige. Würde sie auf 360⁰ weitergeführt, so käme jeder Ebenenteil wieder an seinen ursprünglichen Ort.

Antwort. Unter Umdrehung versteht man diejenige Lageveränderung einer Ebene, bei welcher diese um einen in ihr liegenden Punkt herumgedreht wird. Derjenige Punkt, um welchen die Drehung stattfindet, heisst „Umdrehungsmittelpunkt“ oder Zentrum.

Frage 39. Was versteht man im besondern unter der halben Umdrehung?

Erkl. 54. Man kann sich die Umdrehung auf zweierlei Art ausgeführt denken. Es kann nämlich entweder die ganze Ebene um das Symmetriezentrum herumgedreht werden: und dann gelangt die eine Halbebene in diejenige Lage, welche zuvor von der andern eingenommen wurde, während diese andere selbst in jene Lage übergeführt wird, welche zuvor von der ersten Halbebene eingenommen wurde. Dabei haben also beide Halbebenen ihre Lagen wirklich vollständig vertauscht. Es kann aber auch nur eine Hälfte der Ebene, nur die eine Halbebene, um das Symmetriezentrum gedreht werden: und dann gelangt diese eine Halbebene in diejenige Lage, welche vorher und nachher von der andern eingenommen wird, ohne dass diese zweite Halbebene ihren Ort verlässt. Dabei kommt die erste Halbebene zur Deckung mit der zweiten.

Erkl. 55. Um den Gegensatz zwischen der im vorigen Kapitel betrachteten achsigen Symmetrie und der nebenstehend erklärten zentrischen Symmetrie hervorzuheben, bezeichnet man jene eben als die achsige Symmetrie und ihre entsprechenden Figuren als achsig-symmetrische Figuren zu einer Symmetrieachse, die nunmehr zu betrachtende dagegen als zentrische Symmetrie in Bezug auf ein Symmetriezentrum.

Antwort. Unter der halben Umdrehung versteht man diejenige Lageveränderung einer Ebene, bei welcher diese um einen in ihr liegenden Punkt eine halbe Umdrehung, d. h. eine Umdrehung um 180⁰ beschreibt, so dass ihre eine Hälfte auf die andere kommt, oder dass die eine Halbebene mit der andern zur Deckung gelangt, oder dass die beiden Halbebenen gegenseitig ihre Lage vertauschen.

Die beiden Lagen, welche eine in der Ebene enthaltene Figur vor und nach der Umdrehung einnimmt, heissen zentrisch-symmetrisch; die Figuren heissen mit einander symmetrisch zu dem Umdrehungsmittelpunkt als Symmetriezentrum.

Frage 40. Bei welchen Betrachtungen der beiden ersten Teile dieses Lehrbuches wurde bereits Anwendung gemacht von der Umdrehung einer Figur um einen Punkt?

Antwort. Von der Umdrehung einer Figur um einen in ihrer Ebene liegenden Punkt wurde Gebrauch gemacht:

1) In der Antwort auf die Frage 51 des ersten Teiles, in welcher die Kreislinie erzeugt wurde durch Umdrehung einer Strecke um den einen ihrer Endpunkte: als Weg oder Bahn des andern Endpunktes.

2) In der Antwort auf die Frage 3 und in Erkl. 11 des zweiten Teiles, woselbst der Winkel erzeugt wurde durch Umdrehung eines Strahles um seinen Anfangspunkt: als der von diesem Strahl überstrichene Flächenteil.

3) In den Antworten auf die Fragen 35 bis 37 des zweiten Teiles, woselbst die Summe der Aussenwinkel eines Vielecks gleich dem Betrage einer ganzen Umdrehung oder gleich 360^0 gefunden wurde.

Erkl. 56. In Antwort auf Frage 51 des ersten Teiles besagt der dritte Absatz:

„Wenn sich eine in einer Ebene befindliche Strecke so bewegt, dass einer ihrer Endpunkte die ihm einmal gegebene Lage unverändert beibehält, und die Strecke selbst bei einer gedachten Bewegung stets in der Ebene bleibt, so legt der andere Endpunkt (bezw. jeder gedachte einzelne Punkt der Strecke) bei dieser Bewegung einen Weg zurück, welcher eine kreisförmige Raumlinie ist.“

Erkl. 57. Denkt man sich einen Strahl um seinen Anfangspunkt gedreht, so erfüllt die Gesamtheit seiner Lagen nach Erkl. 11 des zweiten Teiles einen Winkel.

Frage 41. Was versteht man unter zentrischer Symmetrie?

Antwort. Unter zentrischer Symmetrie zweier ebenen Figuren versteht man nach dem Vorhergehenden diejenige Lagenbeziehung zweier Figuren, bei welcher

entweder durch eine halbe Umdrehung der sie enthaltenden ganzen Ebene um einen in ihr liegenden Punkt als Symmetriezentrum die beiden Figuren gegenseitig ihre Lage vertauschen,

oder bei welcher durch eine halbe Umdrehung eines die eine Figur enthaltenden Ebenenteiles um das Symmetriezentrum die beiden Figuren zur Deckung kommen.

Eine Figur, deren Punkte und Gerade durch eine halbe Umdrehung um einen Punkt nur wieder auf Punkte und Gerade derselben Figur zu liegen kommen, heisst auch kurz selbst zentrisch-symmetrisch zu diesem Punkte als Symmetriezentrum.

Erkl. 58. Der die eine Figur enthaltende Ebenenteil kann, wenn das Symmetriezentrum innerhalb der Figur selbst liegt, auch das Symmetriezentrum selbst enthalten. Liegt das Symmetriezentrum aber ganz ausserhalb der Figur, so ist am besten die eine Halbebene als der umzudrehende Ebenenteil zu wählen (vergl. Erkl. 27 a).

Frage 42. An welchen Gegenständen des täglichen Lebens kann man sich eine Vorstellung der zentrischen Symmetrie verschaffen?

Erkl. 59. Ausser der in nebenstehend aufgezählten Beispielen erkennbaren zentrischen Symmetrie in der Ebene gibt es auch eine „zentrische Symmetrie im Raume," welche auftritt bei nicht flachen runden Gegenständen, wie einer Kugel, einem Ofen, einer Lampe, Säule, Baumstamm, dem Leibesbau eines Wurmes, Seeigels u. a. Man sehe über dieselbe insbesondere den über Rotationsflächen handelnden Abschnitt in Seipp, „Lehrbuch der Stereometrie."

Antwort. Gegenstände des täglichen Lebens, aus deren Betrachtung man sich eine Vorstellung der zentrischen Symmetrie verschaffen kann, sind unter andern die folgenden:

Die Umrandung eines flachen runden Gegenstandes, wie einer Münze, eines Gefässes, einer Scheibe;

Die Rahmen runder Bilder, Spiegel;

Die Anordnung mehrerer um einen Mittelgegenstand herum aufgestellten Dinge, wie Blumen eines Beetes, Ziffern eines Zifferblattes, Spaichen eines Rades, Verzierungen eines gemalten Tellers oder einer runden Decke oder eines runden Teppichs;

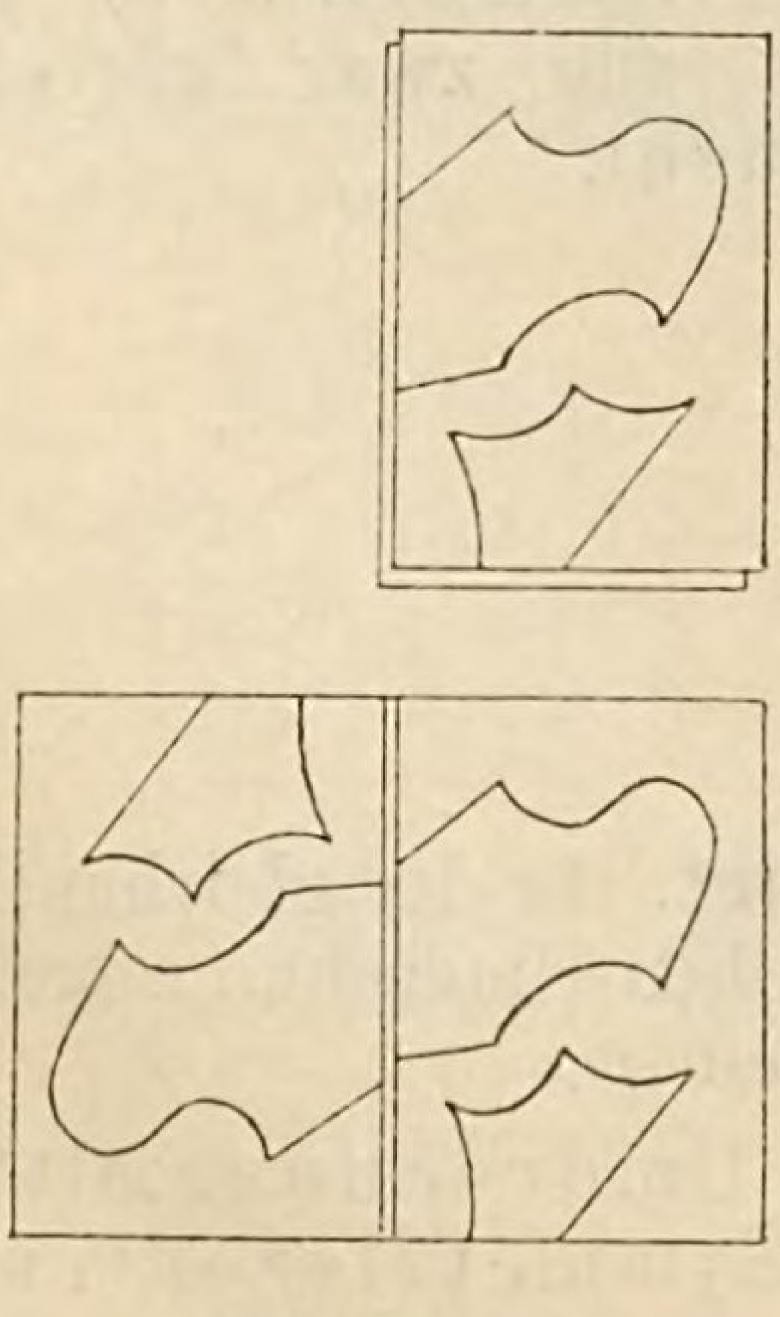
Die Blütenformen vieler Pflanzen;

Die beiden Hälften der Doppelbilder bei Spielkarten (z. B. „König", „Dame", „Bube" bei „französischen Karten"). U. v. a. m.

Frage 43. Auf welche Weise kann man sich beliebige zentrisch-symmetrische Figuren herstellen?

Erkl. 60. Um zu einer gegebenen Figur eine zentrisch-symmetrische Figur in direkter Nachahmung ihrer Definitionsweise zu erhalten, kann man diese gegebene Figur durchpausen oder durchstechen, dann das obere oder untere Blatt um 180° umdrehen und nochmals durchpausen oder durchstechen. Dann sind die auf dem gleichen Blatte entstehenden zwei Figuren zentrisch-symmetrisch.

Figur 23.



Antwort. Um sich beliebige zentrisch-symmetrische Figuren herzustellen, kann man entweder so verfahren, wie in den Antworten auf die Fragen 39 und 41 über die Entstehung zentrisch-symmetrischer Figuren angegeben wurde; oder man benutzt die Antwort auf Frage 37 und Erkl. 52 und verfährt folgendermassen:

Man schneide aus einem (um eine Kante umgeklappten, wie in Antwort auf Frage 20, oder einfach lose aufeinander gelegten) Doppelblatt Papier beliebige Figuren aus, drehe alsdann (ohne auseinander zu falten) das eine der beiden Blätter um 180° um und lege dasselbe neben das andere. Am leichtesten erreicht man diese Umdrehung dadurch, dass man eine Randlinie des einen Blattes wieder an dieselbe Randlinie des andern Blattes genau anlegt, an welcher sie vor dem Umdrehen, also während des Ausschneidens, angelegt gewesen war.

Unter Benutzung der Antworten auf die Fragen 17 und 37 kann man zen-

trisch-symmetrische Figuren auch herstellen, indem man eine gezeichnet vorliegende Figur, so lange sie noch feucht ist, zweimal abklatscht auf ein und dasselbe Blatt Papier: erst in ursprünglicher Lage, und dann nachdem das eine oder das andere Blatt um 180° herumgedreht worden.

Die beiden so entstandenen Figuren sind zentrisch-symmetrisch, denn sie besitzen die Eigenschaft, dass sie durch Umdrehung um 180° um einen in ihrer Ebene liegenden Punkt zur Deckung gelangen. Die aus beiden neben einander gelegten Figuren zusammen gebildete Gesamtfigur ist nach Antwort auf Frage 41 selbst eine zum Umdrehungspunkt als Symmetriezentrum symmetrische Figur.

Erkl. 61. Setzt man in nebenstehendem Verfahren an Stelle des Abklatschens das Durchpausen oder Durchstechen, so entsteht genau der in Erkl. 60 beschriebene Vorgang. Nur ist dort zu einer gegebenen Figur eine symmetrische hergestellt, hier von einer gegebenen Figur zwei symmetrische Abbildungen.

Frage 44. Welche Aussagen über zentrisch-symmetrische Figuren kann man machen auf Grund der aus dem Bisherigen hervorgehenden Vorstellungen über die zentrische Symmetrie?

Antwort. Auf Grund der Antworten auf die Fragen 38 bis 43 kann man über zentrisch-symmetrische Figuren folgendes aussagen:

Satz 19. Zu einem geometrischen Gebilde (Punkt, Gerade, Strecke, Winkel, Kreis, Vieleck u. s. w.) gibt es zu einem gegebenen Symmetriezentrum nur ein einziges symmetrisches Gebilde.

Satz 20. Zentrisch-symmetrische Gebilde (Strecken, Winkel, Kreise, Vielecke u. s. w.) sind kongruent und zwar gleichwendig kongruent.

Erkl. 62. Die allgemeine Richtigkeit der in Satz 19 ausgesprochenen Behauptung folgt unmittelbar aus der Anschauung, dass ein geometrisches Grundgebilde (Punkt und Gerade) beim Umdrehen um 180° jedesmal nur mit einem und demselben Punkt oder mit einer und derselben Geraden zur Deckung kommt.

Erkl. 63. Der Beweis für die Richtigkeit des Satzes 20 liegt in der Definition der Kongruenz, wonach solche Figuren kongruent heissen, welche durch irgend eine Ortsveränderung, also hier durch die Umdrehung, zur Deckung gelangen können. Dass die Kongruenz zentrisch-symmetrischer Figuren eine gleichwendige ist, zeigt wieder die Anschauung selbst, besonders unter Berücksichtigung des in Antwort auf Frage 37 und Erkl. 52 Gesagten.

Frage 45. Welche Punkte oder Geraden gelangen nach der halben Umdrehung wieder in dieselbe Lage, welche sie zuvor eingenommen?

Antwort. In der gleichen Lage, wie vor der halben Umdrehung, befinden sich nach derselben:

1) der Umdrehungsmittelpunkt oder das Symmetriezentrum selbst,

Erkl. 64. Von solchen Punkten oder Geraden, welche nach der Umdrehung dieselbe Lage einnehmen wie zuvor, sagt man, sie seien

sich selbst entsprechend, oder sie entsprechen sich selbst zentrisch-symmetrisch.

Erkl. 65. Eine gerade Linie, welche durch das Zentrum geht, heisst eine Zentrale; und zwar gilt dies sowohl in der Lehre von der zentrischen Symmetrie, als auch in der Lehre vom Kreise, oder von der Kugel, oder wo sonst ein Mittelpunkt einer Figur in Betracht kommt.

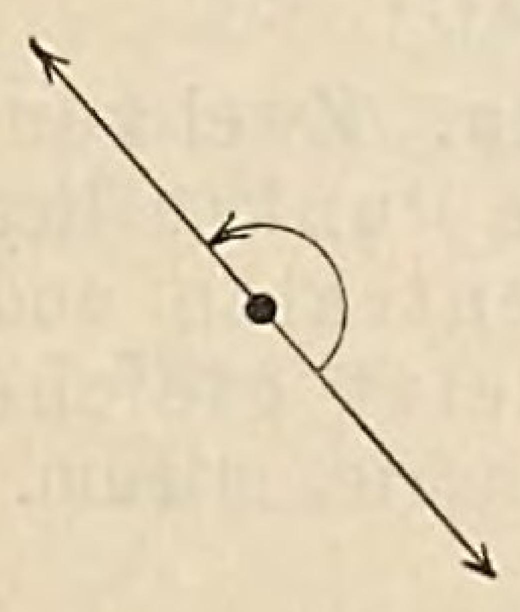
Erkl. 66. Die beiden Strahlen, in welche eine Zentrale durch das Symmetriezentrum geteilt wird, vertauschen bei der halben Umdrehung ihre Lage. Daher ist ein jeder dieser Strahlen einzeln zu seiner Verlängerung zentrisch-symmetrisch, aber die Zentrale als ganze Linie zu sich selbst.

welcher bei der Umdrehung seine Stelle gar nicht verlässt;

2) die durch den Umdrehungsmittelpunkt oder das Symmetriezentrum gehenden Geraden, die sog. Zentralen. Denn ein vom Zentrum ausgehender Strahl fällt nach einer Umdrehung um 180° auf seine Verlängerung; daher fällt die Zentrale als ganze Gerade nach der Umdrehung in die gleiche Lage, wie zuvor, nur mit vertauschten Strahlen (siehe Fig. 24).

Frage 46. In welcher Weisse lässt sich das Ergebnis der vorigen Antwort zusammenfassen?

Figur 24.



Antwort. Auf Grund der Antwort auf die Frage 45 und der Erkl. 64 kann man aussagen:

Satz 21. Das Symmetriezentrum entspricht sich selbst zentrisch-symmetrisch.

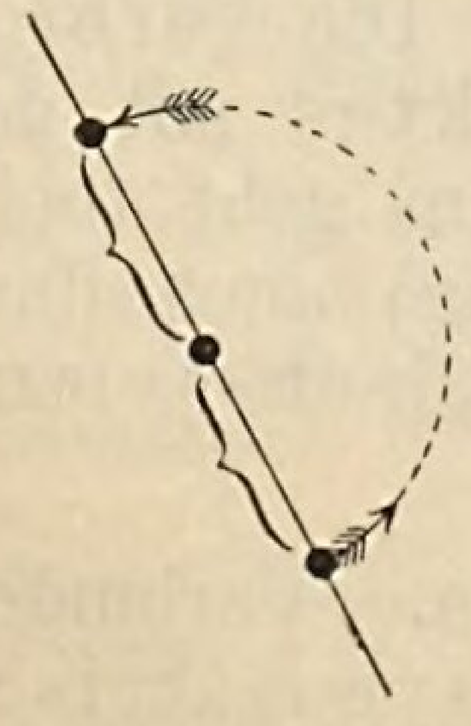
Satz 22. Jede Zentrale entspricht sich selbst zentrisch-symmetrisch.

Satz 21a. Kein Punkt ausserhalb des Symmetriezentrums kann sich selbst entsprechen.

Satz 22a. Keine gerade Linie, die nicht durch das Symmetriezentrum geht, kann sich selbst entsprechen.

Frage 47. Welche Beziehungen bestehen zwischen der Lage eines Punktes ausserhalb des Symmetriezentrums und seines zentrisch-symmetrischen Punktes?

Figur 25.



Antwort. Um die Beziehungen zwischen der Lage zweier beliebigen zentrisch-symmetrischen Punkte derselben Ebene zu finden, denke man sich durch den einen derselben die Zentrale gezeichnet. Alsdann muss nach Antwort auf Frage 45 und Satz 22 der symmetrische Punkt auf der Verlängerung derselben Zentralen liegen. Und zwar muss die Strecke zwischen dem Zentrum und dem zweiten Punkte beim Umdrehen gleichlang werden, wie dieselbe Strecke zwischen dem Symmetrie-

Erkl. 67. Da es durch zwei Punkte nur eine einzige Verbindungslinie gibt, so sagt man ausdrücklich „die Zentrale", statt allgemein „eine Zentrale" durch einen gegebenen Punkt.

zentrum und dem ersten, zum ebengenannten Punkte symmetrischen Punkte. Der Umdrehungsmittelpunkt ist also Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der beiden zentrisch-symmetrischen Punkte, und diese Verbindungslinie selbst ist eben die Zentrale.

Frage 48. Welche Aussagen über die Beziehungen zweier zentrisch-symmetrischen Punkte zum Symmetriezentrum folgen aus der Antwort auf die vorige Frage?

Antwort. Auf Grund der in Antwort auf Frage 47 angestellten Betrachtungen kann man folgende Aussagen machen:

Satz 23. Zwei Punkte auf derselben Zentralen, welche vom Symmetriezentrum entgegengesetzt gleichen Abstand haben, sind zentrisch-symmetrisch;

und umgekehrt:

Satz 23a. Zwei zentrisch-symmetrische Punkte liegen auf derselben Zentralen und haben entgegengesetzt gleichen Abstand vom Symmetriezentrum.

Oder:

Satz 23b. Die Verbindungsgerade zweier zentrisch-symmetrischen Punkte geht durch das Symmetriezentrum;

und umgekehrt:

Satz 23c. Das Symmetriezentrum halbiert die Verbindungsstrecke, oder ist Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zweier zentrisch-symmetrischen Punkte.

Oder:

Satz 24. Die Verbindungslinie eines Punktes mit dem Symmetriezentrum geht (bei genügender Verlängerung) auch durch den andern zentrisch-symmetrischen Punkt.

Satz 24a. Verbindet man zwei zentrisch-symmetrische Punkte mit dem Symmetriezentrum, so

Erkl. 68. Ebenso wie in Antwort auf Frage 25 für die achsige Symmetrie, sind auch hier für die zentrische Symmetrie die Beziehungen zwischen zwei entsprechenden Grundgebilden in den verschiedensten Fassungen zu vergegenwärtigen, welche bei den zahlreichen Anwendungen vorkommen können.

Erkl. 69. Die Beweise für die Richtigkeit der nebenstehend aufgestellten Behauptungen sind sämtlich schon in der Antwort auf Frage 47 enthalten. Doch kann auch jeder dieser Lehrsätze einzeln für sich bewiesen werden, wie z. B. für Satz 24a folgendermassen geschieht (s. Figur 26):

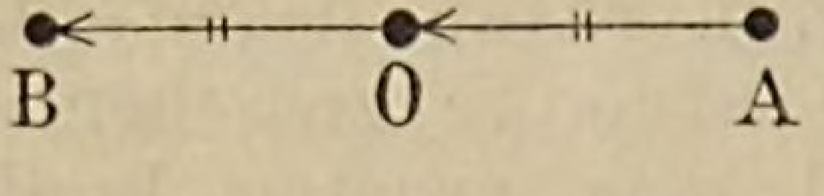
Voraussetzung. A und B seien zentrisch-symmetrische Punkte zum Symmetriezentrum O.

Behauptung. Linie AB geht durch O,

$$AO = BO$$

Beweis. Nach Satz 22 erhält man den zentrisch-symmetrischen Punkt zu A, indem man A mit O verbindet und auf der Verlängerung über O hinaus die gleichgrosse Strecke abträgt. Für den so entstandenen Punkt ist dann die Behauptung erfüllt. Da es aber nur einen zentrisch-symmetrischen Punkt zu A gibt, so muss derselbe Punkt B mit dem vorigen zusammenfallen, also dieselben Eigenschaften aufweisen.

Figur 26.



fallen diese Verbindungsstrecken in eine und dieselbe Gerade und bilden gleichlange Strecken zwischen dem Zentrum und den zentrisch-symmetrischen Punkten.

Frage 49. Welche Eigenschaften muss ein Punkt haben, damit er Symmetriezentrum zu zwei beliebigen Punkten sein kann?

Antwort. Aus Satz 23 folgt zunächst als Umkehrung:

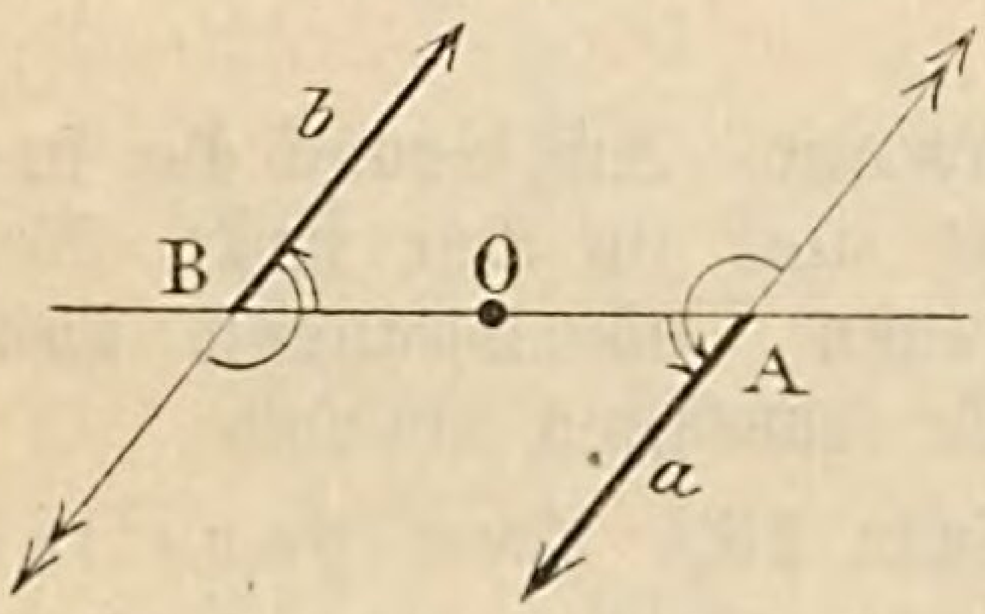
Satz 25. Zu zwei beliebigen Punkten ist der Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke Symmetriezentrum.

Da es nun zu einer Strecke nur einen Mittelpunkt gibt, so folgt ferner:

Satz 25a. Zu zwei beliebigen Punkten gibt es nur ein einziges Symmetriezentrum.

Frage 50. Welche Beziehungen bestehen zwischen der Lage einer Geraden und ihrer zentrisch-symmetrischen Geraden?

Figur 27.



Erkl. 70. Es ist zu beachten, dass die Zentrale c eine ganz beliebige ist, dass also der Winkel der Geraden a und c jede beliebige Grösse zwischen 0° und 180° annehmen kann. Wird insbesondere diejenige Zentrale gewählt, welche auf der Geraden a senkrecht steht, so entstehen im Punkte A und ebenso nach der Umdrehung im Punkte B vier rechte Winkel (siehe Figur 28), und die Geraden a und b werden parallel nach dem in Lehrsatz 31 des zweiten Teiles ausgesprochenen Spezialfall des Lehrsatzes 23.

Erkl. 71. Nach Lehrsatz 23 des zweiten Teiles sind zwei gerade Linien parallel, wenn eine sie schneidende Transversale mit beiden gleiche Winkel bildet.

Erkl. 72. Nach Lehrsatz 31 des zweiten Teiles sind alle auf einer und derselben Linie senkrechten Geraden unter sich parallel.

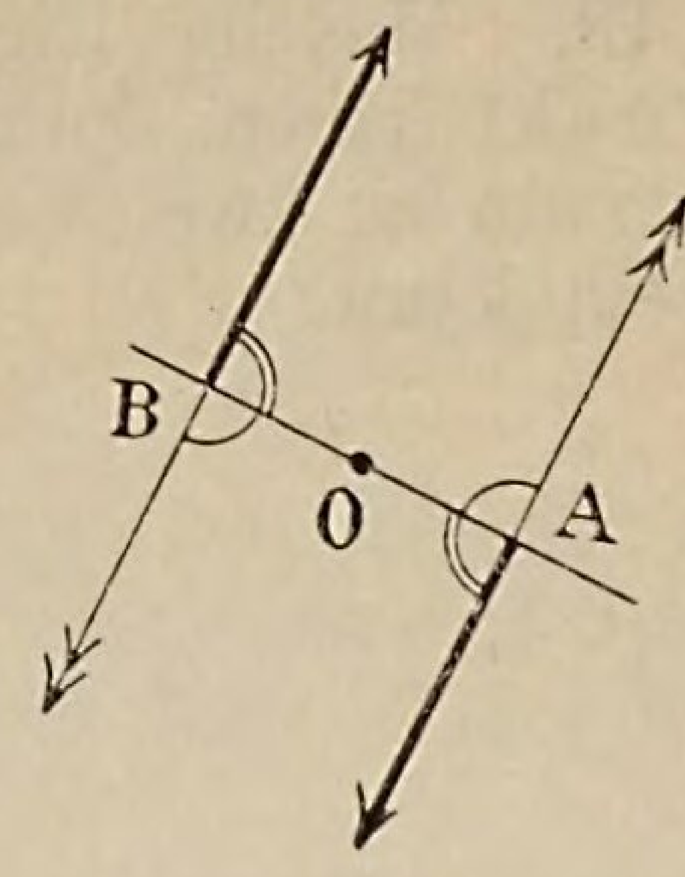
Antwort. Um die Beziehungen zwischen der Lage zweier beliebigen zentrisch-symmetrischen Geraden zu finden, denke man sich die eine derselben durch eine beliebige Zentrale geschnitten (s. Figur 27 und 28). Wird alsdann die aus der Geraden a und der Zentralen c gebildete Figur um 180° herumgedreht um den Punkt O, so fällt die Richtung der Zentralen c auf ihre Verlängerung, der Schnittpunkt A der Geraden a und c fällt nach Satz 23 auf denjenigen Punkt B der Verlängerung von c, welcher von O denselben Abstand hat: $OB = OA$, und der Winkel (c, a), welcher während der Umdrehung seine Grösse unverändert beibehält, erscheint wieder als gleichgrosser Winkel an der Verlängerung der Zentralen im Punkte B, nur auf der andern Seite der Zentralen, aber in gleichem Drehungssinne. Der $\sphericalangle (c, b)$ wird also Wechselwinkel des Winkels (c, a) und ist ihm gleich. Daher sind nach Lehrsatz 23 des zweiten Teiles dieses Lehrbuches die Geraden a und b parallel und sind zentrisch-symmetrisch in Bezug auf das Symmetrie-

Erkl. 73. Die Anschauung der Figuren 27 und 28 lehrt, dass von den zwei Winkeln, welche die Zentrale AB mit den Geraden a und b bildet, der spitze Winkel bei A (rechts unten) dem spitzen bei B (links oben) zentrisch-symmetrisch entspricht, dass ebenso der stumpfe Winkel bei A (rechts oben) dem stumpfen Winkel bei D (links unten) entspricht. Daher ist in Figur 28 auch hervorzuheben, dass je zwei solche der 8 rechten Wechselwinkel einander entsprechen, welche mit der auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AB gelegenen Schenkelrichtung in gleichem Drehungssinne beschrieben sind.

Erkl. 74. Wie man bei den Winkeln stets zwei innere oder äussere Wechselwinkel als entsprechende Winkel vorfindet, ebenso sind auch die Richtungen der beiden parallelen Geraden in der Weise einander entsprechend, wie dies durch die Pfeile in den Figuren 27 und 28 angegeben ist, dass nämlich nicht die gleichgerichtet parallelen Strahlen der beiden Geraden, sondern die entgegengesetzt parallelen Richtungen einander paarweise entsprechen. Man vergleiche hierzu, was über das Entsprechen der achsig-symmetrischen Parallelen gesagt ist in Erkl. 47 und 50 sowie in Antwort auf Frage 37.

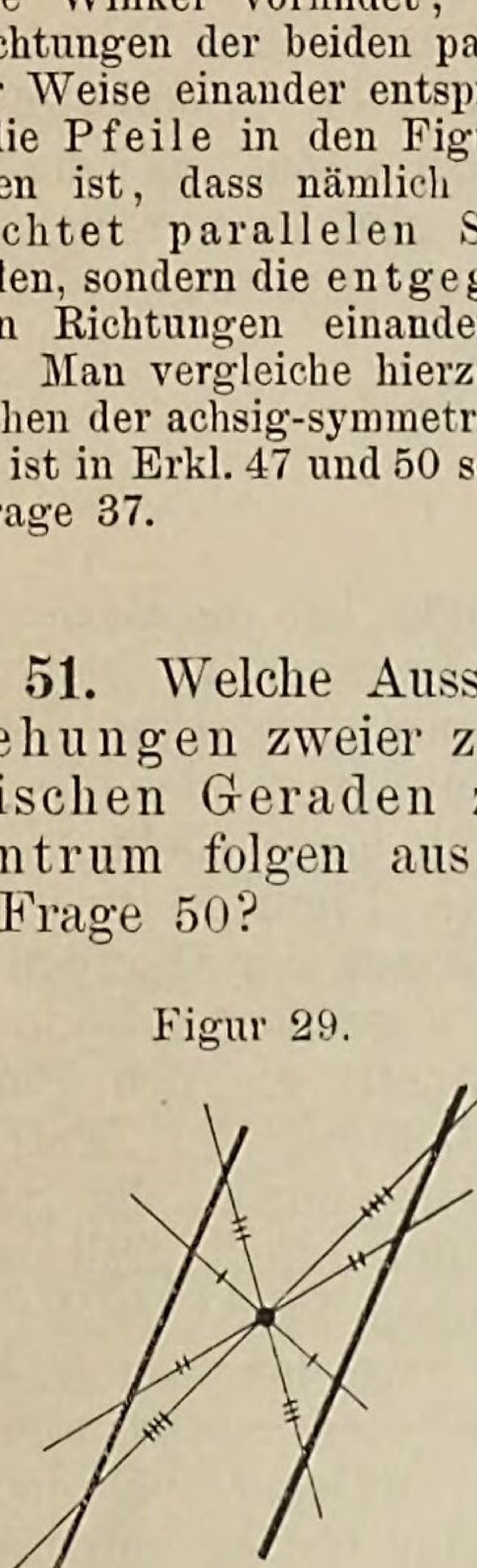
zentrum O, welches der Mittelpunkt der die beiden Geraden schneidenden Zentralen AB ist.

Figur 28.



Frage 51. Welche Aussagen über die Beziehungen zweier zentrisch-symmetrischen Geraden zum Symmetriezentrum folgen aus der Antwort auf Frage 50?

Figur 29.



Erkl. 75. Die Richtigkeit des Satzes 27 folgt aus den vorhergehenden Sätzen, wonach zentrisch-symmetrische Linien stets parallel sein müssen, also auch zwei Gerade durch Umdrehung um 180° nie in parallele Lage kommen können.

Erkl. 76. Zwei einander schneidende Gerade können zwar nicht durch Umdrehung um 180°, wohl aber durch eine solche um einen andern Winkel zur Deckung gebracht werden (siehe hierüber Frage 61 und Erkl. 96).

Antwort. Auf Grund der in voriger Antwort und in den Erkl. 70 bis 74 enthaltenen Ueberlegungen kann man folgende Aussagen machen:

Satz 26. Zwei parallele Geraden, welche eine Zentrale in entgegengesetzt gleichen Abständen vom Symmetriezentrum durchschneiden, sind zentrisch-symmetrisch.

Und umgekehrt:

Satz 26a. Zwei zentrisch-symmetrische Geraden sind parallel und schneiden jede Zentrale in entgegengesetzt gleichen Abständen vom Symmetriezentrum.

Oder:

Satz 26b. Das Symmetriezentrum halbiert sämtliche Strecken, welche durch dasselbe hindurchgehen und zwischen den beiden zentrisch-symmetrischen Geraden liegen.

Oder ferner:

Satz 27. Die zu einer gegebenen Geraden zentrisch-symmetrische Gerade ist zu ihr parallel und bildet gleich grosse Strecken auf jeder Geraden durch das Symmetriezentrum.

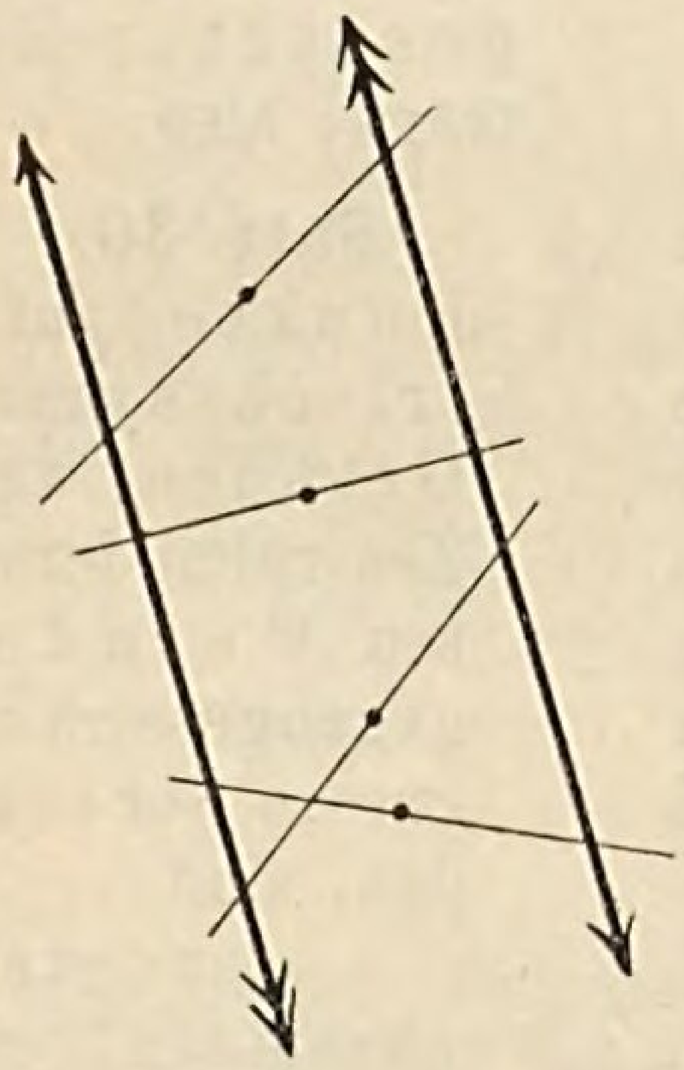
Und umgekehrt:

Satz 27 a. Zwei Gerade, die nicht parallel sind, also einander schneiden, können nicht zentrisch-symmetrisch sein, d. h. können nicht durch eine Umdrehung um 180° zur Deckung gebracht werden.

Satz 27b. Zwei parallele Geraden werden von jeder Zentralen in zentrisch-symmetrischen Punkten durchschnitten.

Frage 52. Welche Eigenschaften muss ein Punkt haben, damit er Symmetriezentrum zu zwei beliebigen parallelen Geraden sein kann?

Figur 30.



Erkl. 77. Man sollte erwarten, dass die Antworten der Fragen 50 bis 52 ebenso genau dualistisch gegenüberstehen sollten den Antworten auf die Fragen 47 bis 49, wie dies bezüglich derselben Fragen stattfindet. Das trifft aber bei der zentrischen Symmetrie noch weniger zu, als es bei der achsigen Symmetrie der Fall war, weil das Symmetriezentrum als Punkt zu einer Geraden nicht in dualistischen Beziehungen stehen kann, wie zu einem Punkt. Wohl aber lässt sich, wenn das Symmetriezentrum selbst nicht einbezogen wird, die Dualistik der zentrisch-symmetrischen Gebilde durchführen, wie dies an den folgenden Fragen und Antworten 53 und 54 zu erkennen sein wird.

Antwort. Damit ein Punkt als Symmetriezentrum für zwei gegebene parallelen Geraden gelten kann, muss derselbe nach Satz 26 der Mittelpunkt irgend einer Schnittlinie der beiden Geraden sein, denn wenn um einen solchen Punkt als Symmetriezentrum umgedreht wird, so kommen die beiden Geraden nach Satz 26 zur Deckung. Daher kann man aussagen:

Satz 28. Zu zwei parallelen Geraden gibt es beliebig viele Punkte, welche als Symmetriezentrum für dieselben betrachtet werden können.

Satz 28a. Für zwei parallele Geraden kann der Mittelpunkt einer jeden Transversalen als Symmetriezentrum betrachtet werden.

Da nach Satz 16 insbesondere die senkrechten Transversalen zweier Parallelen durch die Mittelparallele halbiert werden, so kann man auch sagen:

Satz 28b. Zwei Parallele können einander für jeden Punkt ihrer Mittelparallelen als Symmetriezentrum zentrisch-symmetrisch entsprechen.

Frage 53. Wie kann man finden, welche von den durch zwei zentrisch-symmetrische Punkte gehenden Geraden wieder entsprechend sind?

Frage 54. Wie kann man finden, welche von den auf zwei zentrisch-symmetrischen Geraden liegenden Punkten wieder entsprechend sind?

Erkl. 78. Die Wichtigkeit der nebenstehenden Sätze 29 und 30 geht hauptsächlich hervor aus deren Anwendung auf die Lehre vom Viereck, insbesondere auf das „Parallelogramm“, welche im letzten Abschnitt dieses Teiles enthalten ist.

Erkl. 79. Nach Antwort auf Frage 30 des ersten Teiles sind Wechselwinkel eben solche Winkel, welche von einer schneidenden Linie mit den entgegengesetzten Richtungen der geschnittenen Linien gebildet werden.

Erkl. 80. Da solche Linien, welche mit einer dritten gleiche Wechselwinkel bilden, nach Lehrsatz 23 des ersten Teiles parallel sind, so kann man den nebenstehenden Satz 29 auch folgendermassen aussprechen:

„Parallele Linien durch zentrisch-symmetrische Punkte sind zentrisch-symmetrisch.“

Antwort. Um zu finden, welche von den durch zwei zentrisch-symmetrische Punkte gehenden Geraden wieder zentrisch-symmetrisch sind, kann man auf folgende Weise verfahren:

Da eine Zentrale bei der Umdrehung ihre vorige Lage wieder einnimmt, und gleiche Wechselwinkel an symmetrischen Punkten zentrisch-symmetrisch sind, so müssen auch zentrisch-symmetrische Geraden entstehen, wenn man in zwei symmetrischen Punkten an der Zentralen derselben gleiche Wechselwinkel anträgt; also:

Satz 29. Irgend zwei Gerade durch zwei zentrisch-symmetrische Punkte, welche mit der Zentralen derselben in diesen Punkten nach entgegengesetzten Seiten gleich grosse Winkel bilden, sind

zentrisch-symmetrische Gerade.

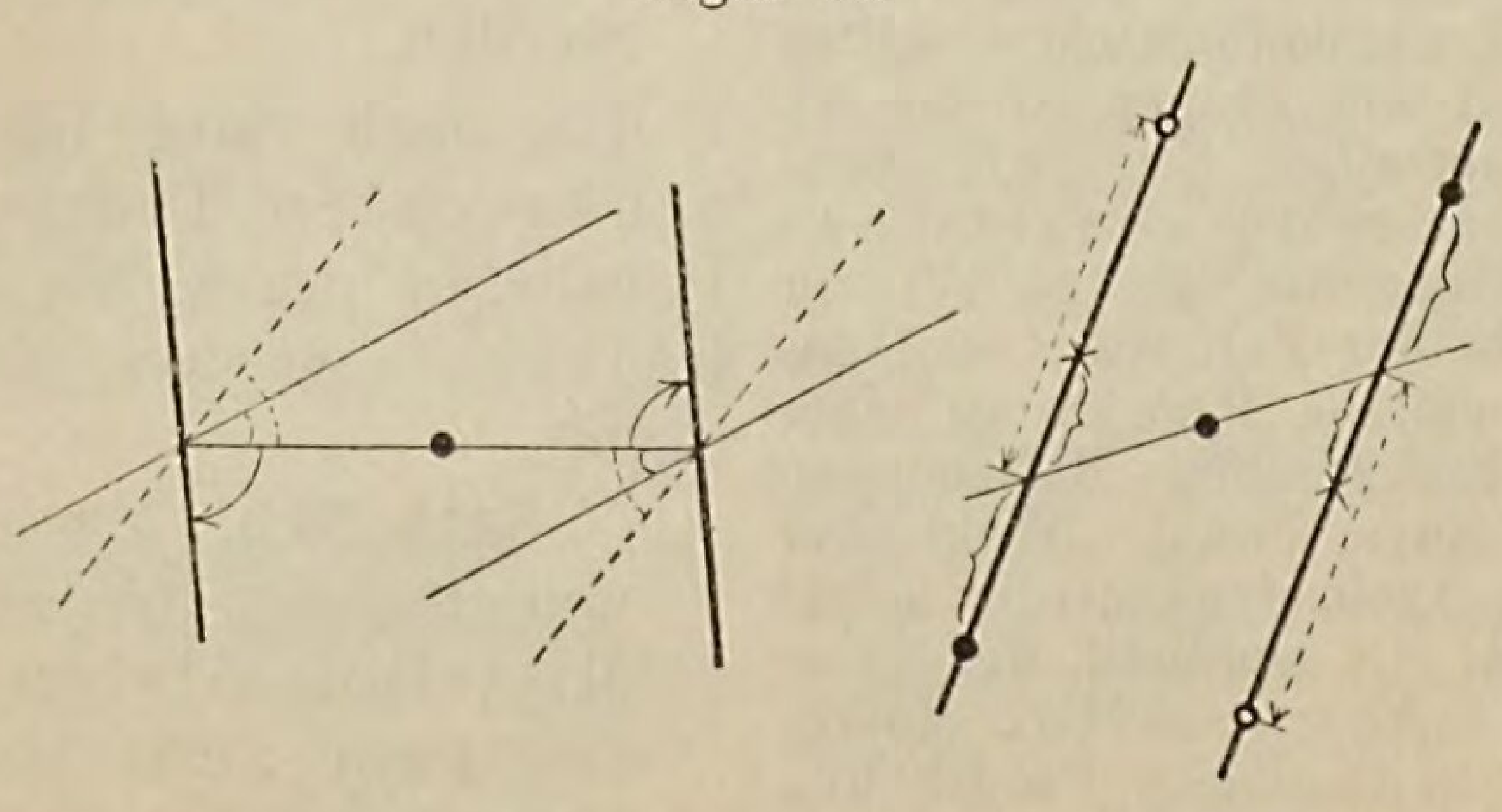
Um zu finden, welche von den auf zwei zentrisch-symmetrischen Geraden liegenden Punkten wieder zentrisch-symmetrisch sind, kann man auf folgende Weise verfahren:

Da eine Zentrale bei der Umdrehung ihre vorige Lage wieder einnimmt, und gleiche entgegengesetzte Strecken auf symmetrischen Geraden zentrisch-symmetrisch sind, so müssen auch zentrisch-symmetrische Punkte entstehen, wenn man auf zwei symmetrischen Geraden von einer Zentralen derselben gleiche Strecken in entgegengesetzter Richtung anträgt; also:

Satz 30. Irgend zwei Punkte auf zwei zentrisch-symmetrischen Geraden, welche mit einer Zentralen derselben auf diesen Geraden nach entgegengesetzten Seiten gleich grosse Strecken abschneiden, sind

zentrisch-symmetrische Punkte.

Figur 31.



Frage 55. Wie kann man sich nach der in vorigen Antworten durchgeführten Betrachtungsweise zwei zentrisch-symmetrische Figuren entstanden denken?

Erkl. 81. Die erste der nebenstehend erklärten Betrachtungsweisen lässt die Figuren entstehen als „Punktgebilde", die zweite als „Liniengebilde" (vergl. Antwort der Frage 32).

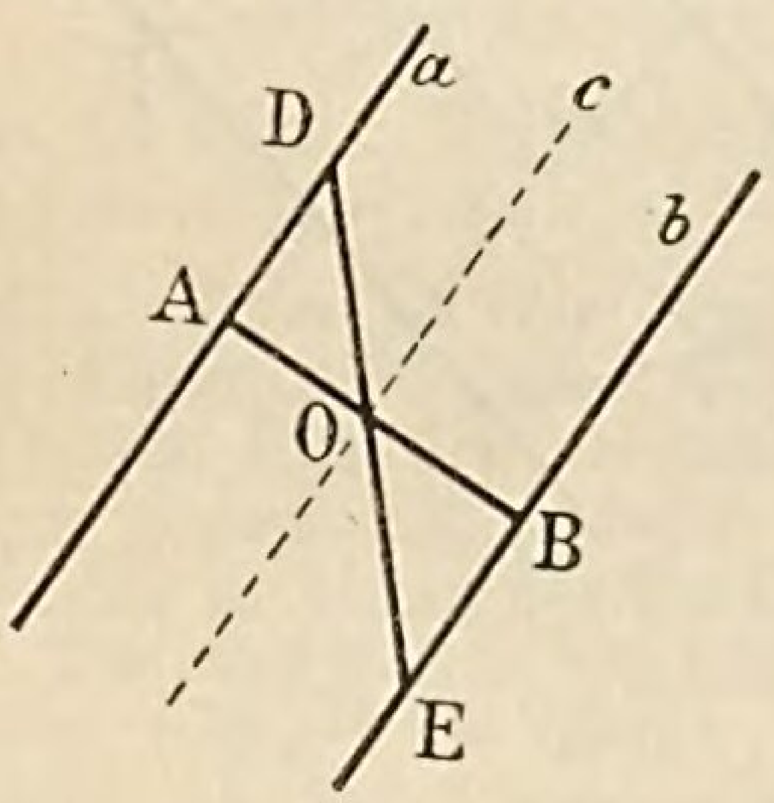
Antwort. Auf Grund der Durchführungen der vorigen Antwort kann man sich zentrisch-symmetrische Figuren auf doppelte Weise entstanden denken:

1) Man kann sich die Figuren entstanden denken durch eine Anzahl zentrisch-symmetrischer Punkte und deren Verbindungslinien.

2) Man kann sich die Figuren entstanden denken durch eine Anzahl zentrisch-symmetrischer Geraden und deren Schnittpunkte.

Frage 56. Welche besonderen Folgerungen ergeben sich aus Satz 28 für die Mittelparallele zweier zentrisch-symmetrischen Geraden in Berücksichtigung des bei der achsigen Symmetrie über diese Linie Ausgesagten?

Figur 32.



Erkl. 82. Der Beweis für die Richtigkeit der im Satz 31 aufgestellten Behauptung lässt sich folgendermassen führen (siehe Figur 32):

Voraussetzung. Die Gerade c sei Mittelparallele von a und b, d. h. nach Erkl. 47 und Satz 16:

$$OA = OB, \text{ wobei } a \perp AB \perp b.$$

Behauptung. Auch auf jeder beliebigen Transversalen, z. B. DE, sei $OD = OE$

Beweis. Zum Beweis lasse man die Figur um den Punkt O eine halbe Umdrehung machen. Dann fällt nach den Sätzen 23 und 29 B auf A und b auf a und OE der Richtung nach auf OD. Dann muss aber auch der Schnittpunkt E der Richtungen b und OE auf den Schnittpunkt D der zentrisch-symmetrischen Richtungen a und OD fallen, nämlich auf D, so dass $OE = OD$, was zu beweisen war.

Antwort. Da nach Satz 28 jeder Punkt der Mittelparallelen zweier parallelen Geraden als Symmetriezentrum derselben betrachtet werden kann, und da ferner nach Satz 26 das Symmetriezentrum alle, also nicht bloss wie in Erkl. 47 ausgesagt wurde, die senkrechten Transversalen der zentrisch-symmetrischen Geraden halbiert, so kann man die Aussagen machen:

Satz 31. Die Mittelparallele zweier parallelen Geraden halbiert sämtliche Transversalen der beiden Geraden.

Satz 31a. Die Mittelpunkte sämtlicher Transversalen zweier parallelen Geraden liegen in einer geraden Linie, nämlich auf der Mittelparallelen der beiden Geraden.

Erkl. 83. Der Beweis für die Richtigkeit des Satzes 31a lässt sich folgendermassen erbringen (siehe Figur 32):

Voraussetzung. Es sei O der Mittelpunkt der beliebigen Transversalen DE, also $OD = OE$.

Behauptung. Punkt O liegt auf der Mittelparallelen, d. h. O ist auch Mittelpunkt der senkrechten Transversalen AB:

$$OA = OB.$$

Beweis. Zum Beweis lasse man die Figur eine halbe Umdrehung um den Punkt O ausführen. Dann fällt auf Grund der schon im vorigen Beweis angezogenen Sätze E auf D, b auf a, Richtung OB auf OA, also auch Punkt B auf A, und man erhält:

$$OA = OB.$$

Satz 31b. Die Parallele zu zwei parallelen Geraden durch den Mittelpunkt einer beliebigen Transversalen ist Mittelparallele und halbiert als solche sämtliche Transversalen.

Erkl. 84. Die Richtigkeit des Satzes 31b kann folgendermassen bewiesen werden (siehe Figur 33):

Voraussetzung. Es sei:

1) . . . $OD = OE$,

2) . . . $a \parallel OC \parallel b$.

Behauptung. OC ist Mittelparallele, d. h. es sei auch auf jeder beliebigen andern Transversalen:

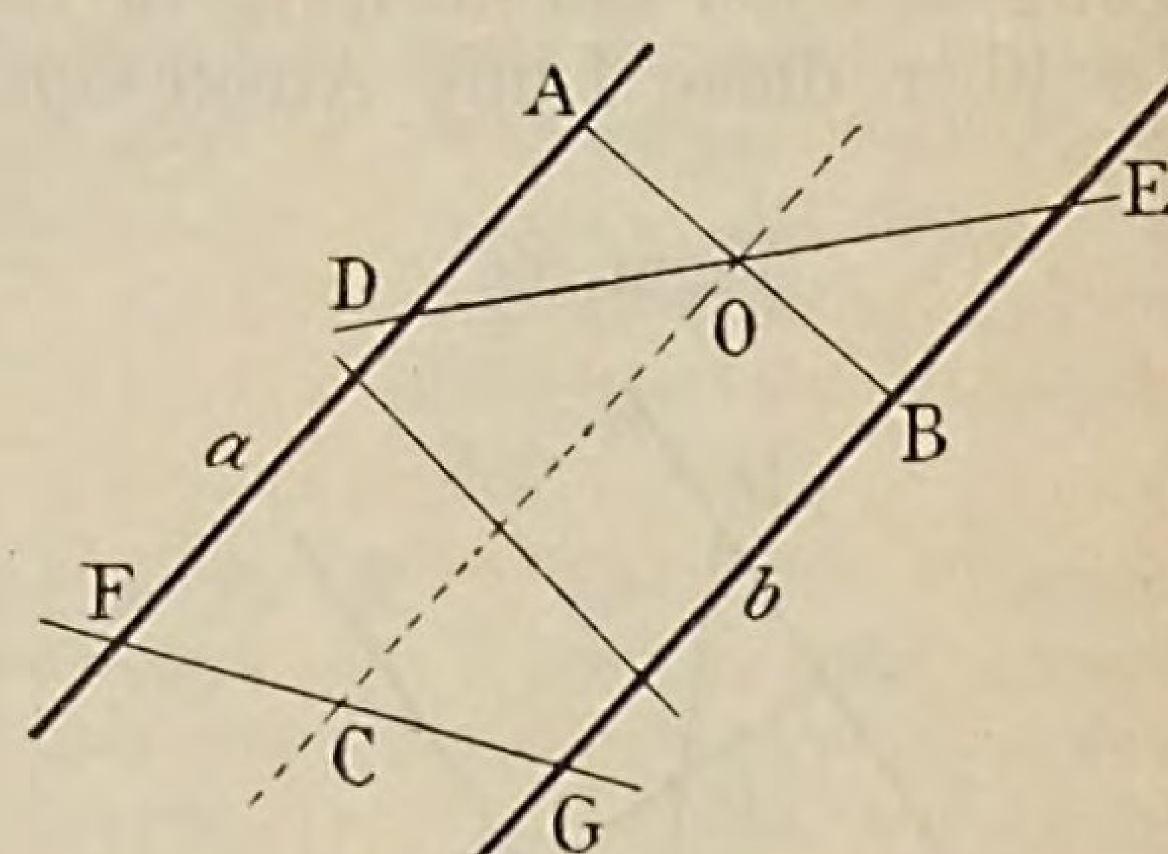
$$CF = CG,$$

und zwar wegen Satz 31a, ob nun $a \perp FG \perp b$ sei, oder nicht.

Beweis. Nach Satz 31a ist für die senkrechte Transversale AB auch $OA = OB$. Da aber OC auf AB im Mittelpunkt senkrecht steht, so ist OC auch Mittelparallele. Folglich muss nach Satz 31 von OC auch jede andere Transversale im Mittelpunkt durchschnitten werden, also auch:

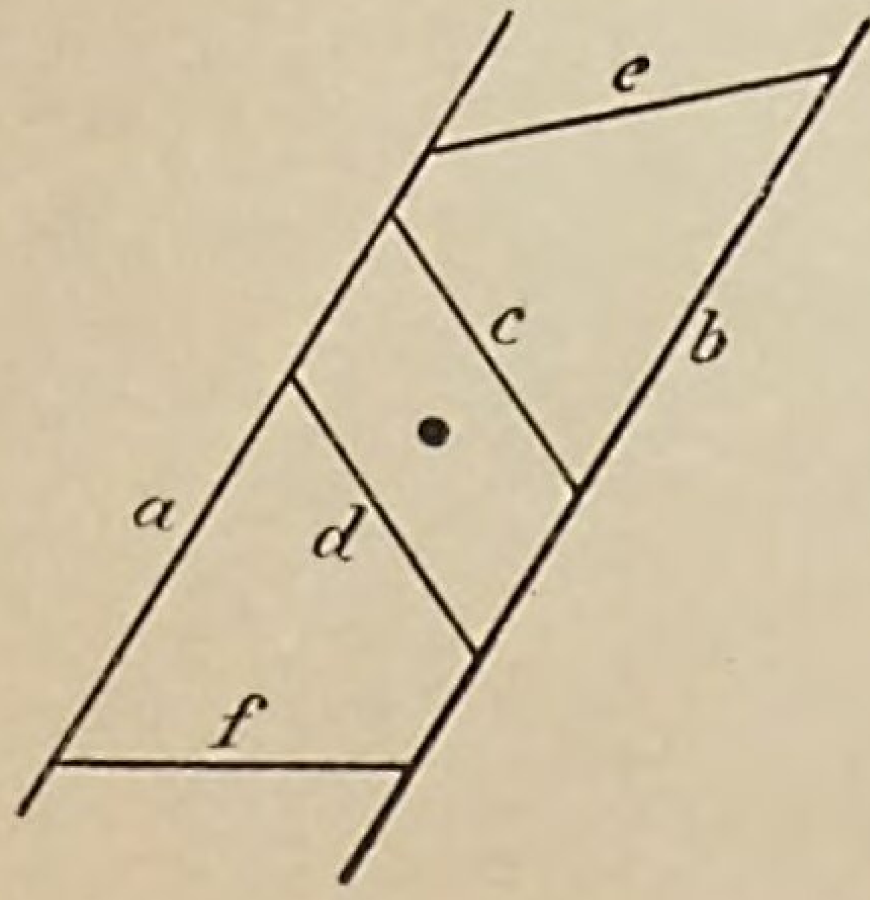
$$CF = CG.$$

Figur 33.



Frage 57. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Antworten auf die Fragen 54 und 55, wenn zum gleichen Symmetriezentrum mehrere Paare zentrisch-symmetrischer Geraden vorhanden sind?

Figur 34.



Antwort. Sind ausser den Geraden a und b in Fig. 34 noch weitere Paare symmetrischer Geraden, z. B. c und d oder e und f vorhanden, so müssen diese nach Satz 26 zu einander parallel sein. Ferner müssen beim Umdrehen um das Symmetriezentrum nicht nur die Geraden a und b, c und d, e und f zur Deckung kommen, sondern auch die Schnittpunkte der Geraden c und d oder e und f mit dem ersten Geradenpaar a und b. Dadurch kommen aber auch die zwischen den Ge-

Erkl. 85. Die allgemeine Richtigkeit des Satzes 32, welcher in nebenstehender Antwort nur für den Fall abgeleitet wird, dass das Symmetriezentrum im voraus gegeben war, lässt sich folgendermassen beweisen (siehe Figur 35):

Voraussetzung. Linien $a \parallel b$, Linien $c \parallel d$.

Behauptung. Strecke $a = b$, Strecke $c = d$.

Beweis. Zum Beweis benutze man den Satz 28 und wähle als Transversale diejenige Linie, welche zwei Schnittpunkte der parallelen Geraden a und b mit c und d untereinander verbindet. Diese Linie ist dann Transversale sowohl für die Gerade a und b als auch für c und d; und zu ihrem Mittelpunkt O sind nach Satz 28 zentrisch-symmetrisch die Linien a und b, c und d, also auch die Schnittpunkte der Linien (b, c) und (a, d), sowie der Linien (a, c) und (b, d), und infolge dessen auch die Strecken a und b, sowie die Strecken c und d selber. Da also beim Umdrehen um O diese Strecken zur Deckung kommen, so ist nachgewiesen, wie behauptet wurde:

$$a = b, \quad c = d.$$

Erkl. 86. Der Beweis für die Richtigkeit der in Satz 32a aufgestellten Behauptung lässt sich in ganz analoger Weise ausführen (siehe Figur 36):

Voraussetzung. Gerade $c \parallel d$ und Strecke $c = d$, also kurz $c \#\, d$.

Behauptung. Verbindungslinien $a \parallel b$ (und Strecken $a = b$), kurz $a \#\, b$.

Beweis. Zum Beweis lasse man wieder die ganze Figur eine halbe Umdrehung ausführen um den Punkt O, welcher der Mittelpunkt einer Transversale durch zwei in entgegengesetzter Richtung der Parallelen c und d gelegenen Endpunkte ist. Da hierbei zur Deckung kommen müssen die Linien c und d, sowie die Strecken c und d, so müssen auch die Endpunkte der gleich langen Strecken c und d nach Satz 30 zur Deckung kommen, nämlich die Schnittpunkte der Linien a und c, sowie b und d. Wenn aber die Schnittpunkte der Linienpaare (a, c) und (b, d), sowie (a, d) und (b, c) zur Deckung kommen, so gilt dasselbe von den zwischen diesen Schnittpunkten gelegenen Strecken; und man erhält, wie behauptet wurde:

Linie $a \parallel b$ und Strecke $a = b$.

Erkl. 87. Da die Eigenschaft zweier Strecken, dass sie selbst gleich lang und die sie enthaltenden geraden Linien parallel seien, dadurch ausgedrückt werden kann, dass das Schriftzeichen der Gleichheit mit dem der Parallelität verbunden wird zu dem Zeichen $\#$, so kann man schreiben für Figur 34 bis 36 für je zwei parallele Transversalen:

$$a \#\, b, \quad c \#\, d, \quad e \#\, f.$$

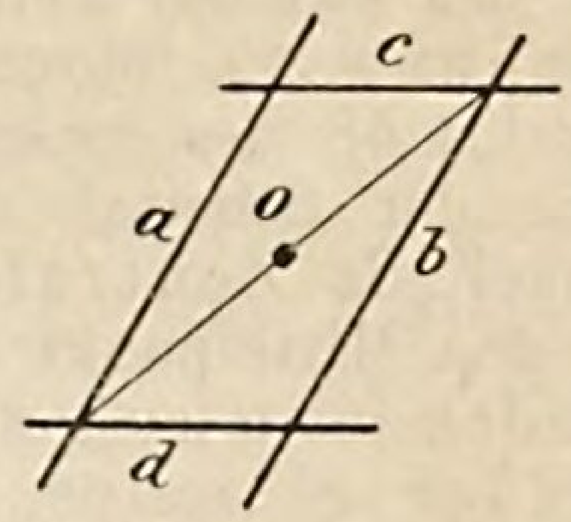
raden a und b gelegenen Strecken auf diesen weiteren parallelen Geraden zur Deckung, sind also gleich lang. Daher kann man die Aussage machen:

Satz 32. Parallele Strecken zwischen parallelen Geraden sind gleich lang.

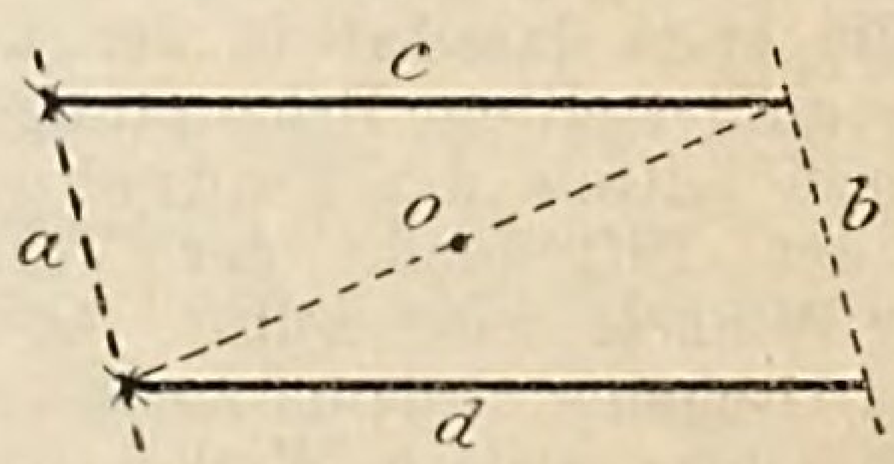
Und umgekehrt:

Satz 32a. Die Endpunkte zweier gleich langen parallelen Strecken liegen wieder auf zwei Parallelen (und gleich langen Strecken).

Figur 35.

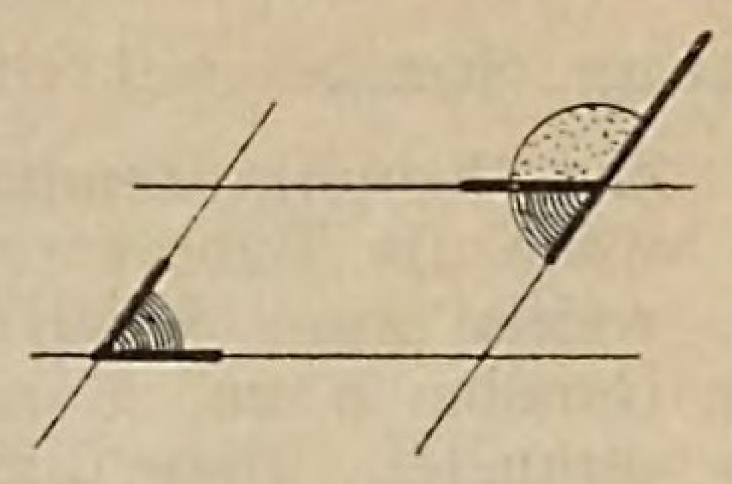


Figur 36.



Erkl. 88. Berücksichtigt man, dass wenn parallele Geraden von andern Parallelen geschnitten werden, nicht nur die Schnittpunkte der Parallelen durch Umdrehung zur Deckung gebracht werden, sondern auch die an entsprechenden Schnittpunkten gelegenen **Winkel,** so erhält man eine Bestätigung der schon in den Lehrsätzen 33 bis 36 des zweiten Teiles aufgestellten Behauptungen, dass Winkel mit parallelen Schenkeln gleich gross sind, wenn diese Schenkel beide gleich oder beide entgegengesetzt parallel sind, dass die Winkel dagegen supplementär sind, wenn von den Schenkeln das eine Paar gleich gerichtet, das andere entgegengesetzt parallel ist.

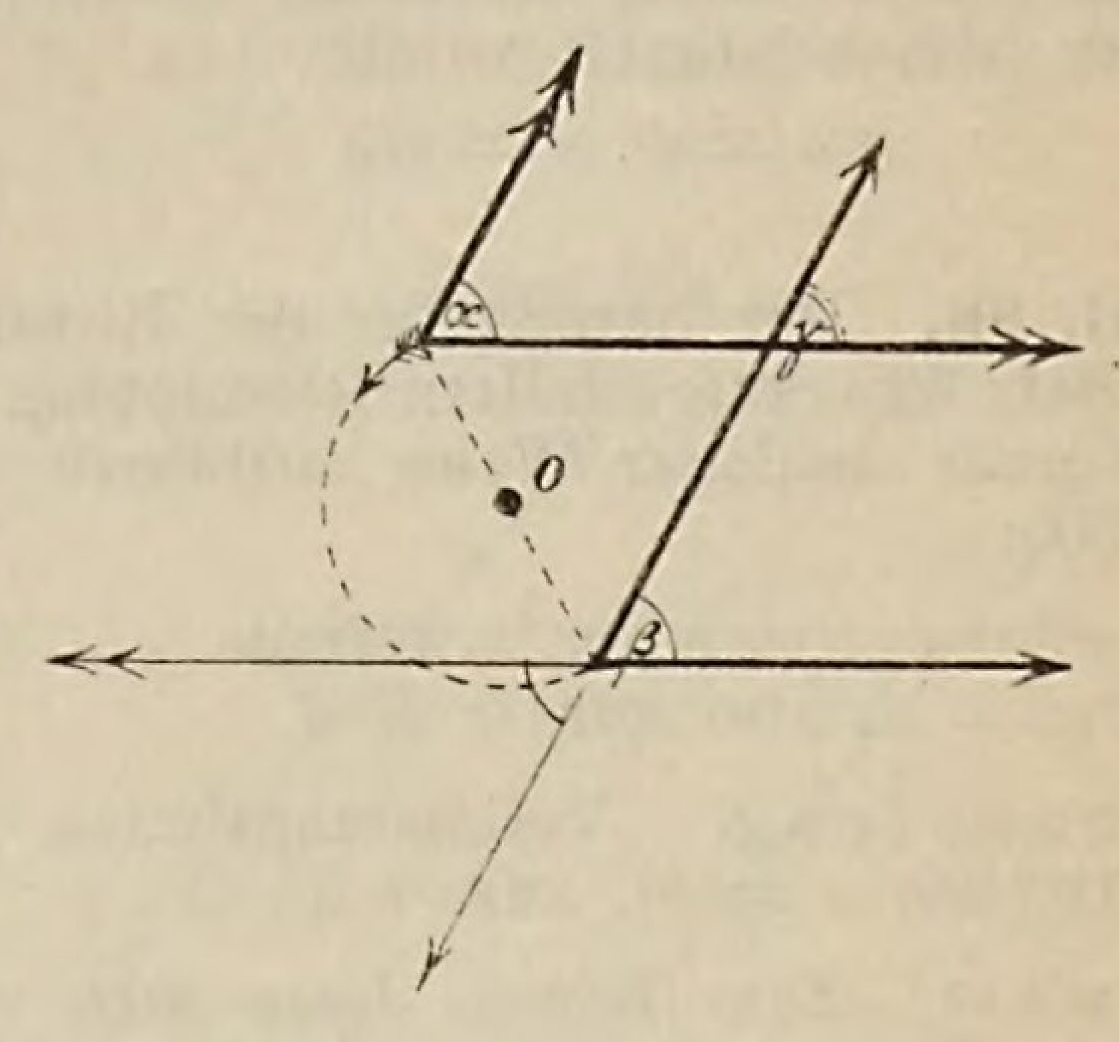
Figur 37.



Erkl. 89. Um die Beweise für die Lehrsätze 33 bis 36 des zweiten Teiles mittels der halben Umdrehung zu führen, hat man in den Figuren 52 bis 58 des zweiten Teiles die Verbindungslinie der Scheitel der zu untersuchenden Winkel als Zentrale zu nehmen. Wird dann um den Mittelpunkt dieser Strecke eine halbe Umdrehung ausgeführt, so fallen die Schenkel der gleichen Winkel oder ihrer Scheitelwinkel als zentrisch-symmetrische Geraden aufeinander, wodurch die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Auch die eben daselbst in den Lehrsätzen 37 bis 40 aufgestellten Behauptungen lassen sich beweisen mittels der Umdrehung, aber nicht um den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Winkelscheitel selbst. Auch ist der Betrag der Drehung alsdann nicht 180°, sondern gleich einem andern Winkel (s. hierüber die Antworten auf die Fragen 59 und 62).

Figur 38.
(Vergleiche Figur 52 des zweiten Teiles.)

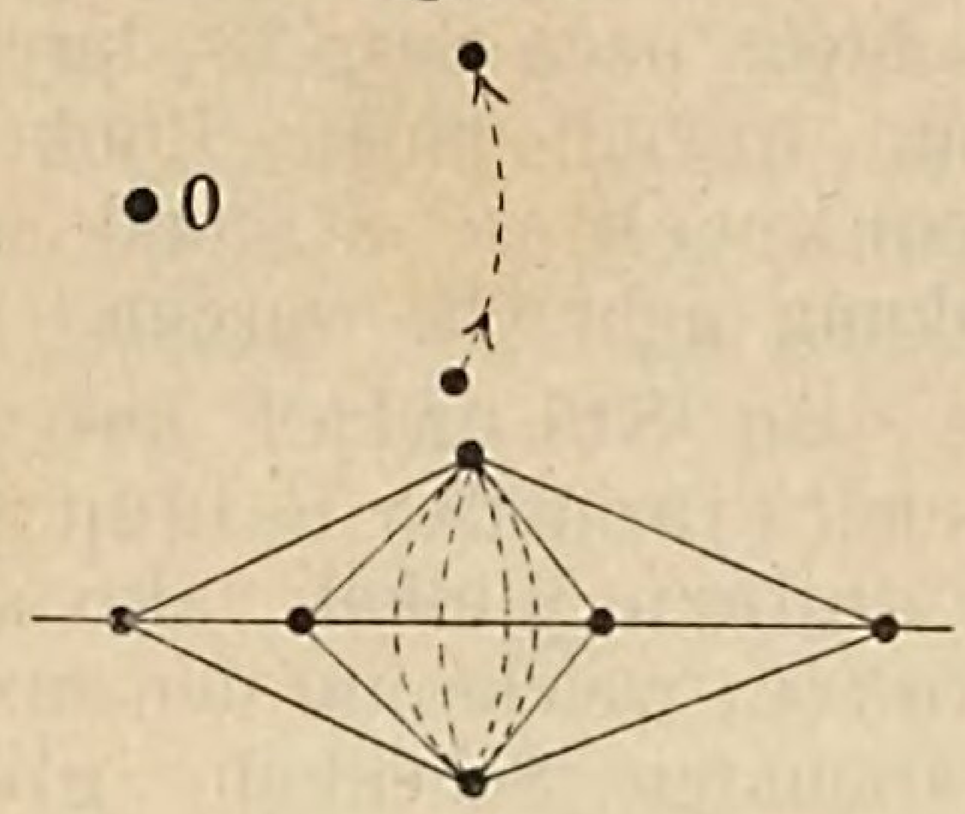


Anmerkung 1. Die bisherigen Betrachtungen über die Umdrehung einer Figur um einen Punkt ihrer Ebene beschäftigten sich fast ausschliesslich mit der halben Umdrehung, d. h. mit der Umdrehung um 180°. Wie aber aus den Antworten auf die Fragen 38, 40 und 42 hervorgeht, sowie aus den Andeutungen in den Erklärungen 76 und 89, bildet die halbe Umdrehung zwar den wichtigsten Fall der Umdrehung, jedoch muss auch der allgemeine Fall der Umdrehung um einen beliebigen Winkel berücksichtigt werden. Es werden daher in den folgenden Fragen und Antworten die grundlegenden Sätze über diese allgemeine Drehung um einen Punkt abgeleitet. Eine solche ist eindeutig bestimmt, wenn gegeben ist der Umdrehungsmittelpunkt und die Grösse des Winkels, um welchen gedreht werden soll.

Frage 58. Welchen Weg beschreibt ein Punkt bei der Drehung um einen andern Punkt, und welche Folgerungen ergeben sich daraus?

Antwort. Bei der Drehung um einen Punkt beschreibt jeder Punkt eine Kreislinie, behält also stets gleichen Abstand vom Umdrehungsmittelpunkt. Daher kann ein Punkt durch Drehung mit einem andern zur Deckung gebracht werden, wenn der Umdrehungsmittel-

Figur 39.



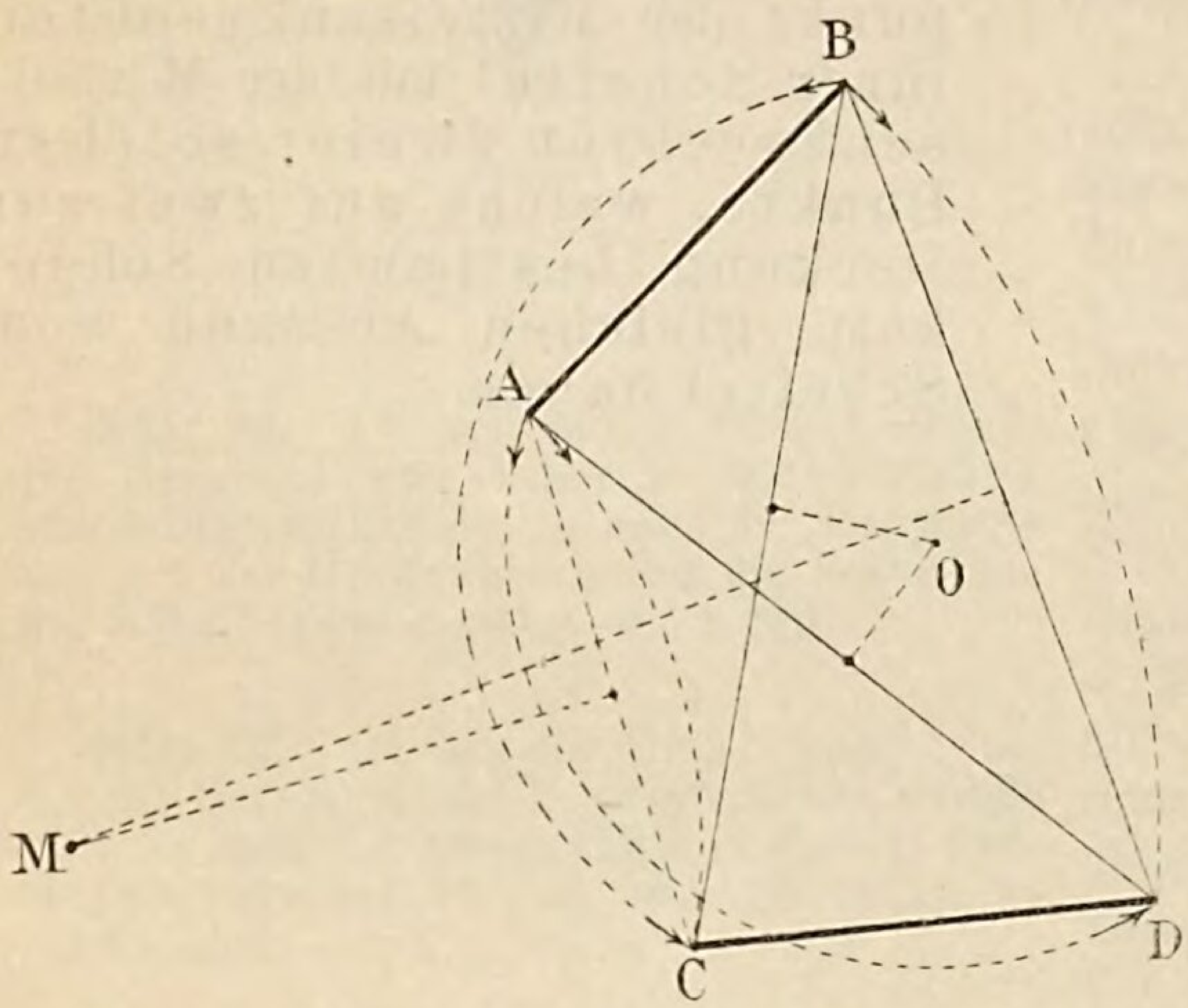
punkt von beiden gleichen Abstand hat, also nach Satz 14 auf der Symmetrieachse oder auf der Mittelsenkrechten liegt. Daher erhält man:

Satz 33. Ein Punkt lässt sich mit einem andern zur Deckung bringen durch Umdrehung um jeglichen Punkt der Mittelsenkrechten beider Punkte.

Frage 58a. Wie lassen sich daher zwei gleichgrosse Strecken durch Umdrehung zur Deckung bringen?

Antwort. Um zwei Strecken zur Deckung zu bringen, bringe man ihre Endpunkte zur Deckung, dann müssen auch die Strecken aufeinander fallen.

Figur 40.



Nach Satz 33 kann aber jeder Punkt der Mittelsenkrechten zweier Endpunkte als Umdrehungsmittelpunkt gelten. Damit also gleichzeitig beide Punktepaare aufeinander fallen, nehme man als Umdrehungsmittelpunkt denjenigen Punkt, in welchem sich die beiden Mittelsenkrechten der beiden Endpunktepaare schneiden, denn dieser Punkt liegt gleichzeitig auf beiden einzelnen Mittelsenkrechten.

Man erhält daher:

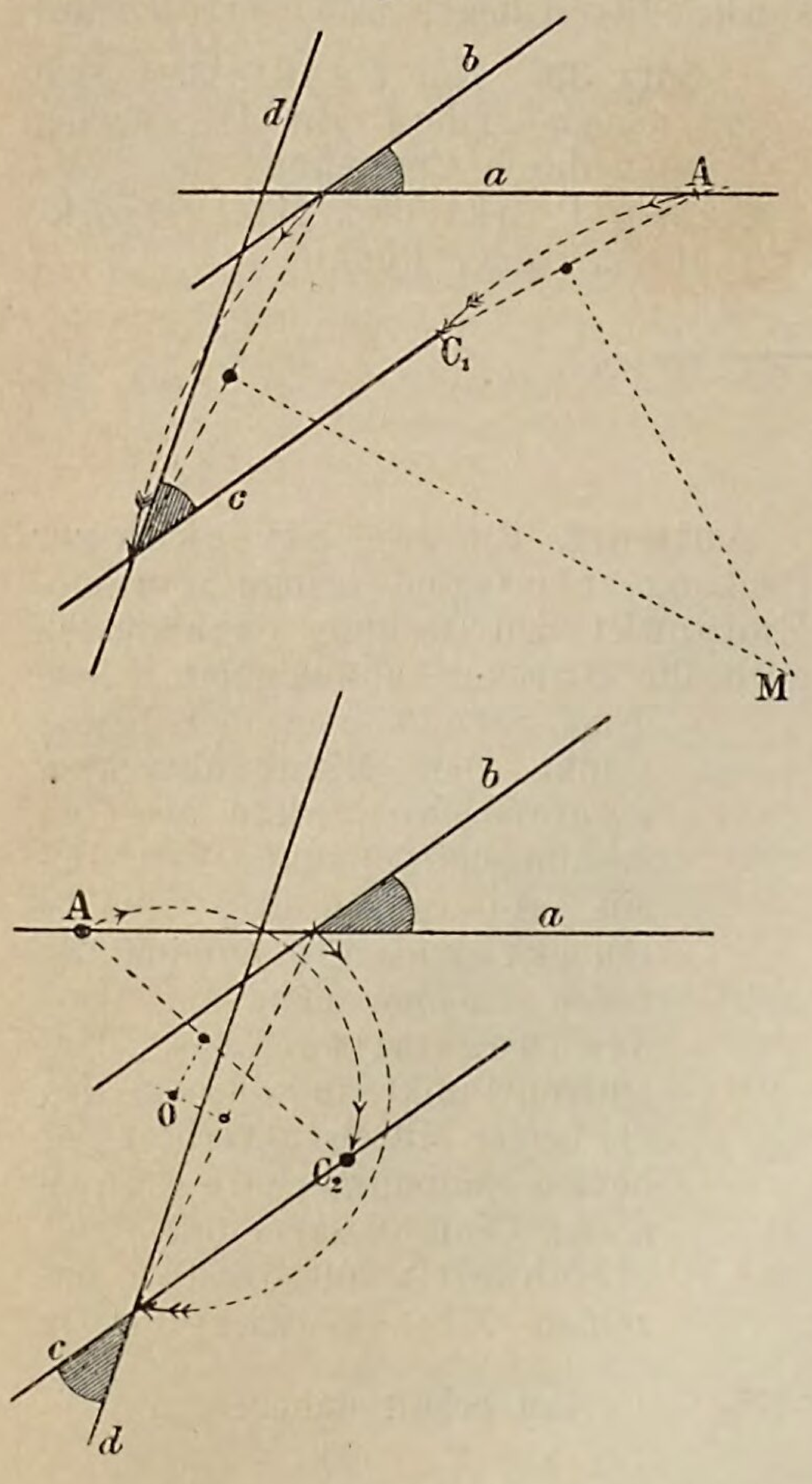
Satz 34. Zwei gleiche Strecken lassen sich mit einander zur Deckung bringen durch Umdrehung um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der beiden zur Deckung bestimmten Endpunkte.

Erkl. 90. Da beide Strecken AB und CD entweder so aufeinander gelangen können, dass A auf C und B auf D fällt, oder dass A auf D und B auf C fällt, so ist zweifache Möglichkeit vorhanden für ihre Deckung, nämlich entweder durch Drehung um den Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten auf AC und BD oder um den Schnittpunkt O jener auf AD und BC (s. Figur 40).

Frage 59. Wie lassen sich durch Benützung des Vorigen zwei gleichgrosse Winkel bildende Geraden durch Umdrehung zur Deckung bringen?

Antwort. Wenn zwei gleichgrosse Winkel bildende Geraden zur Deckung kommen sollen, so müssen zur Deckung gebracht werden:

Figur 41.



1) die Winkelscheitel — und dies geschieht nach Satz 33 durch Drehung um irgend einen Punkt ihrer Mittelsenkrechten —; und es muss zur Deckung gebracht werden

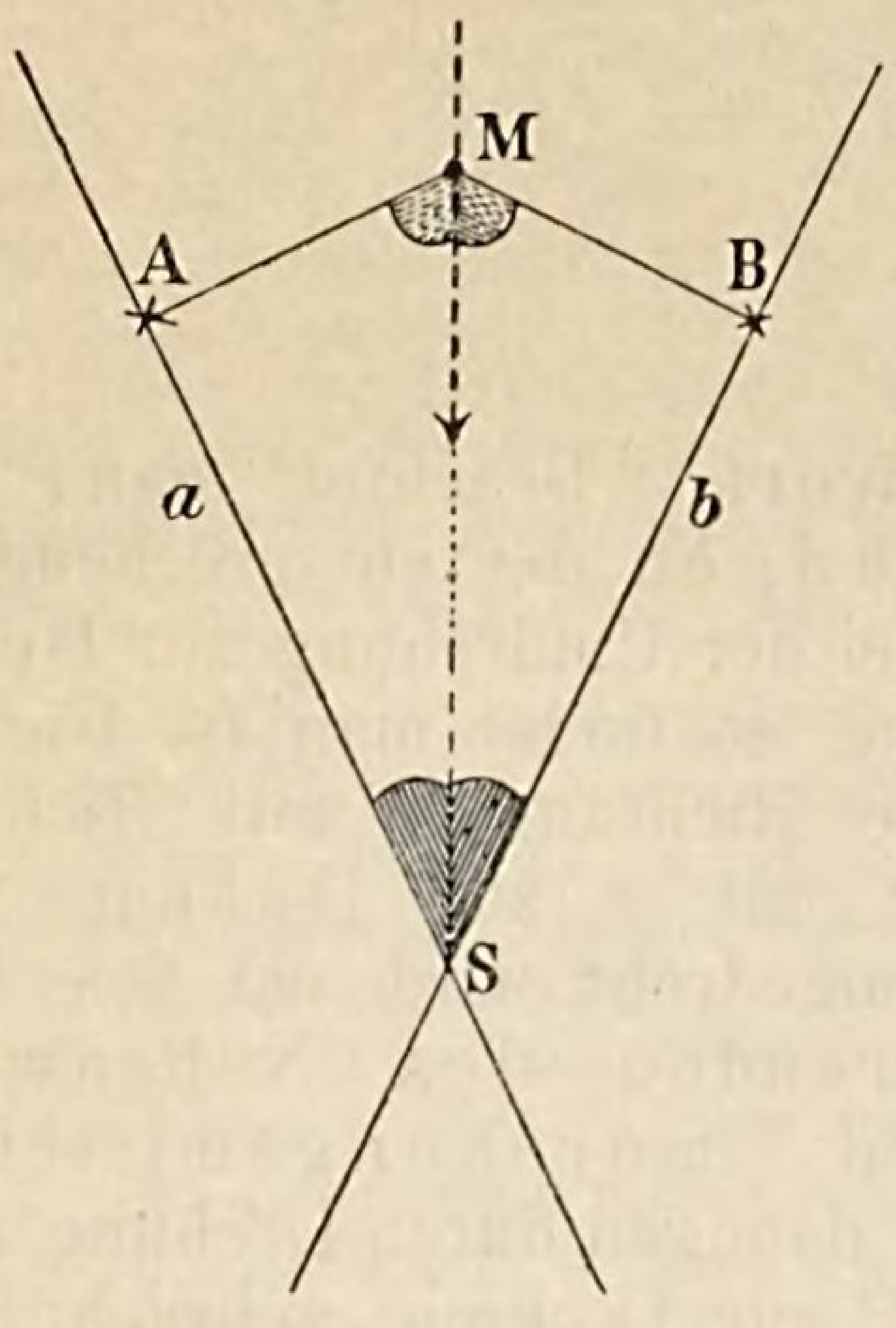
2) je ein Schenkel des einen Winkels mit einem der beiden Schenkel des andern Winkels, also auch je zwei Punkte, welche auf den zur Deckung bestimmten Schenkeln gleichen Abstand vom Scheitel haben — und dies geschieht durch eine zweite Anwendung desselben Satzes 33. Daher kann man die Aussage machen:

Satz 35. Zwei gleichgrosse Winkel bildende Geraden lassen sich miteinander zur Deckung bringen durch Umdrehung um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ihrer Scheitel mit der Mittelsenkrechten zweier solchen Punkte, welche auf zwei zur Deckung bestimmten Schenkeln gleichen Abstand vom Scheitel haben.

Erkl. 91. Da beide Winkel (ab) und (cd) entweder so aufeinander gelangen können, dass a auf c und b auf d selbst fällt, oder dass a auf die Verlängerung von d und b auf die Verlängerung von c fällt, so ist auch hier zweifache Möglichkeit für ihre Drehung, nämlich um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ihrer Scheitel mit der Mittelsenkrechten entweder zweier auf a und c selbst, oder zweier auf c und der Verlängerung von a gleichweit vom Scheitel entfernten Punkte. In Fig. 41 ist daher M Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Scheitel mit derjenigen der Punkte A und C_1, dagegen O Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Scheitel mit derjenigen der Punkte A und C_2. Die punktierten Kreislinien geben in Figur 40 und 41 die Wege an, welche von den genannten Punkten beschrieben werden.

Frage 60. Welche Beziehungen finden statt zwischen der Lage einer geraden Linie und derjenigen Lage, welche dieselbe Gerade nach einer Umdrehung um einen ausserhalb liegenden Punkt annimmt?

Figur 42.



Erkl. 92. Da von einem Punkte M auf eine Gerade a oder b nur je eine einzige Senkrechte möglich ist, so muss die Senkrechte MA bei der Umdrehung auf die Senkrechte MB fallen, sowie a selbst auf b fällt.

Erkl. 93. Da bei der Umklappung um MS die Geraden a und b entsprechende Gerade sind, so muss ihr Schnittpunkt S ein selbstentsprechender Punkt, also ein Achsenpunkt sein.

Erkl. 94. Die Richtigkeit der in Satz 36 ausgesprochenen Behauptung lässt sich in genau gleicher Weise darthun, wie oben geschehen (siehe Figur 43). Sind a und b zwei beliebige Geraden, P oder Q ein beliebiger Punkt auf einer der der beiden Winkelhalbierenden, so fälle man von P und Q die Senkrechten auf a und b und klappe um die Winkelhalbierende um. Dadurch kommen diese Senkrechten zur Deckung (weil wieder nur eine einzige Senkrechte auf jede Gerade möglich ist), sind also gleich lang. Führt man nun um den Punkt P bezw. Q eine Umdrehung aus, so dass die Senkrechten von diesem Punkte auf a und b zur Deckung gelangen, so kommen auch zur Deckung die Fusspunkte dieser Senkrechten, also auch die in diesen Fusspunkten vorhandenen rechten Winkel und deren Schenkel, d. h. es kommen zur Deckung die beiden Geraden a und b.

Antwort. Um die Beziehungen zu untersuchen zwischen der Lage der Geraden a in Figur 42 und der Geraden b, in welche die erstere durch Umdrehung um den Umdrehungsmittelpunkt M übergeführt worden sein soll, fälle man von M aus auf die Geraden a und b je eine Senkrechte, so dass:

$$MA \perp a \text{ und } MB \perp b.$$

Da nun die Senkrechte von M auf a und die Senkrechte von M auf b bei der Umdrehung der Geraden a nach b zur Deckung gelangen müssen, so muss auch

$$MA = MB$$

sein. Nach Satz 13b kann aber die Strecke MA mit der Strecke MB ausser durch die Umdrehung um Punkt M auch zur Deckung gebracht werden durch Umklappung um die Halbierungslinie des Winkels AMB. Wird diese Umklappung ausgeführt, so fällt Strecke MA auf MB, Punkt A auf Punkt B, Winkel $MAS = 90^0$ auf $\sphericalangle MBS = 90^0$, also auch Strecke AS auf Strecke BS. Demnach muss nach Satz 5 der Punkt S auf der Symmetrieachse, nämlich der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle AMB$ liegen; und es muss bei der Umklappung auch $\sphericalangle MSA$ auf $\sphericalangle MSB$ zu liegen kommen, d. h. die Linie MS ist nicht nur Winkelhalbierende des Winkels AMB, sondern auch des Winkels ASB. Daher kann man auch umgekehrt folgende Aussagen machen:

Satz 36. Die Verbindungslinie des Umdrehungsmittelpunktes mit dem Schnittpunkte zweier entsprechenden Geraden halbiert den Winkel dieser Geraden.

Oder:

Satz 36a. Der Umdrehungsmittelpunkt für die Drehung, durch welche zwei beliebige Gerade zur Deckung gelangen, muss auf der

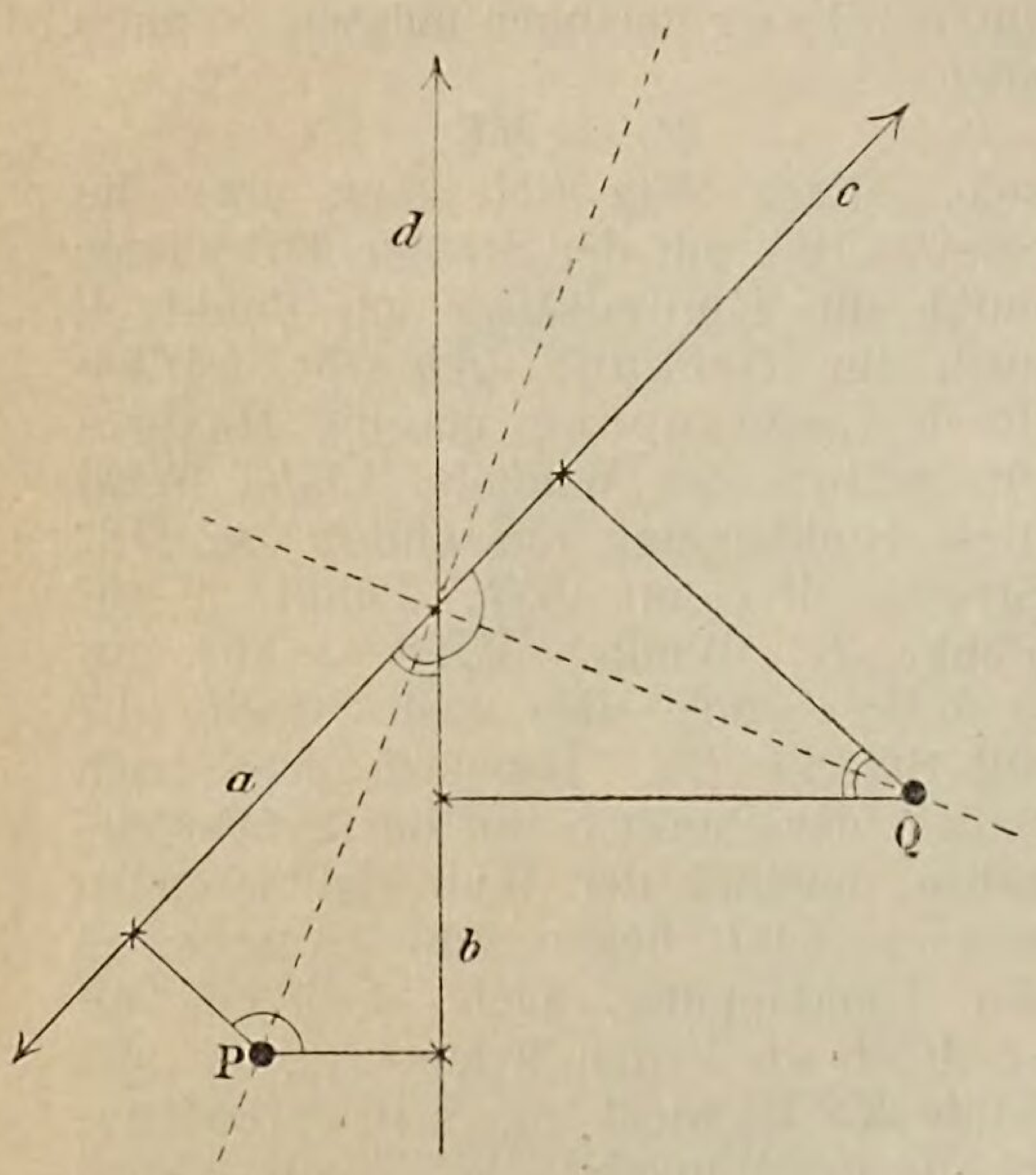
Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden liegen.

Oder:

Satz 36b. Eine Gerade lässt sich mit einer andern zur Deckung bringen durch Umdrehung um jeglichen Punkt auf einer der Winkelhalbierenden beider Geraden.

Frage 61. Welche Folgerungen erhält man aus der vorigen Antwort und den Sätzen 36, wenn man die von den entsprechenden Geraden gebildeten Richtungen und Winkel in Betracht zieht?

Figur 43.



Erkl. 95. Dass der Winkel AMB (siehe Figur 42) gleich dem Nebenwinkel des Winkels ASB sein muss, kann auch aus der Winkelsumme des Vierecks $AMBS$ gefolgert werden. Da nämlich $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^0$ ist, so bleibt für $\sphericalangle M + \sphericalangle S$ noch 180^0 übrig, also muss sein:

$$\sphericalangle M = 180^0 - \sphericalangle S.$$

Erkl. 96. Der nebenstehende Satz 37 gibt die in Erkl. 76 angekündigte Erweiterung der halben Umdrehung. In der That ist die „halbe" Umdrehung, d. h. diejenige um 180^0, als besonderer Fall in der nebenstehend erklärten enthalten für die besondere Einschränkung auf entgegengesetzt parallele Richtungen. Solche nämlich können angesehen werden als Richtungen mit einem Winkel von 180^0. Winkel-

Antwort. Beachtet man, welche Richtungen der entsprechenden Geraden bei der Umdrehung zur Deckung gelangen, so findet man (s. Figur 43), dass die Richtung a mit Richtung b bezw. c mit d zur Deckung kommt, wenn umgedreht wird um den auf der Halbierenden des Nebenwinkels liegenden Umdrehungsmittelpunkt Q; dass dagegen durch Drehung um den Punkt P zur Deckung gebracht werden die Richtungen a mit d bezw. b mit c, deren Winkel wieder Nebenwinkel zu jenem sind, innerhalb dessen der Punkt P liegt.

Da ferner die Winkelschenkel der Winkel der Senkrechten bei P und Q, um welche umgedreht wurde, senkrecht stehen auf den Richtungen der beiden Geraden, so folgt aus Lehrsatz 39 des zweiten Teils, dass der Umdrehungswinkel bei P gleich dem Winkel (b, c), dagegen der Winkel bei Q gleich dem Winkel (a, b) ist. Demnach erhält man folgende Erweiterung des Satzes 36:

Satz 37. Zwei beliebig gegebene Richtungen können zur Deckung gebracht werden durch Drehung um einen beliebigen Punkt der Halbierungslinie des Nebenwinkels dieser Richtungen, und zwar um einen Umdrehungswinkel geich dem Winkel der beiden Richtungen.

halbierende ihres Nebenwinkels ist die Mittelparallele; und durch Drehung um jeden Punkt auf dieser um den Betrag von 180° kommen die beiden Geraden zur Deckung.

Frage 62. Wie lassen sich zwei gleichgrosse Winkel durch Umdrehung zur Deckung bringen?

Erkl. 97. Da die beiden Winkel (ab) und (cd) entweder so aufeinander gelangen können, dass Schenkel a auf c und b auf d fällt, oder dass a auf d und b auf c fällt, so ist zweifache Möglichkeit vorhanden für ihre Deckung, nämlich entweder durch Drehung um den Schnittpunkt der Halbierenden des Nebenwinkels von a und c und von b und d, oder um den Schnittpunkt jener von a und d und von b und c (siehe Figur 41).

Erkl. 98. Eine Vergleichung des nebenstehenden Satzes 38 mit dem über den gleichen Punkt handelnden Satze 35 liefert eine Reihe merkwürdiger Beziehungen zwischen den Mittelsenkrechten entsprechender Punkte in kongruenten Figuren und den Winkelhalbierenden der durch die Punkte gehenden Geraden. Da es zu weit führen würde, dieselben hier zu erschöpfen, so sind davon einige besonders bemerkenswerte Fälle in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles aufgeführt bezw. deren Ausführung gefordert. Man sehe daselbst die Aufgaben 58 und folgende.

Antwort. Um zwei gleiche Winkel zur Deckung zu bringen, bringe man ihre Schenkel zur Deckung; dann müssen auch die Winkel aufeinander fallen. Nach Satz 37 aber kann jeder Punkt der Halbierungslinie des Nebenwinkels zweier Schenkelrichtungen als Umdrehungsmittelpunkt gelten. Damit also gleichzeitig beide Schenkelpaare aufeinander fallen, nehme man als Umdrehungsmittelpunkt denjenigen Punkt, in welchem sich die beiden Halbierungslinien der Nebenwinkel der beiden Schenkelpaare schneiden, denn dieser Punkt liegt gleichzeitig auf beiden einzelnen Winkelhalbierenden. Man erhält also:

Satz 38. Zwei gleichgrosse Winkel lassen sich miteinander zur Deckung bringen durch Umdrehung um den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Nebenwinkel der beiden zur Deckung bestimmten Schenkelrichtungen.

4) Ueber die Verschiebung oder die Parallelverschiebung.

Frage 63. Was versteht man unter Verschiebung?

Erkl. 99. Die Grösse der Verschiebung, um deren Betrag die Ebene fortgeschoben werden soll, ist nach nebenstehender Antwort im allgemeinen eine beliebige.

Antwort. Unter Verschiebung versteht man diejenige Lageveränderung einer Ebene, bei welcher diese längs einer in derselben Ebene enthaltenen Geraden verschoben wird.

Diejenige Gerade, längs welcher die Verschiebung stattfindet, heisst Leitlinie.

Frage 64. Bei welchen Betrachtungen der beiden ersten Teile dieses Lehrbuches wurde bereits Anwendung gemacht von der Verschiebung einer Figur längs einer Linie?

Antwort. Von der Verschiebung einer Figur längs einer in ihrer Ebene

liegenden Geraden werde Gebrauch gemacht:

1) in den Antworten auf die Fragen 3, 11 und 18 des ersten Teiles, in welchen die gerade Linie und der Strahl und die Strecke erzeugt wurden durch Verschiebung eines Punktes: als Weg oder Bahn dieses Punktes;

2) in der Antwort auf die Frage 41 des ersten Teils, in welcher die Ebene erzeugt wurde durch Verschiebung einer geraden Linie: als die von dieser Linie überstrichene Fläche;

3) in den Auflösungen der Aufgaben 85 und 103 des zweiten Teils, woselbst beliebig viele senkrechte Linien, bzw. beliebig viele Parallelen konstruiert wurden durch Verschiebung eines Winkelscheits längs einer Geraden: als jeweilige Lage der mit dieser Leitlinie gleiche (rechte) Winkel bildenden Kanten des Winkelscheits (siehe Fig. 76, 78, 93 u. 94 des zweiten Teils).

Erkl. 100. Die „geradlinige Verschiebung“ eines Punktes, durch welche die gerade Linie erzeugt wird, ist diejenige, bei welcher die Richtung der Verschiebung ständig die gleiche bleibt. Wird die Richtung der Verschiebung des Punktes dagegen in jedem Augenblick eine andere, so entsteht die krumme Linie, zu deren Beschreibung der erzeugende Punkt in jedem Augenblick ausser einer Verschiebung auch eine gewisse Drehung ausführt. Geschieht eine solche Drehung während der Verschiebung des Punktes nur an vereinzelten Stellen, so entsteht die aus geradlinigen Stücken bestehende „gebrochene“ Linie; bleibt die Richtung der Verschiebung zeitweise die gleiche, während sie an andern Stücken der erzeugten Linie jeden Augenblick mit Drehung verbunden ist, so entsteht die „gemischte“ Linie (s. Antwort auf Frage 53 des ersten Teiles).

Frage 65. An welchen Gegenständen des täglichen Lebens kann man sich eine Vorstellung der „Verschiebung“ verschaffen?

Antwort. Gegenstände des täglichen Lebens, aus deren Betrachtung man sich eine Vorstellung der Verschiebung verschaffen kann, sind unter anderen die folgenden:

Das längs einer Linie verschobene Winkelscheit (s. die vorige Antwort);

der über ein Brett geführte Hobel;

ein Schlitten, sowohl als eigentliches Fuhrwerk, als auch an einer Maschine der ebenso benannte Maschinenteil;

eine Aufzugseinrichtung oder Fahrstuhl;

eine aus glattem Lauf abgeschossene Kugel;

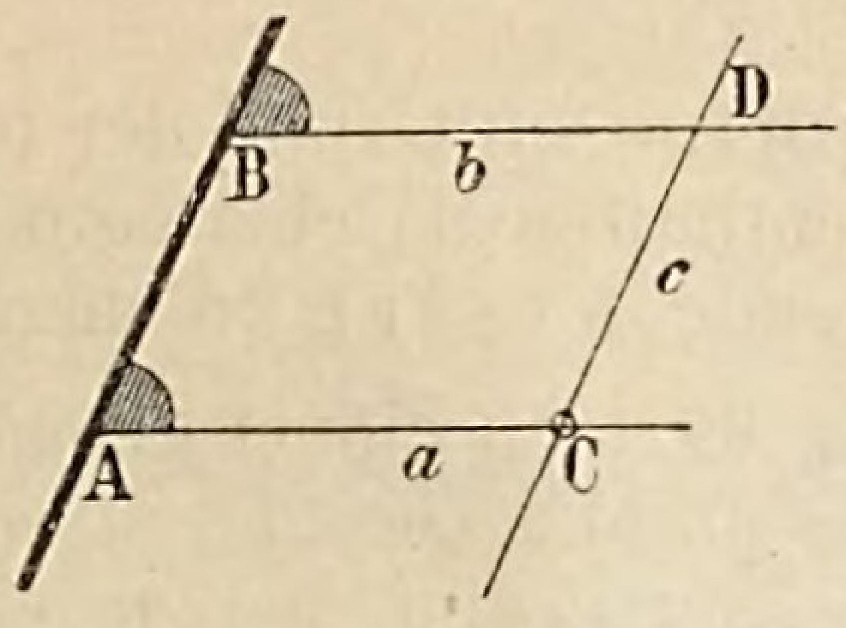
ein in Schienen auf- und abgeführter Dampfhammer;

ein im Cylinder hin- und hergehender Kolben; u. v. a. m.

Erkl. 101. Eine nicht geradlinige Ortsveränderung, wie die einer exzentrischen Scheibe, eines Pumpenschwengels oder einer aus gezogenem Lauf abgeschossenen Kugel, sind streng genommen nicht als Verschiebung zu bezeichnen, da bei solcher stets noch Drehung mit in Betracht zu ziehen ist. Für solche gilt daher auch das in der vorigen Erkl. 100 über die Ortsveränderung des Punktes Gesagte.

Frage 66. Welche Beziehungen bestehen zwischen den entsprechenden Punkten und Geraden zweier Figuren, welche durch Verschiebung längs einer Leitlinie zur Deckung kommen?

Figur 44.



Erkl. 102. Auf Grund der Betrachtungen in Erkl. 110 des zweiten Teiles über den gemeinsamen unendlich fernen Punkt mehrerer Parallelen kann man den zweiten Teil nebenstehender Antwort dahin erklären, dass entsprechende Geraden verschobener Figuren während und nach der Verschiebung durch denselben (unendlich fernen) Punkt gehen. Dadurch wird man dazu geführt, die Verschiebung als einen besondern Fall der allgemeinen Umdrehung anzusehen, indem bei dieser der Umdrehungsmittelpunkt als in unendliche Ferne gerückt anzusehen ist. Dabei werden die Bahnen aller Punkte zu Kreisen mit unendlich grossem Radius, das ist zu geraden Linien (siehe die Lehre vom Kreise im nächsten Teile dieses Lehrbuches) und zwar zu parallelen Geraden, weil der Mittelpunkt aller Kreise derselbe unendlich ferne Punkt ist.

Erkl. 103. Die in nebenstehender Antwort abgeleiteten Ergebnisse sind teilweise schon enthalten in den Ueberlegungen der Antwort auf Frage 42 des ersten Teiles. Daselbst wurde die Ebene erzeugt durch Verschiebung einer Linie längs einer Leitlinie; und dabei wurde gefunden, dass die verschobene Gerade in ihren verschiedenen Lagen (als „Erzeugende") stets sich selbst parallel bleibt, sowie dass die Bahnen der einzelnen Punkte auf den Erzeugenden selbst wieder parallele Geraden ausfüllen (die „Leitenden").

Antwort. Zwischen Punkten und Geraden verschobener Figuren lassen sich folgende Beziehungen aufstellen:

1) Liegt ein Punkt A einer Figur (siehe Figur 44) auf der Leitlinie selbst, so verbleibt er bei der Verschiebung auf dieser Linie und legt auf derselben eine Strecke AB zurück gleich dem Betrage der Verschiebung.

2) Eine Gerade a, welche mit der Leitlinie einen bestimmten Winkel bildet, muss diesen Winkel beibehalten während der Verschiebung, muss also auch nach der Verschiebung einen gleich grossen Winkel mit der Leitlinie bilden, wie zuvor. Da diese beiden gleich grossen Winkel ihrer Lage nach korrespondierende Winkel sind, so muss die Gerade in ihrer neuen Lage b parallel sein zu ihrer ursprünglichen Lage a.

3) Eine Gerade c, welche mit der Leitlinie selbst parallel war, muss daher auch mit ihr parallel bleiben, nämlich in beiden Lagen einen Winkel von 0^0 bezw. 180^0 mit ihr bilden.

4) Ein Punkt C, der nicht auf der Leitlinie selbst liegt, liegt jedenfalls auf irgend einer der Parallelen zur Leitlinie. Da diese Parallele c nach dem vorigen sich in sich selbst verschiebt, so ist die Bewegung des Punktes C ein Fortrücken auf dieser Parallelen c. Demnach wandert jeder Punkt einer Figur bei der Verschiebung parallel zur Leitlinie fort.

5) Derselbe Punkt C liegt aber auch auf irgend einer Schnittlinie a mit der Leitlinie und begrenzt auf dieser Linie a eine während der Verschiebung gleich bleibende Strecke bis zum Schnittpunkt mit der Leitlinie. Es muss daher in Figur 44 die Strecke $AC \mathrel{\#} BD$ sein, also nach Satz 32 auch die vom Punkt C zurückgelegte Strecke

CD nicht nur parallel der Leitlinie, sondern auch gleich der auf der Leitlinie gelegenen Strecke *AB*, nämlich gleich der Grösse der Verschiebung sein.

Frage 67. Welche Aussagen über die Beziehungen verschobener Figuren lassen sich machen auf Grund der vorigen Antwort?

Antwort. Auf Grund der in voriger Antwort enthaltenen Ueberlegungen kann man folgende Aussagen machen:

Satz 39. Zu einem geometrischen Gebilde (Punkt, Gerade, Strecke, Winkel u. s. w.) gibt es zu einer gegebenen Leitlinie nur ein einziges entsprechendes Gebilde.

Satz 40. Entsprechende Gebilde verschobener Figuren sind kongruent und zwar gleichwendig kongruent.

Satz 41. Eine Verschiebung ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Leitlinie und der Strecke, um welche ein Punkt auf der Leitlinie verschoben werden soll.

Satz 42. Entsprechende Geraden verschobener Figuren sind parallel.

Satz 42a. Die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte sind sämtlich unter sich und mit der Leitlinie parallel, sowie sämtlich gleich unter sich und gleich dem Betrage der Verschiebung selbst.

Oder:

Satz 42b. An Stelle der ursprünglich gegebenen Leitlinie kann die Verbindungslinie irgend zweier entsprechenden Punkte als Leitlinie gewählt werden.

Und demnach kann man statt Satz 41 auch sagen:

Satz 41a. Eine Verschiebung ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Lage von zwei beliebigen entsprechenden Punkten.

Erkl. 104. Die Richtigkeit der in den Sätzen 39 bis 41 aufgestellten Behauptungen folgt unmittelbar aus der Betrachtung der Figur, nämlich aus der Gleichheit korrespondierender Winkel mit gleichem Drehungssinne, sowie aus der Thatsache, dass auf einer Linie nur ein einziger Punkt besteht, der von einem gegebenen in gegebener Richtung einen gegebenen Abstand hat.

Erkl. 105. Die Sätze 42 sind die Formulierung der in voriger Antwort auf Frage 66 enthaltenen Ueberlegungen. Dieselben gründen sich auf den Satz 32, denn die Verbindungsstrecken je zweier entsprechenden Punkte liegen auf Geraden, welche parallel sind und parallele Verbindungslinien mit entsprechenden Punkten der Leitlinie erzeugen.

Erkl. 106. Wegen der in den Sätzen 42 ausgesprochenen Parallelität aller entsprechenden Geraden, sowie aller Verbindungslinien entsprechender Punkte wird die Verschiebung auch ausdrücklich mit dem Namen „Parallelverschiebung" bezeichnet.

Erkl. 107. In der Kunstwissenschaft werden zwei Figuren, welche durch Verschiebung zur Deckung kommen, auch perspektivisch kongruent genannt, die eine Figur die perspektivisch kongruente Projektion der andern, die Leitlinie die Direktrix, die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte projizierende Strahlen.

Erkl. 108. Die Richtigkeit des Satzes 41b beruht auf Satz 33, indem, wenn auf parallelen Geraden kongruente Strecken liegen, auch die Verbindungsstrecken der Endpunkte dieser Strecken einander parallel und gleich sind, also nach Satz 41a die Verschiebung eindeutig bestimmen.

Satz 41b. Zwei gleichwendig kongruente Figuren, in welchen irgend zwei entsprechende Geraden gleichgerichtet parallel sind, können durch Verschiebung längs der Verbindungslinie zweier beliebigen entsprechenden Punkte um die Abstandsstrecke dieser Punkte zur Deckung gebracht werden.

Frage 68. Welche Aussagen lassen sich machen über die Beziehungen mehrfacher Paare von entsprechenden Punkten, Geraden, Strecken, Winkeln in Figuren, welche durch Verschiebung oder Umdrehung oder Umwendung zur Deckung gelangen?

Antwort. Für die drei Arten der Ortsveränderung von Figuren, nämlich:

1) die Umwendung in achsigsymmetrische Lage;

2) die Umdrehung in zentrischsymmetrische Lage, oder die allgemeine Umdrehung um einen beliebigen Winkel; sowie

3) für die Verschiebung — gelten folgende Sätze:

Satz 43. In entsprechenden Figuren erzeugen je zwei entsprechende Punkte entsprechende Verbindungsgeraden und begrenzen auf diesen entsprechend gleiche Strecken.

Satz 44. In entsprechenden Figuren erzeugen je zwei entsprechende Geraden entsprechende Schnittpunkte und begrenzen an diesen entsprechend gleiche Winkel.

Und umgekehrt:

Satz 43a. Trägt man in entsprechenden Figuren auf entsprechenden Richtungen von entsprechenden Punkten aus gleichgrosse Strecken ab, so sind die Endpunkte dieser Strecken wieder entsprechende Punkte.

Satz 44a. Trägt man in entsprechenden Figuren in entprechenden Punkten an entsprechenden Strahlen gleichgrosse Winkel an, so sind die Endschenkel dieser Winkel wieder entsprechende Geraden.

Ferner kann man behaupten:

Satz 45. Drei oder mehr entsprechende Punkte, oder drei oder mehr entsprechende Geraden in zwei entsprechenden Figuren bestimmen entsprechende

Erkl. 109. Die Richtigkeit der in nebenstehenden Sätzen ausgesprochenen Behauptungen, deren Inhalt zum Teil schon in den Antworten auf die Fragen 30 und 53 für besondere Fälle enthalten war, lässt sich allgemein auf folgende Art beweisen:

Sind $A_1, B_1, C_1, \cdots$ und $A_2, B_2, C_2, \cdots$ entsprechende Punkte, oder sind $a_1, b_1, c_1, \cdots$ und $a_2, b_2, c_2, \cdots$ entsprechende Geraden, oder sind k_1 und k_2 entsprechende Kreislinien in zwei entsprechenden Figuren, so muss der Verbindungsgeraden der Punkte $A_1 B_1$, oder dem Schnittpunkte der Geraden $a_1 b_1$, oder irgend welcher Kreislinien auch jedenfalls eine Verbindungsgerade der Punkte $A_2 B_2$, oder ein Schnittpunkt der Geraden $a_2 b_2$, oder der entsprechenden Kreislinien entsprechen. Da aber zwischen zwei Punkten nur eine einzige Verbindungslinie, und zwischen zwei Geraden nur ein einziger Schnittpunkt existiert, da ferner gleiche Strecken oder gleiche Winkel stets kongruent sind, und ebenso Kreislinien mit gleichem Radius ebenfalls kongruent sind, — so muss der Verbindungsgeraden und der Verbindungsstrecke $A_1 B_1$ auch die einzige Verbindungsgerade und Verbindungsstrecke $A_2 B_2$ entsprechen, sowie dem Schnittpunkt und dem Schnittwinkel $(a_1 b_1)$ auch der ein-

zige Schnittpunkt und Schnittwinkel (a_2 b_2) entsprechen u. s. w.

Erkl. 110. Satz 45a ist von Satz 45 eine allgemeine Ausdrucksweise, welche den ersteren in sich schliesst. Der Beweis für Satz 45a stützt sich auf 45 und auf Erkl. 109. Jede allgemeine Gruppe von Elementen lässt sich nämlich ansehen als zusammengesetzt von lauter einzelnen Dreiecken mit ihren Punkten, Geraden, Strecken, Winkeln, samt einzelnen Kreisbogen; und wenn diese nach den vorherigen Sätzen einzeln kongruent sind, so müssen sie auch nach Satz 1 als Gesamtheit kongruente Gruppen von Elementen bilden.

kongruente Dreiecke oder Vielecke.

Satz 45a. In entsprechenden Figuren bilden irgend welche Gruppen entsprechender Punkte, Geraden, Strecken, Winkel, Kreise, Kreisbogen, auch als ganze Gesamtheit entsprechende kongruente Gebilde.

C. Ueber die einfachen Vielecke.

1) Ueber das Dreieck.

a) Ueber die Seiten und Winkel des allgemeinen Dreiecks.

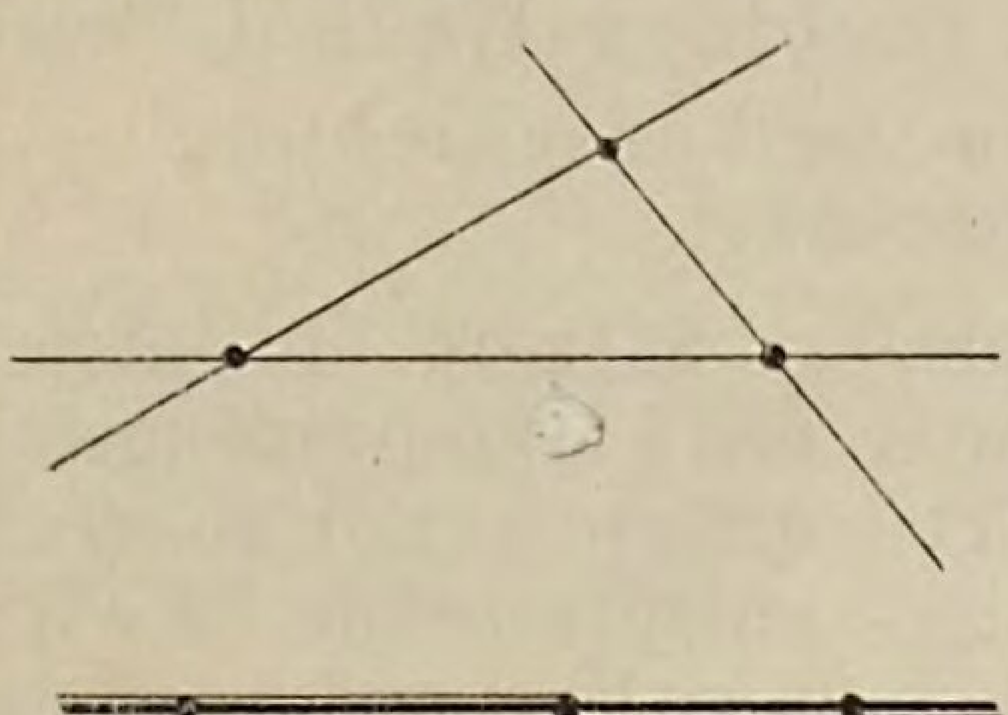
Frage 69. Wie kann man sich ein Dreieck entstanden denken?

Antwort. Man kann sich ein Dreieck auf zweierlei Arten entstanden denken:

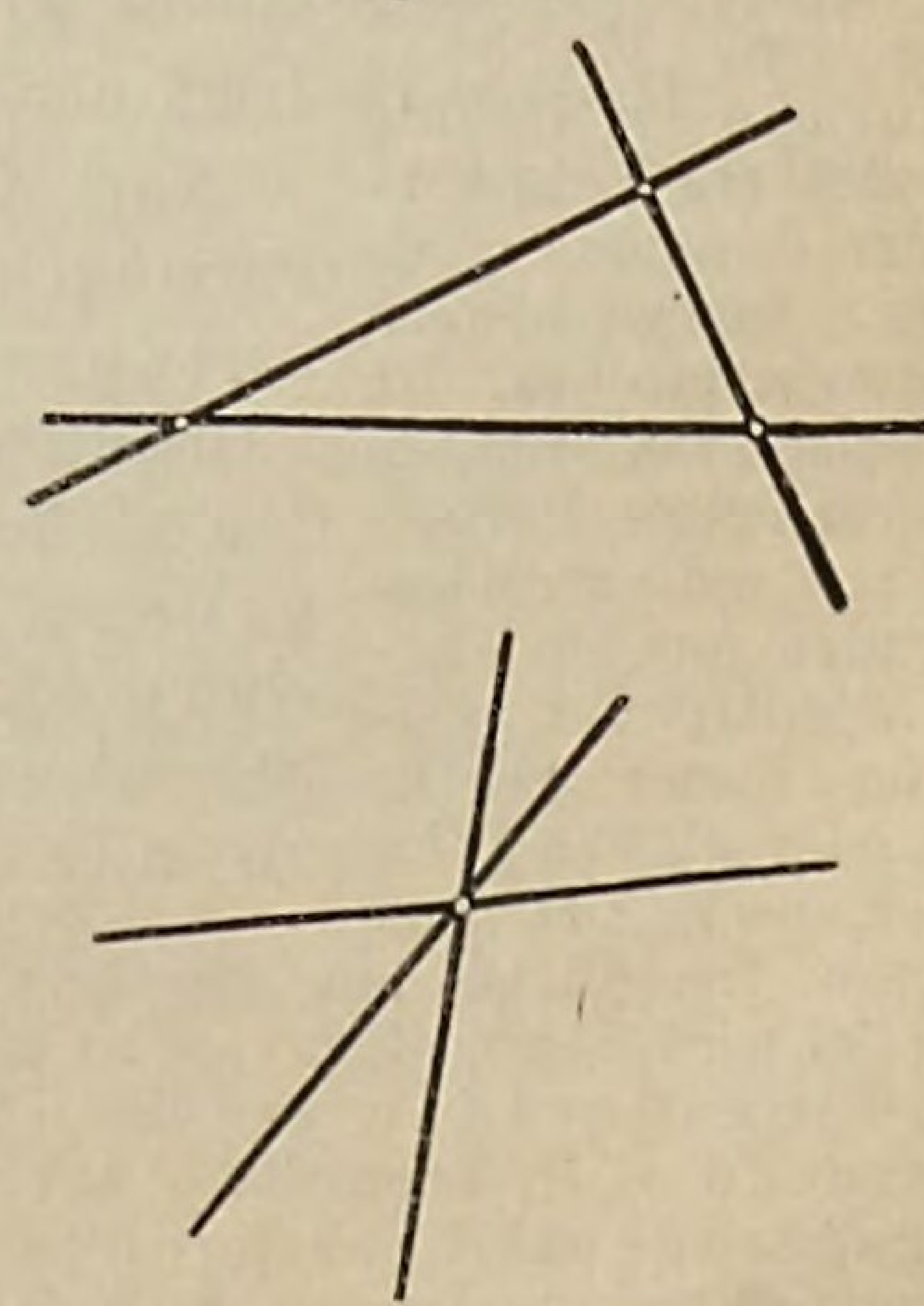
Entweder als eine Gruppe von drei Punkten, welche durch drei gerade Linien verbunden sind (s. Figur 45);

oder als eine Gruppe von drei geraden Linien, welche einander in drei Punkten durchschneiden (siehe Figur 46).

Figur 45.



Figur 46.



Erkl. 111. Wie schon aus der Erklärung der Entstehungsweise hervorgeht, kann kein Dreieck entstehen, wenn die drei Punkte auf einer und derselben geraden Linie liegen, d. h. wenn der dritte Punkt auf derselben Geraden liegt, welche durch die beiden ersten bestimmt wird; denn dann gäbe es nicht drei, sondern nur eine einzige Verbindungslinie. Ebensowenig entsteht ein Dreiseit, wenn die drei Geraden schon durch einen Punkt gehen, d. h. wenn die dritte Gerade durch denselben Punkt geht, in welchem sich die beiden ersten durchschneiden (s. Fig. 45 u. 46).

Erkl. 112. Bei der Zeichnung eines Dreiecks sind also nur die beiden ersten Punkte oder die beiden ersten Geraden vollständig willkürlich; für die Wahl des dritten Punktes bezw. der dritten Geraden ist schon die Einschränkung vorhanden, dass der dritte Punkt nicht die gleiche Gerade

mit den beiden ersten, oder die dritte Gerade nicht den gleichen Punkt mit den beiden ersten bestimmt.

Erkl. 113. Umgekehrt wird es künftig immer als ein besonders merkwürdiger Fall anzusehen sein, wenn drei nach getrennter Entstehungsweise erzeugte Punkte auf derselben Geraden liegen, oder wenn drei in getrennter Entstehungsweise erzeugte Geraden durch denselben Punkt gehen. Man sehe darüber z. B. den Abschnitt über die „besonderen Punkte im Dreieck" im vierten Teile dieses Lehrbuches.

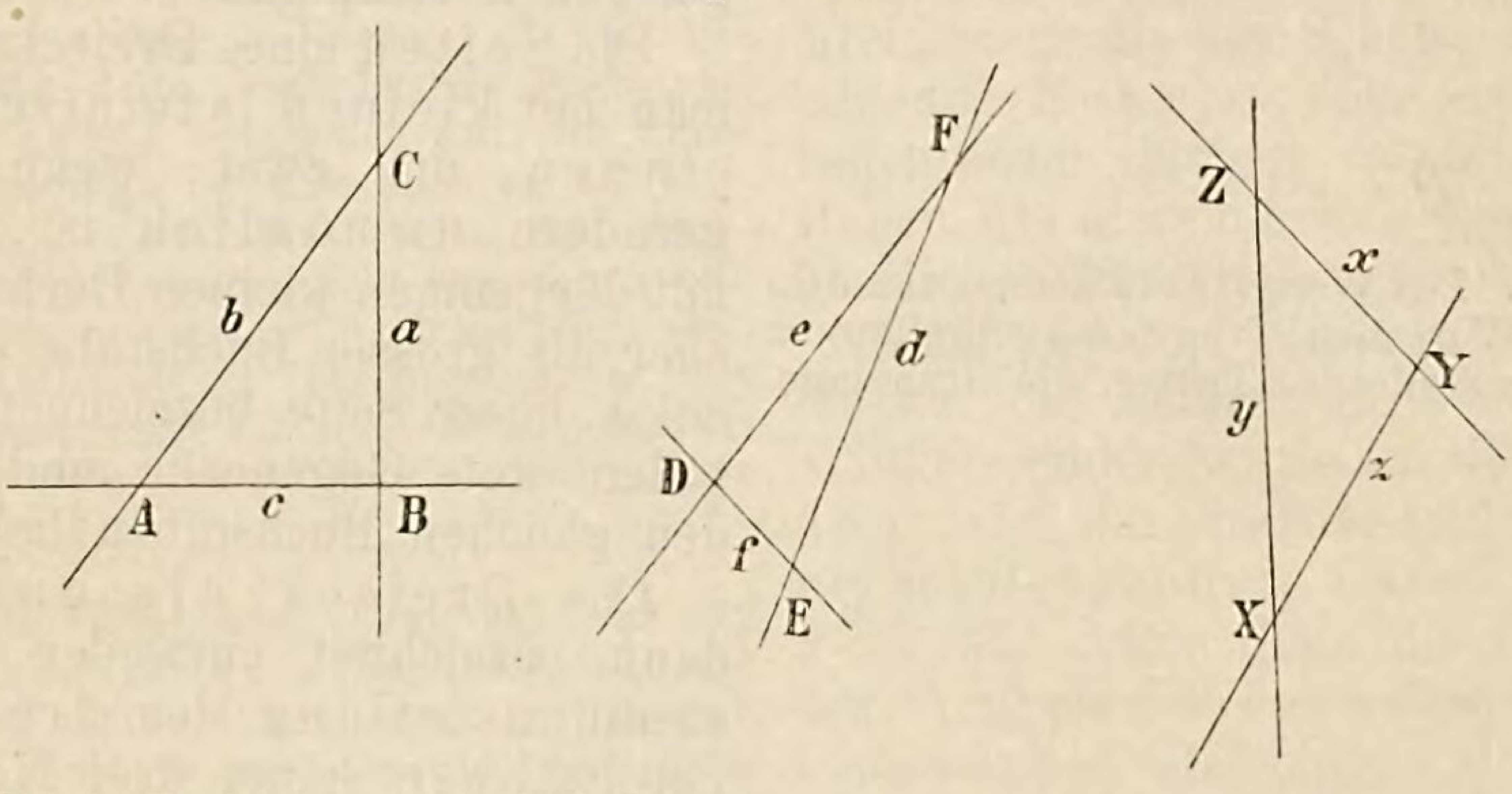
Erkl. 114. Bei Vielecken von mehr als drei Seiten ist die eindeutige Uebereinstimmung des Punktgebildes und Liniengebildes nicht mehr vorhanden. Vielmehr können nach Antwort auf Frage 6 durch n verschiedene Punkte oder n verschiedene Geraden je

$$(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdots 5\cdot 4\cdot 3$$

verschiedene n-Ecke bezw. n-Seite bestimmt werden.

Die nach der ersteren Art entstehende Figur heisst insbesondere **Dreieck**, die nach der zweiten Art erzeugte Figur heisst auch Dreiseit. Da aber beide Figuren vollständig übereinstimmen, so wird die Bezeichnung der Figur als Dreieck fast ausschliesslich angewendet, diejenige als Dreiseit nur dann, wenn die Entstehung derselben als Liniengebilde (siehe den ersten Abschnitt dieses Teiles) ausdrücklich hervorgehoben werden soll.

Figur 47.



Frage 70. Welches sind die Elemente eines Dreiecks und wie werden dieselben bezeichnet?

Erkl. 115. Die Dreiecke in Figur 47 werden nach der nebenstehenden Auseinandersetzung bezeichnet als:

Dreieck ABC, $\triangle DEF$, $\triangle XYZ$

oder:

Dreieck abc, $\triangle def$, $\triangle xyz$;

ihre Ecken heissen:

Ecke A, Ecke B, Ecke C; D, E, F; X, Y, Z;

ihre Seitenlinien sind:

Linie a, Linie b, Linie c; Seite d, Seite e, Seite f; x, y, z.

Ecke A ist „Gegenecke" der Seite a, B von b, C von c.

Seite d ist „Gegenseite" der Ecke D, e von E, f von F.

Antwort. Die Elemente eines Dreiecks sind seine drei Punkte und seine drei Geraden. Die Punkte heissen die Ecken oder Eckpunkte des Dreiecks, die drei Geraden (als unbegrenzte Linien) heissen die Seiten des Dreiecks oder die Dreiecksseiten.

Die beiden Dreiecksseiten, welche sich in einer bestimmten Ecke treffen, heissen die dieser Ecke anliegenden oder die anstossenden Seiten; die dritte Seite heisst die „nicht anliegende" Seite, oder die gegenüberliegende Seite, oder die Gegenseite jener Ecke. Ebenso heisst diejenige

Ist c Grundseite, so ist C Spitze,
für Grundseite a ist Spitze A,
bei Grundseite b ist Spitze B;

und umgekehrt:

ist F Spitze, so ist f Grundseite oder Basis,
für Spitze D ist Grundseite d,
bei Spitze E ist Grundseite e.

Erkl. 116. Sind an derselben Figur die gleichen Punkte oder Geraden an der Bildung verschiedener Dreiecke beteiligt, so kann die Gleichartigkeit der Bezeichnung von Gegenecken und Gegenseiten mit denselben Buchstaben nicht aufrecht erhalten bleiben, und die Benennung muss daher durch andere Buchstaben geschehen.

Erkl. 117. Das Wort Basis kommt von dem griechischen Wort βάσις (von βαίνω schreiten) = der Tritt, die Stelle des Trittes, die Grundlage.

Ecke, welche auf einer bestimmten Seite nicht gelegen ist, die „gegenüberliegende“ Ecke oder die Gegenecke jener Seite.

In manchen Fällen wird irgend eine Seite eines Dreiecks als Grundlinie, oder Grundseite, oder Basis bezeichnet; dann heisst die Gegenecke der Grundseite die Spitze des Dreiecks.

Man bezeichnet die Eckpunkte eines Dreiecks mit grossen lateinischen Buchstaben, und zwar, wenn nicht ausdrückliche Gründe dagegen vorliegen, in der Weise, dass nach der alphabetischen Reihenfolge der Buchstaben das Dreieck in der positiven Umlaufsrichtung, also gegen die Uhrzeigerdrehung umlaufen wird. Dabei setzt man gewöhnlich den ersten Buchstaben an einen in der Richtung nach links und unten gelegenen Eckpunkt.

Die Seiten eines Dreiecks bezeichnet man mit kleinen lateinischen Buchstaben, und zwar, wenn dies nicht geradezu unmöglich ist, jede Seite mit demjenigen kleinen Buchstaben, welcher als grosser Buchstabe die Gegenecke dieser Seite bezeichnet. Demnach sollen stets Gegenecke und Gegenseite den gleichen Buchstaben haben.

Das Dreieck als ganzes wird dann bezeichnet entweder durch Zusammenstellung der drei grossen Buchstaben seiner drei Ecken, oder der drei kleinen Buchstaben seiner drei Seiten, mit oder ohne Voranstellung des Wortes „Dreieck“ oder des Zeichens △.

Frage 71. Welche Massgrössen können bei einem Dreieck in Betracht kommen, und wie werden dieselben bezeichnet?

Erkl. 118. Ueber die Bezeichnung von Gegenseiten und Gegenwinkeln, Winkeln an der Grundseite und an der Spitze gilt auch hier das in Erkl. 115 ausgeführte.

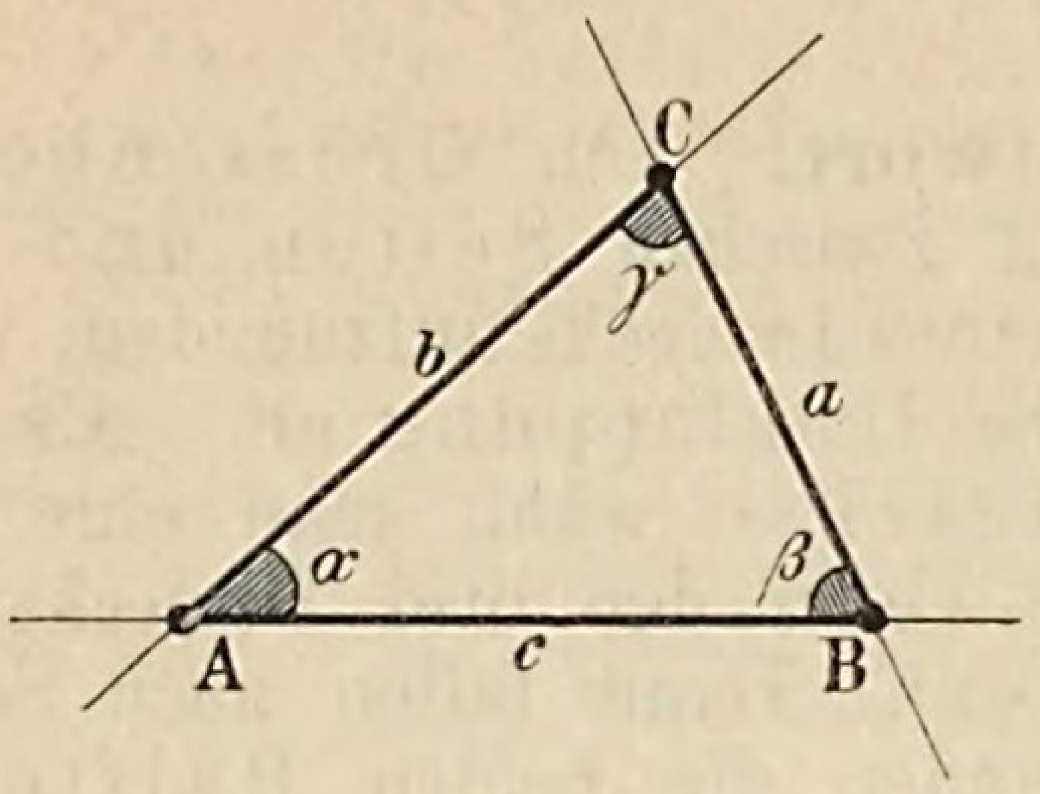
Antwort. Bei einem Dreieck können dreierlei Massgrössen in Betracht gezogen werden, nämlich:

1) die Längenmasse der auf seinen Geraden durch seine Eckpunkte ausgeschnittenen Strecken;

2) die Winkelmasse der von seinen Seiten eingeschlossenen Winkel;

3) die Flächenmasse des von seinen Seiten eingeschlossenen Flächenteiles.

Figur 48.



Erkl. 119. Die bei einem Dreieck vorkommenden Massgrössen der Längen, Winkel oder Flächen werden auch als die Bestimmungsstücke des Dreiecks bezeichnet, und insbesondere nennt man die drei Seiten und die drei Winkel des Dreiecks die Stücke des Dreiecks.

Erkl. 120. Man hat sich zu hüten vor Verwechslungen der Benennung „Seiten“; es ist jeweils aus dem Sinne des ausgesprochenen Satzes zu entnehmen, ob mit dem Worte Seite eine Linie als unbegrenztes geometrisches Grundgebilde gemeint sei, oder eine Strecke als Längenmassgrösse. Ebenso gilt an der Figur der die Seite bezeichnende Buchstabe, wenn er die Linie bezeichnen soll, für deren ganze Erstreckung, ist also auch an die Verlängerungen anzuschreiben; wenn der Buchstabe aber die Strecke allein bezeichnen soll, so darf er nur an diese selbst geschrieben werden, nicht auch an die Verlängerungen. Im Wortlaute kann einige Unterscheidung gesichert werden durch Gebrauch der Worte Grundlinie und Grundseite.

Erkl. 121. Wie nach Erkl. 111 und 112 schon die Grundelemente (Punkte und Gerade) eines Dreiecks nicht vollständig willkürlich sind, so dass deren Wahl gewissen Beschränkungen unterliegt, so sind auch die Massgrössen eines Dreiecks keineswegs ganz willkürlich oder unabhängig. Für die Winkel liegt die Beschränkung in dem Lehrsatze von der Winkelsumme von 180°, für die Seiten siehe Antwort auf Frage 79.

Erkl. 122. Die Beziehungen der Seiten eines Dreiecks unter sich, der Winkel unter sich, der Seiten und Winkel gegen einander, und die daraus hervorgehenden Abhängigkeitsverhältnisse bilden einen Hauptgegenstand der Geometrie. Ein verhältnismässig kleiner Teil derselben wird erledigt in der elementaren Planimetrie, ein grösserer bleibt als Aufgabe der ebenen Goniometrie und Trigonometrie (siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie).

Die auf den Dreiecksseiten zwischen je zwei Ecken des Dreiecks liegenden Strecken heissen die Seitenstrecken oder kurz auch nur die Seiten des Dreiecks — sie werden also benannt und gleichzeitig auch bezeichnet mit denselben Namen und auch Buchstaben wie die (unbegrenzte Linien darstellenden) Dreiecksseiten, auf welchen sie enthalten sind.

Die zwischen je zwei Seitenstrecken des Dreiecks eingeschlossenen Winkel heissen die Dreieckswinkel (siehe über dieselben den Abschnitt „über die Winkel der Vielecke“ im zweiten Teile dieses Lehrbuches). Dieselben werden bezeichnet entweder durch den grossen lateinischen Buchstaben desjenigen Eckpunktes, an welchem der Winkel liegt, oder durch denjenigen kleinen griechischen Buchstaben, dessen gleichbedeutender grosser lateinischer die den Scheitel des Winkels bildende Ecke — oder dessen gleichbedeutender kleiner lateinischer Buchstaben die diesem Scheitelpunkte gegenüberliegende Seite bezeichnet (s. Fig. 48).

Auch bei den Winkeln des Dreiecks heissen die beiden die Schenkel eines Winkels bildenden Seiten die anliegenden, oder die anstossenden, oder die einschliessenden Seiten dieses Winkels, die dritte Seite die Gegenseite des Winkels, dieser selbst anliegender, anstossender, oder eingeschlossener Winkel der ersteren, oder Gegenwinkel seiner Gegenseite (beide letztern mit gleichbedeutenden lateinischen und griechischen Buchstaben bezeichnet). Wird eine der drei Seiten als Grundseite bezeichnet, so heissen die beiden an derselben anliegenden Dreieckswinkel „Winkel an der Grundseite“ oder „Basiswinkel“, der dritte Winkel heisst „Winkel an der Spitze“, wobei der „Winkel an der Spitze“ natürlich ein spitzer, aber ebensowohl auch ein rechter oder stumpfer sein kann.

Der zwischen den drei Seiten eingeschlossene Flächenteil heisst „Fläche des Dreiecks“ (siehe hierüber den fünften Teil dieses Lehrbuches).

Frage 72. Wie verfährt man, um Grössenbeziehungen zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks aufzufinden?

Antwort. Um Grössenbeziehungen zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks aufzufinden, wendet man die Umklappung an. Als Symmetrieachse wählt man eine Linie, welche einen der drei Dreieckswinkel halbiert. Dann fallen nach Satz 11 aufeinander die beiden Hälften des Winkels, also auch die Richtungen seiner Schenkel, und es können in Bezug auf die Länge dieser Seitenstrecken die drei Fälle eintreten, dass nämlich der umgewendete Schenkel oder Winkel 1) kleiner, 2) gleichgross, 3) grösser ist, wie derjenige, auf welchen er zu liegen kommt.

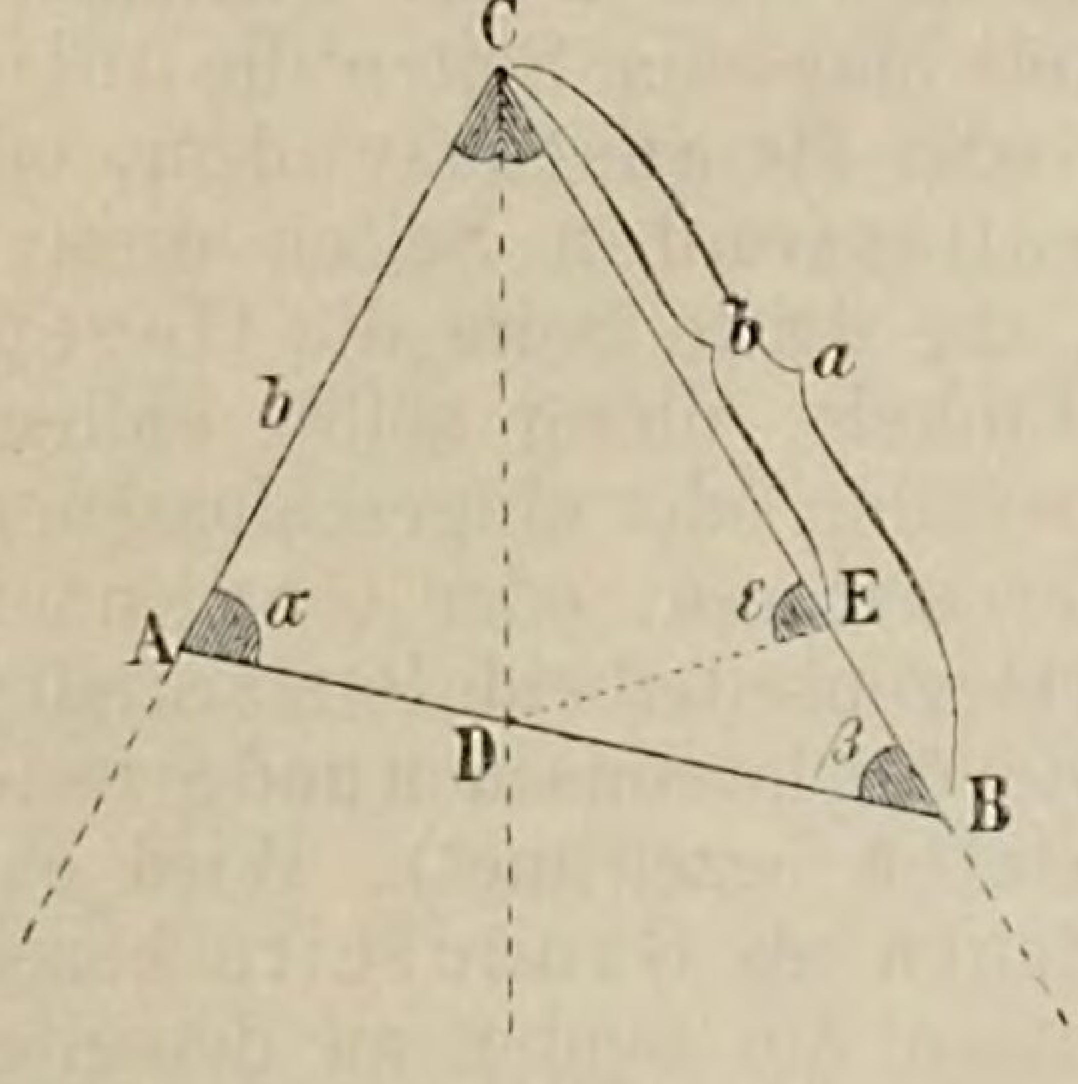
Erkl. 123. Man braucht ausser dem Falle gleicher Seiten nur den einen der beiden andern zu untersuchen, da in beiden Fällen genau die gleiche Figur entsteht auf derjenigen Halbebene, auf welche hinübergeklappt wird (vergl. Erkl. 25).

Frage 73. Zu welchen Vorstellungen gelangt man, wenn bei der Umklappung eines Dreiecks um die Halbierungslinie eines Winkels eine kleinere Seite auf eine grössere zu liegen kommt?

Antwort. Wenn in dem Dreieck ABC, Figur 49, um die Halbierungslinie CD des Winkels C oder $\sphericalangle \gamma$ umgeklappt wird, so behält die Linie CD als Symmetrieachse ihre Lage unverändert bei, Winkel $DCA = \frac{\gamma}{2}$ fällt auf Winkel $DCB = \frac{\gamma}{2}$, Strahl CA fällt der Richtung nach auf Strahl CB, nicht aber auch die Strecke CA auf Strecke CB. Ist nämlich die Voraussetzung gemacht, dass CA kleiner als CB sei, so kann Strecke CA nur einen Teil der Strecke CB bedecken, etwa das Stück CE; demnach fällt Punkt A auf Punkt E, also das ganze Dreieck CDA auf das Dreieck CDE, und dessen Seite DA auf Strecke DE, Winkel $DAC = \alpha$ auf $\sphericalangle DEC = \varepsilon = \alpha$.

Dieser Winkel ε, welchem der $\sphericalangle \alpha$ gleich ist, bildet aber für das kleine Dreieck DBE, welchem der $\sphericalangle \beta$ angehört, einen Aussenwinkel. Nach Lehrsatz 18 des zweiten Teiles ist daher $\sphericalangle \varepsilon$ gleich der Summe der beiden Innenwinkel bei den Eckpunkten B und D des Dreiecks BDE, also gleich $\sphericalangle \beta$

Figur 49.



Erkl. 124. Will man die sämtlich möglichen Zusammenstellungen je zweier Dreiecksseiten in der nebenstehenden Weise untersuchen, so muss man nach einander um jede der Halbierungslinien eines der drei Dreieckswinkel umklappen; dabei ist stets die eine der beiden anstossenden Seiten die kleinere, die andere die grössere (die Gleichheit bleibt ausgeschlossen, da sie später besonders betrachtet wird, siehe Frage 87 u. ff.). Dann ergibt sich stets in der nebenstehenden Art und Weise, dass mit der umgeklappten kleineren Seite der grössere Winkel hinübergeklappt wird.

Erkl. 125. Die durch Antwort auf Frage 73 und nachher Satz 46 aufgestellte enge Beziehung zwischen je einer Dreiecksseite und ihrem Gegenwinkel ist mit Veranlassung für die in Antwort auf Frage 70 und 71 auseinandergesetzte Bezeichnungsweise der Gegenseiten und Gegenecken bezw. Gegenwinkel eines Dreiecks mit gleichbedeutenden lateinischen bezw. griechischen Buchstaben. Da beim Viereck und Vieleck eine solche enge Beziehung nicht mehr vorhanden ist, so pflegt man dort auch andere Bezeichnungen anzuwenden.

plus einem weiteren Winkel, jedenfalls ε grösser als β. Ist aber $\sphericalangle \varepsilon$ grösser als $\sphericalangle \beta$, so muss auch der mit dem $\sphericalangle \varepsilon$ gleichgrosse $\sphericalangle \alpha$ grösser sein als $\sphericalangle \beta$: und zwar infolge dessen, dass die ihm anliegende Dreiecksseite b kleiner war, als die dem $\sphericalangle \beta$ anliegende Seite a, oder als Folge dessen, dass die Gegenseite a des Winkels α grösser war, als die Gegenseite b des Winkels β. Umgekehrt aber ist $\sphericalangle \beta$ auch deswegen kleiner als $\sphericalangle \alpha$, weil die Gegenseite b des Winkels β kleiner ist, als die Gegenseite a des Winkels α.

Frage 74. Welche allgemeine Beziehung zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks ergibt sich aus den in der Antwort auf die vorige Frage 73 gewonnenen Vorstellungen?

Erkl. 126. Die allgemeine Gültigkeit des nebenstehenden Lehrsatzes geht hervor aus Erkl. 124, sowie aus folgender Ueberlegung:

Angenommen, die Seiten eines Dreiecks seien der Grösse nach absteigend geordnet l, m, n, also dass $l > m > n$.

Dann folgt:

1) wegen $l > m$, dass auch $\sphericalangle \lambda > \mu$: durch Umklappung um die Halbierende des $\sphericalangle \nu$;

2) wegen $l > n$, dass auch $\sphericalangle \lambda > \nu$: durch Umklappung um die Halbierende des $\sphericalangle \mu$; und

3) wegen $m > n$, dass auch $\sphericalangle \mu > \nu$: durch Umklappung um die Halbierende des $\sphericalangle \lambda$.

Also ist wegen $l > m > n$ auch $\lambda > \mu > \nu$.

Man kann daher auch sagen: die Grössenfolge der drei Dreiecksseiten ist auch die Grössenfolge der Gegenwinkel.

Antwort. Aus der vorigen Antwort ergibt sich als eine für jedes beliebige Dreieck gültige Beziehung:

Satz 46. In jedem Dreieck liegt einer grösseren Seite auch ein grösserer Winkel gegenüber,

einer kleineren Seite liegt ein kleinerer Winkel gegenüber;

also der grössten Seite der grösste Winkel,

der kleinsten Seite der kleinste,

der mittleren Seite der mittlere Winkel.

Frage 75. Zu welchen Vorstellungen gelangt man, wenn bei der Umklappung eines Dreiecks ein grösserer Winkel nach der Seite eines kleineren zu liegen kommt?

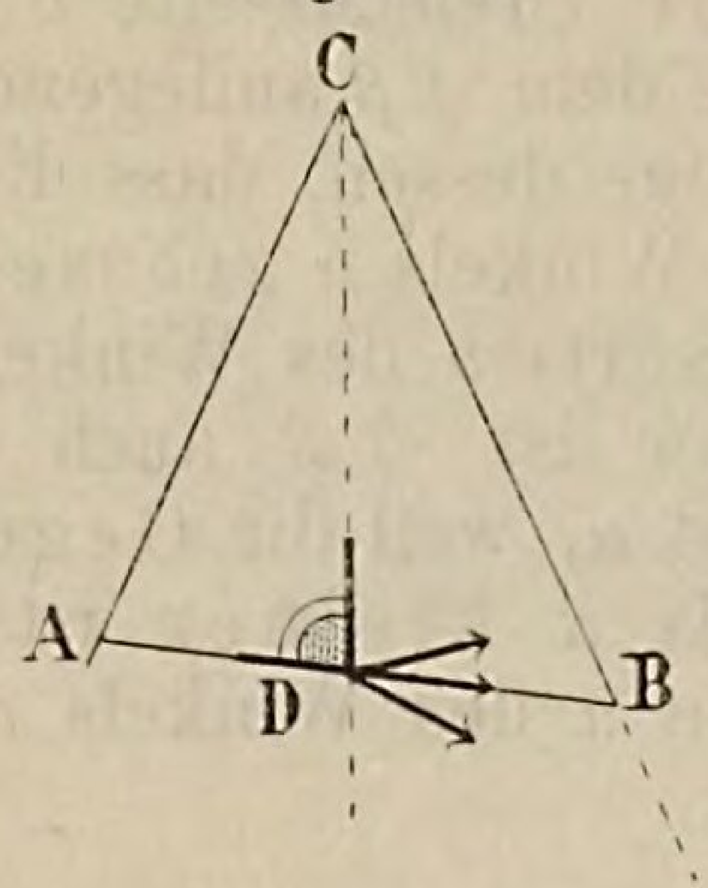
Erkl. 127. Man vergleiche über die indirekte Beweisführung, was in der Erkl. 115 des zweiten Teiles über dieselbe ausgeführt wurde.

Erkl. 128. Wie aus der Antwort der Fragen 75 und 73 hervorgeht, bildet die einfache Umwendung des Dreiecks ABC in Antwort auf Frage 73 die Grundlage für die gesamten in den Antworten auf die Fragen 73 bis 81 ab-

Antwort. 1) **Indirekter Beweis:** Angenommen die Gegenseite des grösseren Winkels wäre nicht grösser, als die Gegenseite des kleineren Winkels, dann müsste nach Satz 46 auch der dieser Seite gegenüberliegende Winkel der kleinere sein. Nach der Annahme der Frage 75 soll aber dieser Winkel der grössere sein: also ist es nicht anders möglich, als dass auch

geleiteten Eigenschaften des Dreiecks — ein Beweis für die Wichtigkeit der Beweismethode durch Umwendung.

Figur 50.



Erkl. 129. Auch die nebenstehende Untersuchung kann an jedem Dreieck dreimal durchgeführt werden, indem jeweils um eine andere Halbierungslinie umgeklappt wird, um so zu finden, welche der anstossenden Seiten die kleinere ist. Jedesmal ergibt sich daraus, dass diejenige Seite die kleinere ist, deren Gegenwinkel der kleinere war.

Erkl. 130. Nennt man wieder die drei Winkel eines Dreiecks in absteigender Reihenfolge λ, μ, ν, also dass $\lambda > \mu > \nu$, so folgt:

1) wegen $\lambda > \mu$, dass auch $l > m$: durch Umklappung um die Winkelhalbierende von $\sphericalangle \nu$;

2) wegen $\lambda > \nu$, dass auch $l > n$: durch Umklappung um die Winkelhalbierende des $\sphericalangle \mu$;

3) wegen $\mu > \nu$, dass auch $m > n$: durch Umklappung um die Winkelhalbierende des $\sphericalangle \lambda$.

Also ist wegen $\lambda > \mu > \nu$ auch $l > m > n$.

Erkl. 131. Der Nachweis für andere Paare von Winkeln und Seiten, als das dem nebenstehenden Beweise zu Grunde liegende, kann mit diesem wörtlich gleichgemacht werden, wenn man unter Beibehaltung derselben Figur die Buchstaben an den Ecken, Seiten und Winkeln vertauscht. Umgeklappt wird dabei stets um die Halbierungslinie desjenigen Winkels, welcher dem Vergleiche gerade nicht unterworfen wird, also um die Halbierungslinie des „dritten Winkels“, bezw. für den vorhergehenden Beweis um die Halbierungslinie des Gegenwinkels der „dritten Seite“.

die dem grösseren Winkel gegenüberliegende Seite die grössere ist.

2) **Direkter Beweis.** Wenn in dem Dreieck ABC, Figur 50, um die Halbierungslinie CD des Winkels γ bei C umgeklappt wird, so behält wieder die Linie CD als Symmetrieachse ihre Lage unverändert bei, Winkel $DCA = \frac{\gamma}{2}$ fällt auf Winkel $DCB = \frac{\gamma}{2}$, Strahl CA fällt der Richtung nach auf Strahl CB; ob dies aber auch der Grösse nach geschehen kann, hängt davon ab, wohin Punkt A fällt, letzteres selbst aber wird entschieden durch die neue Lage der Strecke DA. Man hat also zu untersuchen, ob Strahl DA auf DB, oder oberhalb DB gegen Punkt C hin, oder unterhalb DB von Punkt C weg zu liegen kommt. Dies aber hängt ab von der Grösse des Winkels CDA. Ist dieser gleich CDB, so muss Schenkel DA auf DB fallen; ist er kleiner als CDB, so kann er den $\sphericalangle CDB$ nicht vollständig bedecken, sondern sein Schenkel DE muss innerhalb des Winkels CDB verlaufen; ist $\sphericalangle CDA$ dagegen grösser als $\sphericalangle CDB$, so muss sein Schenkel DE ausserhalb des Schenkels DB zu liegen kommen.

Nun lässt sich aber aus der Voraussetzung, dass $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$ sein soll, leicht erschliessen, dass dann $\sphericalangle CDA < \sphericalangle CDB$ sein muss. Es ist nämlich wegen der Dreieckswinkelsumme im Dreieck CDA der

$$\sphericalangle CDA = 180^0 - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = \left(180^0 - \frac{\gamma}{2}\right) - \alpha,$$

und im Dreieck CDB ist

$$\sphericalangle CDB = 180^0 - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = \left(180^0 - \frac{\gamma}{2}\right) - \beta.$$

Es entsteht also $\sphericalangle CDA$ dadurch, dass von der Grösse $\left(180^0 - \frac{\gamma}{2}\right)$ ein grösserer Winkel (α) abgezogen wird als jener (β), dessen Subtraktion den $\sphericalangle CDB$ liefert. Daher ist $\sphericalangle CDA < CDB$, Schenkel DA fällt in den $\sphericalangle CDB$ hinein, Strecke $DE = DA$ schneidet CB oberhalb B gegen Punkt C hin, also fällt Punkt E innerhalb Strecke CB, und es muss $CE = CA = b$ kleiner sein als

$CB = a$: und dies, weil der der Seite b gegenüberliegende Winkel β kleiner war, als der der Seite a gegenüberliegende Winkel α. Umgekehrt ist also auch wieder die Seite a die grössere, weil ihr Gegenwinkel α der grössere ist.

Frage 76. Welche allgemeine Beziehung zwischen Winkeln und Seiten eines Dreiecks ergibt sich aus den in der Antwort auf die vorige Frage 75 gewonnenen Vorstellungen?

Erkl. 132. Entsprechend Erkl. 126 kann man auch sagen, die Grössenfolge der Dreieckswinkel ist auch die Grössenfolge der Gegenseiten, wodurch die gegenseitige Abhängigkeit der Sätze 46 und 47 noch deutlicher ausgedrückt ist.

Antwort. Aus der vorigen Antwort ergibt sich als eine für jedes beliebige Dreieck geltende Beziehung:

Satz 47. In jedem Dreieck liegt einem grösseren Winkel auch eine grössere Seite gegenüber,
einem kleineren Winkel liegt eine kleinere Seite gegenüber;

also dem grössten Winkel die grösste Seite,
dem kleinsten Winkel die kleinste Seite,
dem mittleren Winkel die mittlere Seite.

Frage 77. Welche Folgerungen ergeben sich aus dem vorigen Satz 47 für solche Dreiecke, über deren Winkelgrössen schon bekannte Beziehungen vorliegen?

Erkl. 133. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite wird gewöhnlich als unterste Seite des Dreiecks gezeichnet, so dass sie unter dem rechten Winkel liegt, während die beiden andern Seiten dem rechten Winkel anliegen. Daher heisst die Gegenseite des rechten Winkels Hypotenuse vom griechischen *ὑποτείνω* = darunterspannen, also *ὑποτείνουσα* die unterspannende, und mit medialer Bedeutung die sich darunterspannende (zu ergänzen *γραμμή* = Linie). Die anliegenden Seiten heissen Katheten vom adverbium verbale *καθετός* des Verbums *καθίημι* = daranlegen, also *καθετὴ γραμμή* = die angelegte, die anliegende Seite.

Antwort. Solche Dreiecke, über deren Winkelgrössen schon bekannte Beziehungen vorliegen, sind das rechtwinklige und das stumpfwinklige. In diesen ist nämlich wegen der Winkelsumme bekannt, dass der rechte bezw. der stumpfe Winkel der grösste Winkel ist. Daher erhält man als unmittelbare Folgerung aus Satz 47:

Satz 48. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse grösser als jede der beiden Katheten.

Satz 48a. Im stumpfwinkligen Dreieck ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die grösste.

Frage 78. Welche Ergebnisse liefern die Sätze 46 bis 48 für die Beziehungen zwischen der Summe oder Differenz zweier Seiten und der dritten Seite?

Antwort. Bezeichnet man ähnlich wie in Erkl. 126 die Seiten eines Dreiecks in aufsteigender Reihenfolge mit a, b, c, so dass $a < b < c$ ist, so lassen sich drei verschiedene Summen oder Differenzen zu zweien bilden, nämlich:

$$c \pm a, \quad c \pm b, \quad b \pm a,$$

und vergleichen mit der jeweiligen dritten Seite:

$$b, \quad a, \quad c.$$

Da nun nach Voraussetzung c die grösste Seite ist, so muss schon c allein grösser als a oder b sein, also ohne weiteres:

$$1) \ldots c + a > b, \text{ und}$$
$$2) \ldots c + b > a$$

sein.

Zur Vergleichung der grössten Seite c mit der Summe der beiden kleinen a und b ziehe man nun von Punkt C eine Linie h senkrecht auf c. Diese schneidet c in zwei Stücke, p und q. Jedes dieser Stücke bildet mit der Linie h einen rechten Winkel, also mit je einer der Seiten a und b ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem diese Seite a oder b Hypotenuse und daher längste Seite ist. Man erhält also $a > p$ und $b > q$, folglich auch $a + b > p + q$, oder auch:

$$3) \ldots a + b > c.$$

Da ferner in diesen drei Ungleichheiten auf der rechten Seite stets eine einzelne Seite allein steht, so erhält man leicht Werte für die Differenzen, indem man von den vorhandenen Ungleichheiten auf beiden Seiten eine der andern Seiten subtrahiert. So entsteht (siehe Erkl. 136 aus Ungleichung 3):

$$4) \ldots c - a < b$$

und

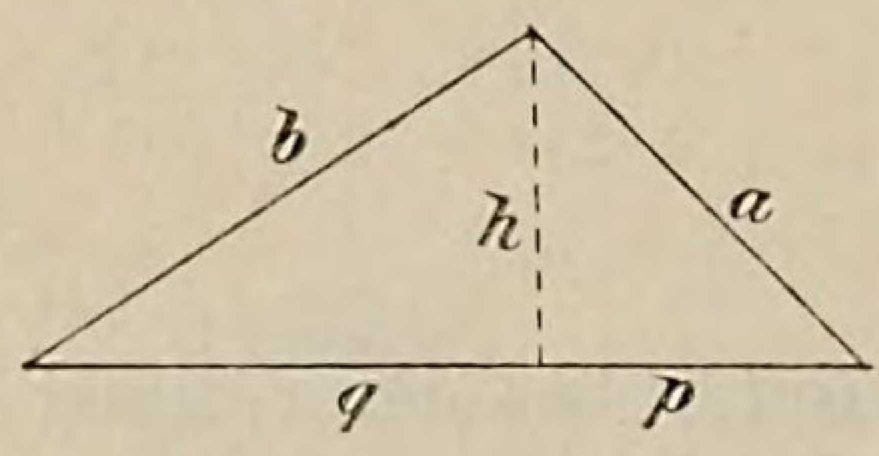
$$5) \ldots c - b < a.$$

Man erhält ebenso:

$$6) \ldots b - a < c,$$

was aber selbstverständlich ist, da ja schon b allein $< c$ ist.

Figur 51.



Erkl. 134. Die drei Grössen a, b, c lassen an sich 6 Summen und 6 Differenzen aufstellen. Unter den 6 Summen sind aber:

$$a + b = b + a, \quad a + c = c + a, \quad b + c = c + b;$$

und unter den 6 Differenzen sind:

$$a - b = -(b - a), \quad a - c = -(c - a),$$
$$b - c = -(c - b);$$

da also $a < b < c$ sein soll, so sind nur drei dieser 6 Differenzen positiv, die drei andern sind von der Betrachtung auszuschliessen.

Erkl. 135. Ein Satz der allgemeinen Grössenlehre heisst:

„Man kann auf beiden Seiten einer Gleichung oder Ungleichung dieselbe Grösse addieren oder subtrahieren, ohne die Gültigkeit des Gleichheits- oder Ungleichheitszeichens zu zerstören."

Erkl. 136. Einzeln ausgeführt liefern die Subtraktionen der zweiten Glieder:

$$\begin{array}{lll} 1)\; c + a > b & 2)\; c + b > a & 3)\; a + b > c \\ \quad\;\, - a = - a & \quad\;\, - b = - b & \quad\;\, - b = - b \\ \hline \quad c > b - a & \quad c > a - b & \quad a > c - b; \end{array}$$

und ebenso die Subtraktion der ersten Glieder:

$$\begin{array}{lll} 1)\; c + a > b & 2)\; c + b > a & 3)\; a + b > c \\ \;\; - c \quad = - c & \;\; - c \quad = - c & \;\; - a \quad = - a \\ \hline \quad a > b - c & \quad b > a - c & \quad b > c - a, \end{array}$$

worunter nach Erkl. 134 wieder nur die drei positiven $c - a$, $c - b$, $b - a$ zu berücksichtigen sind.

Frage 79. Welche allgemeinen Beziehungen zwischen Summe und Differenz zweier Seiten und der dritten Seite liefert die vorige Ueberlegung?

Erkl. 137. Der nebenstehende Satz 49 liefert die in Erkl. 121 angedeutete Beschränkung der Willkürlichkeit bei der Wahl der „Stücke“ eines Dreiecks. Zwei Seiten können willkürlich bestimmt werden; die dritte ist dann nicht mehr vollständig unabhängig, sondern muss einen zwischen der Summe und Differenz der beiden ersten liegenden Wert erhalten.

Antwort. Aus der Antwort auf Frage 78 erhält man folgende allgemein gültige Beziehung zwischen den Seiten eines jeglichen Dreiecks:

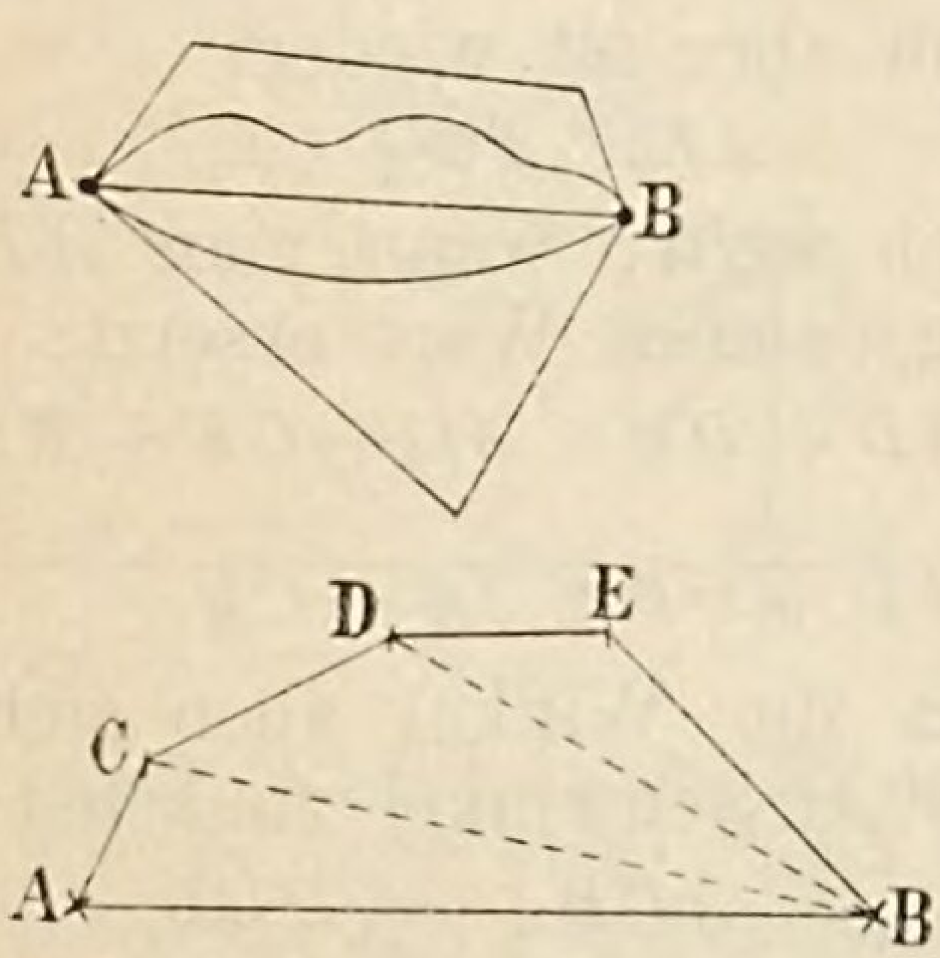
Satz 49. Eine einzelne Seite eines Dreiecks ist stets grösser als die Summe, aber kleiner als die Differenz der beiden andern Seiten.

Oder in anderer Fassung:

Satz 49a. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser, die Differenz derselben kleiner als die dritte Seite.

Frage 80. Welche Anwendung gestattet der vorige Lehrsatz 49 auf die Länge verschiedener Wege, welche von einem Punkte zu einem und demselben zweiten Punkte führen?

Figur 52.



Erkl. 138. Die im nebenstehenden Beweise zum erstenmale angewendete Anschauung einer krummen Linie als Grenze einer gebrochenen mit unendlich nahe rückenden Eckpunkten wird später noch weiter vorkommen bei der Betrachtung des Kreisumfangs und -Inhalts (siehe den VIII. Teil dieses Lehrbuches).

Erkl. 139. Schon das bekannte Sprichwort sagt: „Der gerade Weg ist der kürzeste.“ Dass die kürzeste Verbindungslinie als Mass des Abstandes benutzt wird, kommt auch in mehrfachen andern Fällen vor (vergl. Frage 83) und zwar nicht nur in der Planimetrie oder bei Strecken allein.

Antwort. Wenn man zwei Punkte sowohl durch eine gerade Linie, als durch verschiedene gebrochenen oder gekrümmten Linien verbindet, so lässt schon der Augenschein vermuten, dass die gerade Verbindungslinie den kürzesten Verbindungsweg darstelle. Dies lässt sich auf Grundlage des vorigen Lehrsatzes aber auch streng beweisen. Es ist nämlich in Figur 52, wenn man Punkt B der Reihe nach mit $C, D \cdots$ verbindet, zunächst:

1) . . . $AC + CB > AB$

2) . . . $CD + DB > CB$,

also durch Einsetzung dieses grösseren Wertes für CB in 1) noch mehr:

3) . . . $AC + CD + DB > AB$.

Setzt man darin wieder für DB den grösseren Wert $DE + EB$, so entsteht mit verstärkter Ungleichheit:

4) . . . $AC + CD + DE + EB > AB$.

Daher ist jede gebrochene Linie $ACDEB$ länger als die gerade Linie AB. Denkt man sich nun die Eckpunkte C, D, E unbegrenzt nahe aneinander gerückt, so wird die gebrochene Linie $ACDEB$ zu einer gekrümmten Linie,

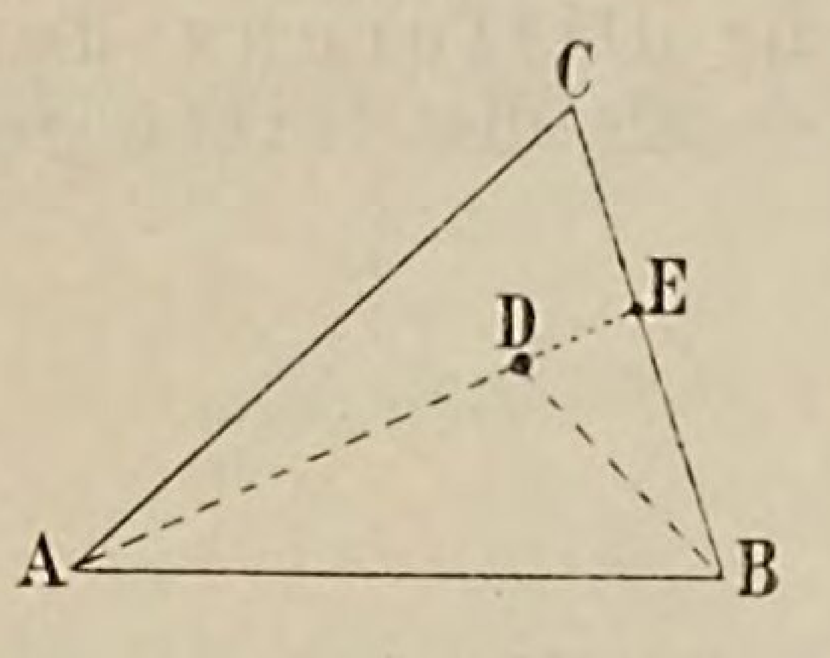
Erkl. 140. Weitere Ausführungen über nebenstehenden Lehrsatz findet man auch noch in den Aufgaben über Kreis, Sehne und Tangente in der Aufgabensammlung am Schlusse des nächsten Teiles dieses Lehrbuches.

und man hat den Nachweis der Richtigkeit erbracht für den

Satz 50. Die Gerade zwischen zwei Punkten ist deren kürzeste Verbindungslinie: sie gibt den **Abstand** oder die **Entfernung** der beiden Punkte an.

Frage 81. Welche Aussagen lassen sich machen über die Abstände eines Punktes innerhalb oder ausserhalb eines Dreiecks von zwei Eckpunkten desselben?

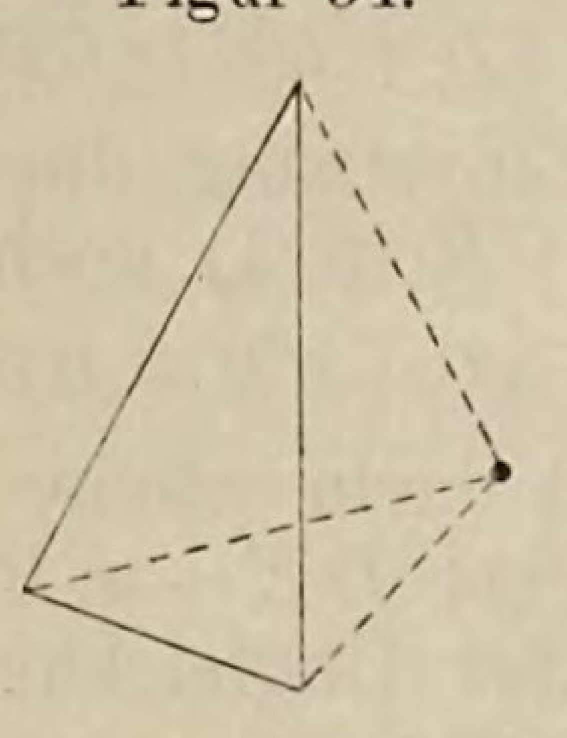
Figur 53.



Erkl. 141. Statt die Strecken AC und CB, sowie AD und DB als Abstände der Punkte C und D von A und B zu betrachten, kann man dieselben auch betrachten als die Seiten zweier Dreiecke ABD und ABC, welche eine Seite gemeinsam haben und kann dann die Sätze 51 und 51a folgendermassen aussprechen:

„Wenn zwei Dreiecke eine Seite gemeinsam haben, und die anliegenden Winkel im ersten Dreieck beide kleiner oder beide grösser sind, als im zweiten, so ist auch die Summe der beiden andern Seiten im ersten Dreieck kleiner oder grösser als im zweiten."

Figur 54.



Erkl. 142. Liegt der Punkt ausserhalb des Dreiecks nicht im Scheitelwinkelraum, sondern in einem Aussenwinkel des Dreiecks, so durchschneiden seine Verbindungslinien mit den Endpunkten der einen Dreiecksseite keine der andern Seiten, dagegen muss die Verbindungslinie mit der dritten Ecke des Dreiecks die Gegenseite durchschneiden. In beiden Fällen (siehe Figur 54) kann nicht ohne

Antwort. 1) Um zunächst die Abstände des Punktes D im Dreieck ABC von den Ecken A und B zu untersuchen, verlängere man eine der Strecken AD oder BD bis zum Schnittpunkt E mit einer Dreiecksseite. Dann sind zu vergleichen die beiden Summen:

$$AC + CB \text{ mit } AD + DB.$$

Nun ist jedenfalls:

$$DB < DE + EB,$$

also auch:

$$AD + DB < AD + DE + EB,$$

oder:

$$AD + DB < AE + EB.$$

Hierin aber ist wieder:

$$AE < AC + CE,$$

also noch mehr, wenn man AE durch diesen grösseren Wert ersetzt:

$$AD + DB < AC + CE + EB,$$

oder:

$$AD + DB < AC + CB.$$

Ueber die Winkel aber sieht man, dass als Aussenwinkel zunächst:

$$\sphericalangle ADB > \sphericalangle DEB,$$

und in gleicher Eigenschaft:

$$\sphericalangle DEB \text{ selbst } > \sphericalangle ACE;$$

also auch:

$$\sphericalangle ADB > \sphericalangle ACB.$$

2) Um die Abstände eines Punktes ausserhalb eines Dreiecks zu untersuchen, betrachte man in derselben Figur 53 den Punkt C als Punkt ausserhalb des Dreiecks ADB und benutze das vorige in umgekehrter Lesung:

$$AC + CB > AD + DB;$$

und ebenso für den Winkel die Umkehrung des vorigen:

$$\sphericalangle ACB < \sphericalangle ADB.$$

weiteres entschieden werden, ob das ursprüngliche Dreieck oder dasjenige mit der Spitze im neugewählten Punkte die grössere Seitensumme hat.

Erkl. 143. Die Verlängerung der Dreiecksseiten selber ist für Satz 51a jedenfalls noch zum Scheitelwinkelraume zugehörig zu betrachten. In den Aussenwinkelräumen gibt es zunächst der gemeinschaftlichen Dreiecksseite derselben einen Raum, dessen Punkte eine kleinere Abstandssumme haben, als die Ecke des Dreiecks. Siehe hierüber im neunten Teile dieses Lehrbuches bei der Lehre von der Ellipse und Aufgabe 41 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Daher erhält man den

Satz 51. Die Summe der Verbindungsstrecken eines Punktes innerhalb eines Dreiecks mit den Endpunkten einer Seite ist stets kleiner als die Summe der beiden andern Seiten, ihr Winkel aber grösser als der Winkel der beiden andern Seiten.

Satz 51a. Die Summe der Verbindungsstrecken eines Punktes im Scheitelwinkelraume eines Dreiecks mit den Endpunkten der Gegenseite ist stets grösser als die Summe der beiden andern Seiten, ihr Winkel aber kleiner als der Winkel der beiden andern Seiten.

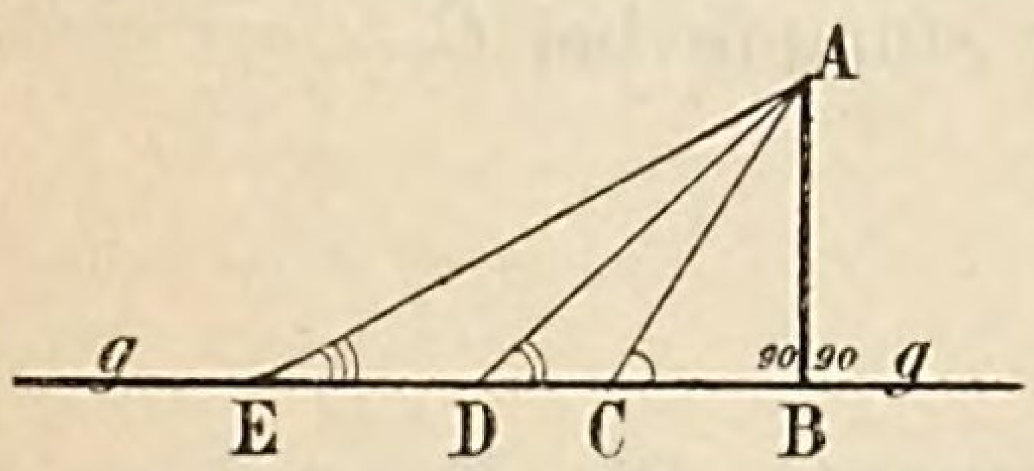
b) Ueber die drei Höhen des Dreiecks.

Frage 82. Zu welchen Ergebnissen führt Satz 48 bei der Vergleichung verschiedener Strecken, welche von einem Punkte ausgehen und auf einer Geraden endigen?

Antwort. Wenn von einem Punkte A nach verschiedenen Punkten einer Geraden g gerade Linien gezogen werden, so bildet darunter diejenige Linie allein einen rechten Winkel, welche von A senkrecht auf g geführt ist. Mit dieser einzigen Senkrechten bildet alsdann jede andere schiefe Linie von A nach g ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem AB Kathete ist, und diese schiefe Linie als Gegenseite des rechten Winkels erscheint. Daher muss jede schiefe Linie von A nach g als Hypotenuse länger sein, als die senkrechte Strecke AB, und jeder Punkt auf der Geraden g, welcher nicht Fusspunkt der Senkrechten AB ist, muss weiter von A entfernt sein, als der Punkt B.

Ferner muss jede der schiefen Linien in dem rechtwinkligen Dreieck, welches sie mit der Senkrechten AB und mit der Linie g bildet, einen spitzen Winkel mit g bilden nach der Seite der Senkrechten hin, also einen stumpfen Nebenwinkel nach der andern Seite. Vergleicht man also eine schiefe

Figur 55.

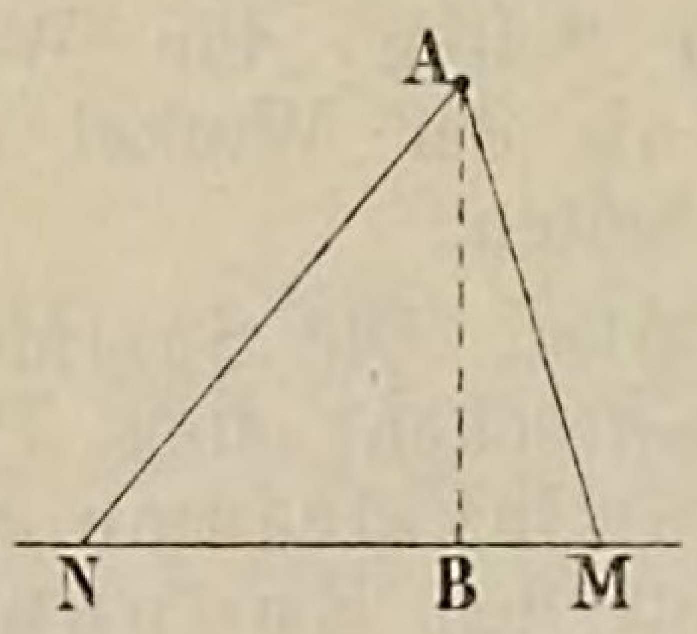


Erkl. 144. Nach Lehrsatz 32 des zweiten Bandes gibt es durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden nur eine einzige Senkrechte auf diese Gerade.

Erkl. 145. Der in nebenstehender Antwort durchgeführte Beweis ist daselbst nur geführt für solche Linien, die alle auf derselben Seite von AB liegen. Es macht jedoch durchaus keine Schwierigkeit, denselben auch auszudehnen auf die nach verschiedenen Seiten von der Senkrechten abweichenden Verbindungsstrecken des Punktes A mit einzelnen Punkten der Linie g. Soll z. B. in Figur 56 die schiefe Linie AM verglichen werden mit AN, so braucht nur das Dreieck ABM um AB als Symmetrieachse umgeklappt zu werden, um auf den vorigen Beweis zurückkommen zu können. Da nämlich beim Umklappen die Strecke AB liegen bleibt, der rechte Winkel ABM auf den rechten Winkel ABN fällt, so beruht der Vergleich wieder

nur auf der Längenunterscheidung der Entfernungen BM und BN. Ist BM die kürzere Strecke, so fällt AM innerhalb AN, wie oben AC innerhalb AD, und der Beweis erhält genau den gleichen Wortlaut.

Figur 56.



Erkl. 146. Die Strecke vom Fusspunkt der Senkrechten bis zum Endpunkt einer schiefen Strecke heisst die „Projektion“ dieser schiefen Strecke auf die Linie g. Es ist also in obigen Figuren 55 und 56:

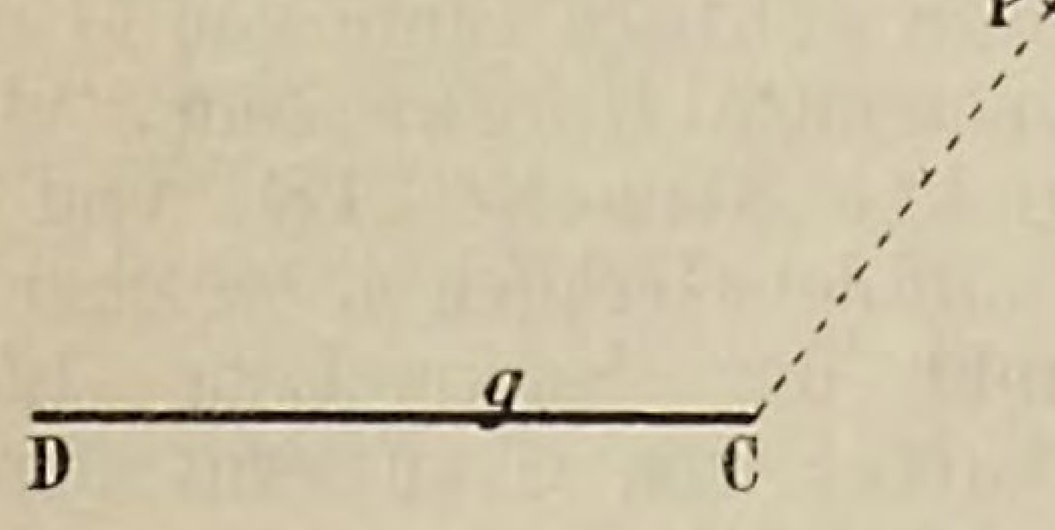
BC die Projektion der Strecke CA auf die Linie g,
BD „ „ „ „ DA „ „ „ „,
BE „ „ „ „ EA „ „ „ „,
BM „ „ „ „ MA „ „ „ „,
BN „ „ „ „ NA „ „ „ „.

Linie AC mit einer zweiten schiefen Linie AD, deren Endpunkt D auf g noch weiter von B entfernt ist als C, so bilden diese beiden schiefen Linien mit g wieder ein Dreieck, welches aber nun einen stumpfen Winkel enthält, gebildet durch g mit derjenigen Senkrechten, deren Endpunkt näher beim Punkte B ist. Folglich ist die andere schiefe Linie AD, deren Endpunkt D weiter von B entfernt ist, Gegenseite des stumpfen Winkels, also länger als AC. Und noch länger wird jede weitere schiefe Linie, $AE\cdots$, sein, deren Endpunkt noch weiter vom Punkte B entfernt ist; je weiter also ein Punkt auf g von B entfernt ist, desto weiter ist er auch von A entfernt.

Vergleicht man ferner die Winkel, welche die verschiedenen schiefen Linien mit g bilden, so zeigt sich, dass der spitze Winkel von C bis E immer kleiner, dagegen der stumpfe Winkel von C bis E immer grösser wird; denn für das Dreieck CAD ist der spitze Winkel bei C als Aussenwinkel grösser als der spitze bei D, dagegen der stumpfe Winkel bei D infolge der gleichen Eigenschaft grösser als der stumpfe bei C.

Frage 83. Wie lassen sich die Ergebnisse der vorigen Antwort in Sätzen aussprechen?

Figur 57.



Erkl. 147. Man muss sich sehr davor hüten, etwa bei der Figur 57, bei welcher von der Geraden g nur das Stück DC gezeichnet vorliegt, die Linie PC als Mass des Abstandes des Punktes P von der Geraden g anzusehen, weil PC die kürzeste derjenigen Strecken ist, welche den Punkt P mit einem noch gezeichnet vorliegenden Punkte der Geraden CD verbindet. Vielmehr tritt in dieser Figur der in Aufgabe 85 des zweiten Teils vorgesehene Fall ein, dass

Antwort. Die Ergebnisse der in voriger Antwort durchgeführten Ueberlegungen kann man zu folgenden Aussagen zusammenfassen:

> **Satz 52.** Von allen Punkten einer geraden Linie g ist der einem bestimmten Punkte P ausserhalb der Geraden zunächstliegende Punkt der Fusspunkt der Senkrechten von P auf G.

Oder in anderer Fassung:

> **Satz 52a.** Unter allen Strecken von einem Punkte nach einer geraden Linie ist die Senkrechte die kürzeste: sie gibt den **Abstand** oder die **Entfernung** des Punktes von der Geraden an.

die Gerade g erst soweit verlängert werden muss, bis der Fusspunkt der von P auf sie zu fällenden Senkrechten erreicht ist. Diese Senkrechte trifft alsdann die Gerade g ausserhalb der gezeichnet vorliegenden Strecke CD.

Erkl. 148. Es liegt in den Sätzen 53 schon ausgesprochen und ist aus Erkl. 145 zu entnehmen, dass zwei schiefe Strecken, die nach verschiedenen Seiten der Senkrechten gleiche Winkel bilden, oder deren Endpunkte nach verschiedenen Seiten vom Fusspunkt der Senkrechten gleichen Abstand haben — auch gleichlang sind. Weiteres hierüber findet man später bei der Behandlung des gleichschenkligen Dreiecks.

Erkl. 149. Die Sätze 53 und 53a könnten ebenso als Aussagen über den Abstand eines Punktes der Geraden g vom Punkte P selber gefasst werden, wie dies für Satz 52 in dessen vorangestellter Fassung geschehen ist, z. B.:

Satz 53b. Ein Punkt einer Geraden g ist desto weiter entfernt von einem Punkt P ausserhalb der Geraden:

a) je weiter derselbe vom Fusspunkte der Senkrechten entfernt ist, — oder

b) je kleiner der spitze Winkel zwischen seiner Verbindungslinie mit P und der Richtung zum Fusspunkte hin ist, — oder

c) je grösser der stumpfe Winkel zwischen seiner Verbindungslinie mit P und der Richtung vom Fusspunkte weg ist, — oder

d) je grösser der spitze Winkel zwischen seiner Verbindungslinie mit P und der Senkrechten von P auf g ist.

Ferner kann man die Aussagen machen:

Satz 53. Gehen von einem Punkte nach einer Geraden verschiedene schiefe Strecken, so muss

a) der Endpunkt jeder längeren schiefen Strecke weiter entfernt sein vom Fusspunkt der Senkrechten, als der einer kürzeren Strecke,

b) jede längere schiefe Strecke mit der Richtung zum Fusspunkt der Senkrechten hin einen kleineren spitzen, mit der Richtung vom Fusspunkt weg einen grösseren stumpfen Winkel bilden, als eine kürzere Strecke.

Und ebenso umgekehrt:

Satz 53a. Gehen von einem Punkte nach einer Geraden verschiedene schiefe Strecken, so ist eine solche um so länger,

a) je weiter ihr Endpunkt vom Fusspunkt der Senkrechten entfernt ist,

b) je kleiner ihr spitzer Winkel mit der Richtung zum Fusspunkt der Senkrechten hin, und je grösser ihr stumpfer Winkel mit der Richtung vom Fusspunkte weg ist — und umgekehrt.

Frage 84. Welche Anwendungen liefern die Sätze 52 und 53 für die Beziehung zwischen einem Eckpunkt eines Dreiecks und seiner Gegenseite?

Erkl. 150. Wird der Buchstabe h als Zeichen für ein geometrisches Element gebraucht, so bedeutet er die unbegrenzte Linie; wird er als Masszahl gebraucht, so bedeutet er die Anzahl von Längeneinheiten der senkrechten Strecke zwischen Eckpunkt und Gegenseite.

Erkl. 151. Es wird häufig der Buchstabe h ohne Beifügung der Seite oder Ecke gebraucht, zu welcher die Höhe gehören soll. In diesem Falle soll die Gültigkeit der gerade angestellten Ueberlegung oder des ausgesprochenen Satzes als allgemeine bezeichnet werden, also für jede der drei Höhen behauptet

Antwort. Der Abstand eines Eckpunktes eines Dreiecks von dessen Gegenseite wird gemessen durch die Senkrechte von jenem Eckpunkte auf diese Seite. Diese Linie als ganze sowohl, wie die den Abstand angebende Strecke heisst eine **Höhe** des Dreiecks und wird bezeichnet mit dem Buchstaben h. Da nun das Dreieck drei Eckpunkte hat, so muss es auch drei Höhen haben, nämlich eine Höhe

vom Eckpunkt A senkrecht auf Seite a,
vom Eckpunkt B senkrecht auf Seite b,
vom Eckpunkt C senkrecht auf Seite c.

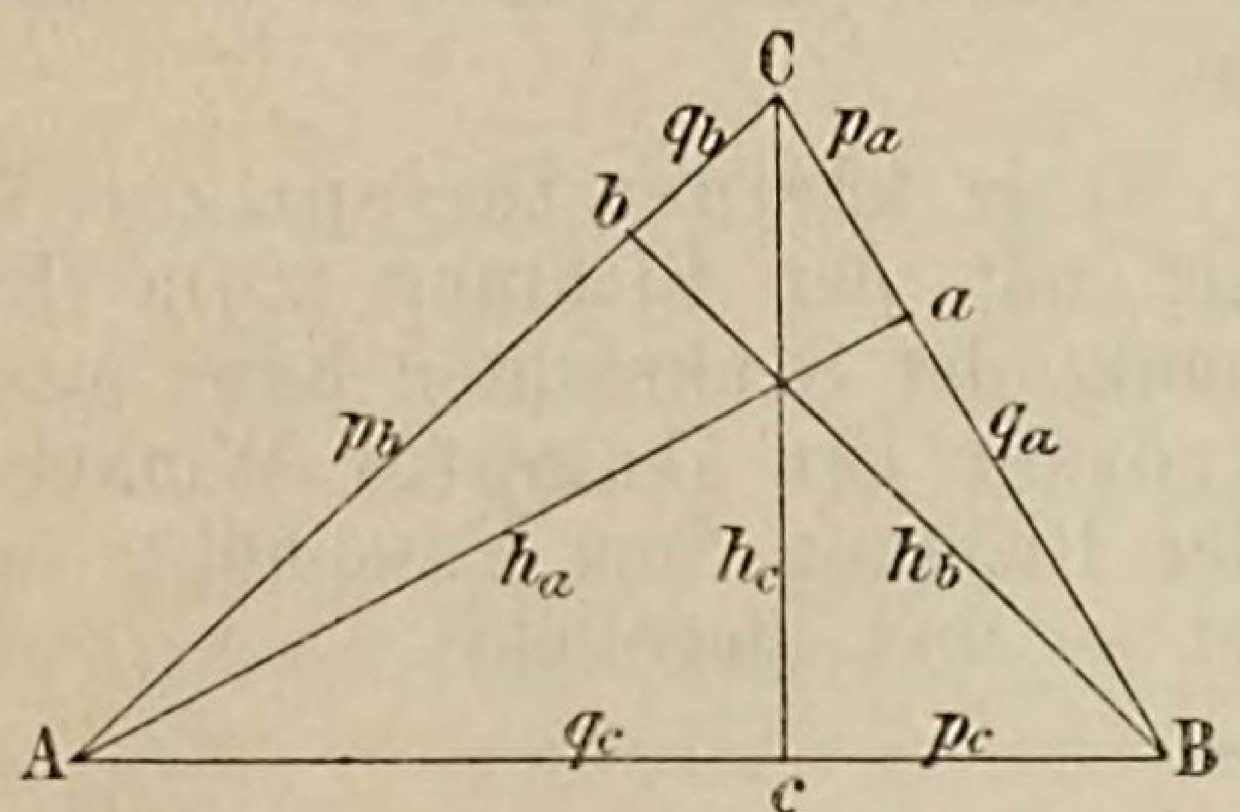
werden. Es wird daher entweder der Nachweis zu liefern sein, dass wirklich diese allgemeine Giltigkeit stattfindet, oder es muss der Buchstaben der zugehörigen Seite beigesetzt werden. Meistens denkt man, wenn kein Buchstaben beigefügt ist, zunächst an die Höhe von Punkt C auf Seite c, da bei der gewöhnlichen Benennung der Elemente die Seite c unten, der Punkt C oben zu sein pflegt.

Erkl. 152. Die einem Buchstaben h, oder p, oder q rechts unten beigefügten kleinen Buchstaben werden der Index, die Indices, oder Zeiger genannt (vom lateinischen indicere = ansagen, anzeigen; substantivum index, plur. indices).

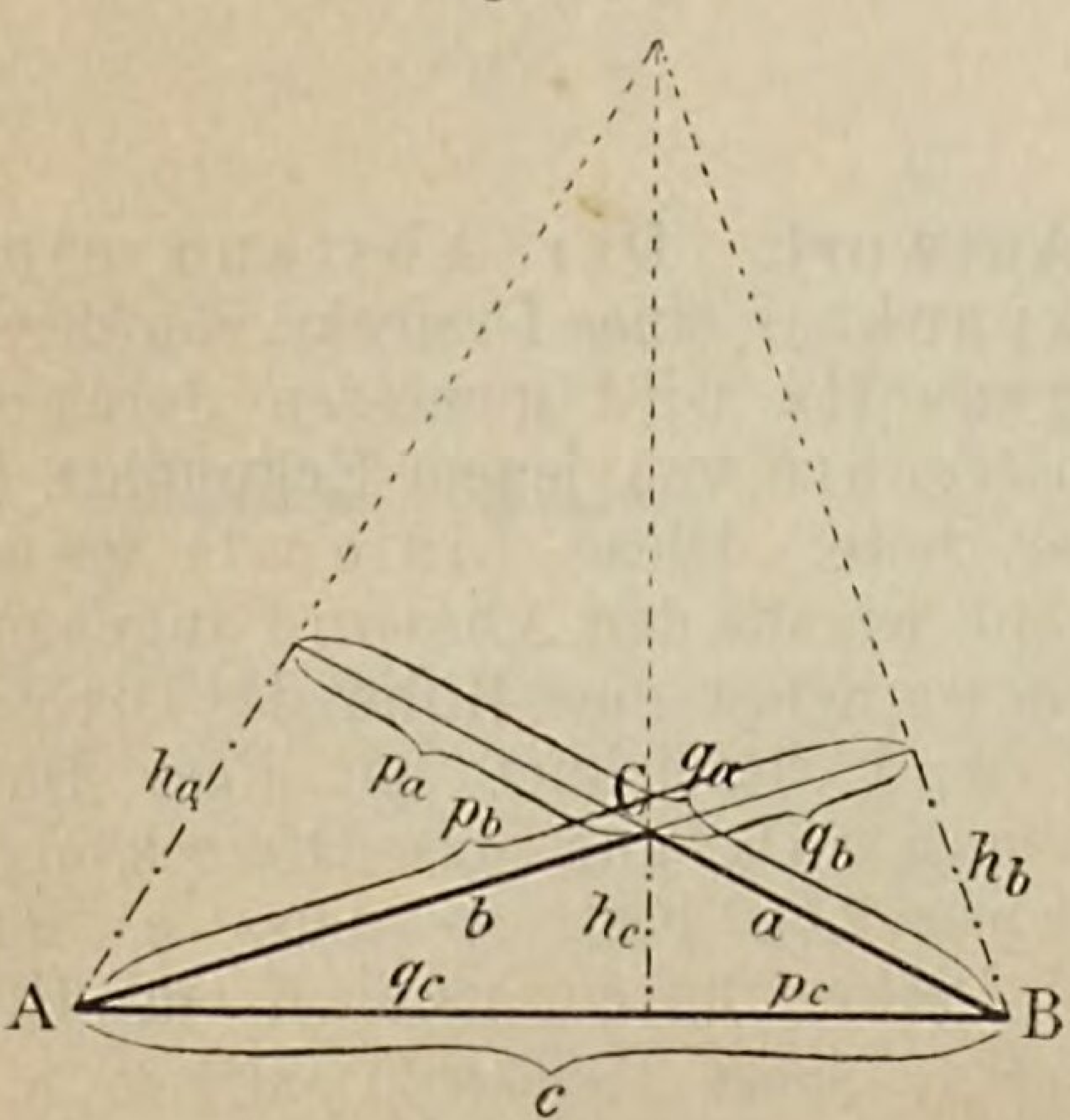
Erkl. 153. Bei Benützung der Höhen ist es besonders üblich, nach Erkl. 115 und Antwort auf Frage 70, die zu einer Höhe gehörige Seite und Ecke als Grundseite bezw. Spitze zu bezeichnen.

Erkl. 154. Es wird später bewiesen werden, dass die drei Höhen eines Dreiecks stets die in Erkl. 113 besprochene Eigenschaft haben, dass alle drei durch denselben Punkt gehen (s. den vierten Teil dieses Lehrbuches).

Figur 58.



Figur 59.



Diese drei verschiedenen Höhen werden dadurch unterschieden, dass dem Buchstaben h der kleine Buchstaben derjenigen Seite bezw. Ecke rechts unter der Zeile beigefügt wird, zu welcher sie gehört, also:

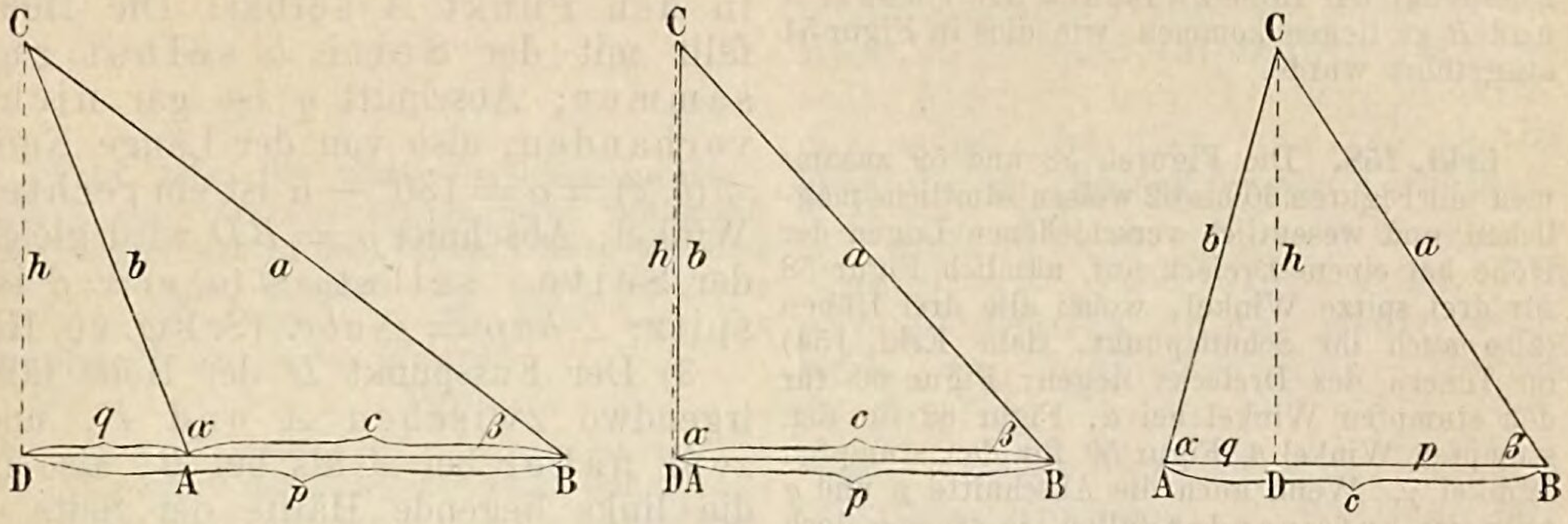
Höhe h_a von Spitze A auf Grundseite a,
Höhe h_b von Spitze B auf Grundseite b,
Höhe h_c von Spitze C auf Grundseite c.

Die Strecken vom Fusspunkt der Höhe bis zu den auf der gleichen Grundseite liegenden Eckpunkten sind alsdann nach Erkl. 146 die Projektionen der beiden andern (der Höhe anliegenden) Seiten auf diese Grundseite. Diese Strecken oder Projektionen oder Abschnitte werden bezeichnet mit den Buchstaben p und q. Da es drei Höhen gibt, so müssen daher auch auf drei verschiedenen Seiten solche Abschnitte p und q entstehen; dieselben werden auch ebenso wie die Höhen durch die Indices $_{a,\,b,\,c}$ unterschieden. Und zwar bezeichnet man (s. Figur 58 und 59) durch:

p_c	die	Projektion	der	Seitenstrecke	a	auf	Seite	c
q_c	„	„	„	„	b	„	„	c
p_a	„	„	„	„	b	„	„	a
q_a	„	„	„	„	c	„	„	a
p_b	„	„	„	„	c	„	„	b
q_b	„	„	„	„	a	„	„	b

Es grenzt daher stets eine Projektion oder ein Abschnitt p an zwei Abschnitte q, ein q an zwei Abschnitte p an.

Figur 60.



$p = c + q$; $c = p - q$; $q = p - c$
$a > b > h$
$\alpha > 90 > 180 - \alpha > \beta$
$\triangle abc = \triangle hap - \triangle hbq$.

$p = c$; $q = 0$
$a > b = h$
$\alpha = 90 > \beta$
$\triangle abc = \triangle hap$

$p = c - q$; $c = p + q$; $q = c - p$
$a > b > h$
$90 > \alpha > \beta$
$\triangle abc = \triangle hap + \triangle hbq$

Frage 85. Welche verschiedenen Lagen kann ein Höhenfusspunkt und damit die Höhe eines Dreiecks in Bezug auf die gewählte Grundseite einnehmen?

Erkl. 155. In Figur 60 bedeutet z. B. die Schreibweise $a > b > h$, wie schon früher angewendet, dass a grösser als b, und b grösser als h ist (also noch mehr auch a grösser als h); $\alpha > 90$ bedeutet, dass α ein stumpfer Winkel, $\alpha < 90$, dass α ein spitzer Winkel, $\alpha > 90 > \beta$ bedeutet, dass gleichzeitig α stumpf und β spitz, also dass der rechte Winkel zwischen α und β sich befinde; $90 > \beta < 180 - \alpha$ bedeutet, dass $\sphericalangle \beta$ sowohl spitz ist, als auch kleiner als der Nebenwinkel von α.

Erkl. 156. Besonders bei den Fällen 1 und 7 hat man sehr darauf zu achten, dass die Projektion der langen Seiten grösser ist als die Grundseite, und so den häufig begangenen Fehler zu vermeiden, dass die Grundseite selbst mit dieser Projektion verwechselt wird. Wie Figur 59 zeigt, stossen auch in diesen Fällen je zwei Abschnitte p und q mit ihren Endpunkten zusammen, während nebenbei der eine vom andern bedeckt wird.

Erkl. 157. In der Antwort auf Frage 78 und Figur 51 können von den nebenstehend betrachteten sieben Fällen nur die Fälle 3 bis 5 in Betracht kommen. Denn in den Fällen 1, 2 und 6, 7 enthält das Dreieck abc einen an c anliegenden Winkel von 90 oder mehr Grad, also ist Seite c schon kleiner als eine einzelne der Seiten a oder b, also ganz selbstverständlich auch kleiner als die Summe $a + b$. Ein Nachweis dieser Ungleichheit war also nur dann noch erforderlich, wenn die beiden Winkel an der Seite c spitze sind: und dann

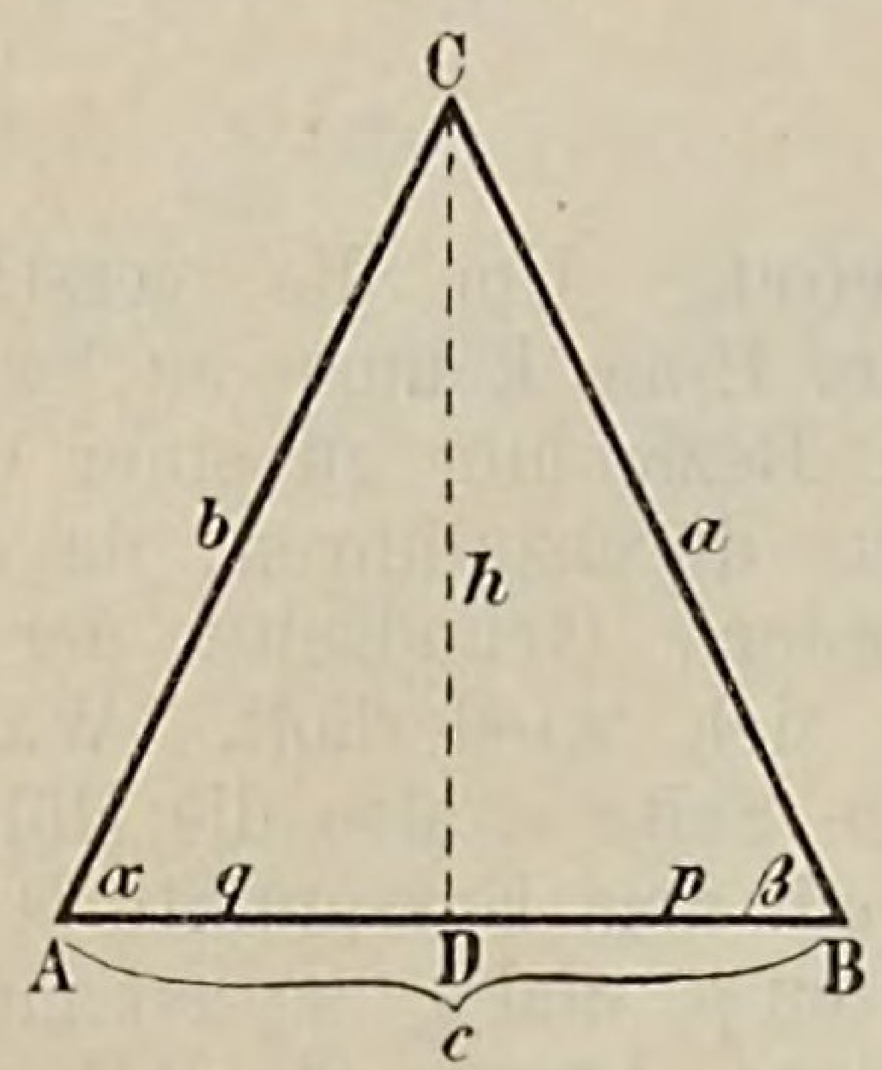
Antwort. Um die verschiedenen Lagen der Höhe kennen zu lernen, hat man ihre Beziehung zu einer einzelnen Grundseite durchzuführen, da dann bei jeder andern Grundseite der gleiche Vorgang sich wiederholt. Wählt man hierzu die Seite c, also die Höhe h_c von C auf c mit dem Fusspunkte D und den Abschnitten p_c und q_c, so hat man sieben verschiedene Lagen des Fusspunktes zu unterscheiden (s. Fig. 60 bis 62):

1) Der Fusspunkt D der Höhe liegt auf der Verlängerung der Seite c über Eckpunkt A hinaus (nach links für die gewöhnlich gebrauchte Bezeichnungsweise): Die Höhe liegt ganz ausserhalb des Dreiecks nach links, Abschnitt $q = AD$ liegt ganz ausserhalb des Dreiecks ABC, $\sphericalangle(b, q)$, hier wie in allen Fällen ist als Gegenwinkel zu Seite h im Dreieck $hbq = 180 - \alpha$, spitz, also $\sphericalangle(b, c) = \alpha$ stumpf. Abschnitt $p = BD$ dagegen reicht über das Dreieck ABC hinaus und umfasst die Strecken c und q; $\sphericalangle(a, p) = \beta$ als Gegenwinkel zu Seite h im Dreieck hap ist spitz. Also ist nach Satz 53, weil $p > q$ ist, auch a grösser als b, dagegen h kürzer als beide und ferner $\sphericalangle \beta$ spitz und kleiner als der Nebenwinkel von α. Dreieck hap umfasst die beiden Dreiecke abc und hbq. (S. Fig. 60, I.)

muss nach nebenstehenden Ausführungen der Fusspunkt der Höhe zwischen die Punkte A und B zu liegen kommen, wie dies in Figur 51 ausgeführt wurde.

Erkl. 158. Die Figuren 58 und 59 zusammen mit Figuren 60 bis 62 weisen sämtliche möglichen und wesentlich verschiedenen Lagen der Höhe bei einem Dreieck auf, nämlich Figur 58 für drei spitze Winkel, wobei alle drei Höhen (also auch ihr Schnittpunkt, siehe Erkl. 154) im Innern des Dreiecks liegen; Figur 60 für den stumpfen Winkel bei α, Figur 62 für den stumpfen Winkel β, Figur 59 für den stumpfen Winkel γ. Wenn auch die Abschnitte p und q teilweise aufeinander fallen, so stossen doch nie die Endpunkte zweier gleichnamigen Abschnitte zusammen.

Figur 61.



$p = q = \frac{c}{2}$; $c = p + q = 2p = 2q$

$a = b > h$

$\alpha = \beta < 90$

$\triangle abc = \triangle hap + \triangle hbq = 2 \cdot \triangle hap = 2 \cdot \triangle hbq$

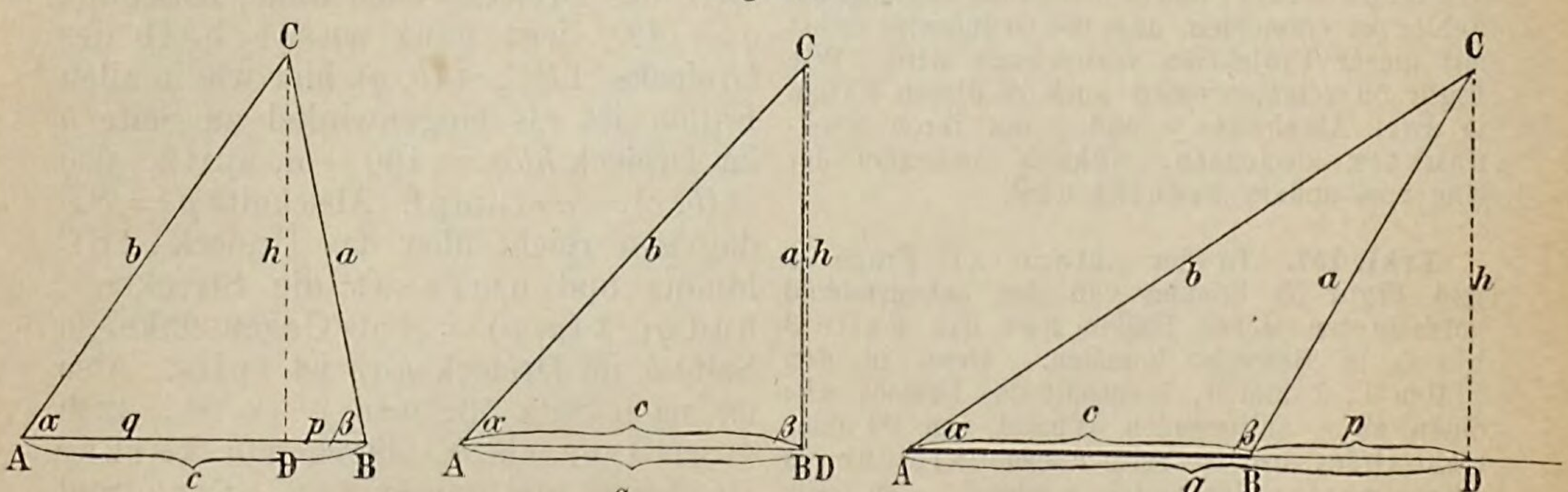
2) Der Fusspunkt D der Höhe fällt in den Punkt A selbst: Die Höhe fällt mit der Seite b selbst zusammen; Abschnitt q ist gar nicht vorhanden, also von der Länge Null; $\sphericalangle(b, c) = \alpha = 180^0 - \alpha$ ist ein rechter Winkel; Abschnitt $p = BD$ wird gleich der Seite c selbst, $\sphericalangle(a, p) = \beta$ ist spitz; $\triangle hap = \triangle abc$. (S. Fig. 60, II.)

3) Der Fusspunkt D der Höhe fällt irgendwo zwischen A und B, und zwar näher bei A als bei B, also in die links liegende Hälfte der Seite c: Die Höhe liegt ganz innerhalb des Dreiecks; Abschnitt $q = AD$ liegt im Dreieck selbst, ist aber kleiner als der ebenfalls im Dreieck liegende Abschnitt $p = BD$, $\sphericalangle(b, q) = \alpha$ ist spitz; ebenso $\sphericalangle(a, p) = \beta$. Aber weil $p > q$ ist, wird a noch grösser als b, h kürzer als beide, β ist noch kleiner als α. Dreieck abc umfasst die beiden Dreiecke hap und hbq. (S. Fig. 60, III.)

4) Der Fusspunkt D der Höhe fällt genau in die Mitte zwischen A und B; die Höhe geht durch die Mitte des Dreiecks, es wird $p = q$, also nach Erkl. 126 $a = b$, $\alpha = \beta$, beide spitz. $\triangle hap = \triangle hbq = \frac{1}{2} abc$. Siehe hierüber noch die genaueren Ausführungen bei der Lehre vom „gleichschenkligen Dreieck" in den Antworten auf die Fragen 87 u. ff. (S. Fig. 61.)

5) Der Fusspunkt D der Höhe fällt immer noch zwischen A und B, aber

Figur 62.



$p = c - q$; $c = p + q$; $q = c - p$

$h < a < b$

$90 > \beta > \alpha$

$\triangle abc = \triangle hap + \triangle hbq$

$p = 0$; $q = c$

$a = h < b$

$\alpha < 90 = \beta$

$\triangle abc = \triangle hbq$

$p = q - c$; $c = q - p$; $q = c + p$

$h < a < b$

$\alpha < 90 < \beta < 180 - \alpha$

$\triangle abc = \triangle hbq - \triangle hap$

näher bei B als bei A, also in die rechts liegende Hälfte der Seite c: Die Höhe liegt ganz innerhalb des Dreiecks: Abschnitt $q = AD$ liegt im Dreieck selbst, ist aber grösser als der ebenfalls im Dreieck liegende Abschnitt $p = BD$; $\sphericalangle(b, q) = \alpha$ ist spitz, ebenso $\sphericalangle(a, p) = \beta$. Aber weil $q > p$ ist, wird a jetzt kleiner als b, h kleiner als beide, und β grösser als α. Dreieck abc umfasst wieder die beiden Dreiecke hap und hbq. (S. Fig. 62, I.)

Erkl. 159. Der Winkel, welchen die Höhe mit je einer der anschliessenden Seiten bildet, ergibt sich in den Fällen 3 bis 5 aus dem rechtwinkligen Dreieck hap bezw. hbq als $90^0 - \beta$ bezw. $90^0 - \alpha$. Es wird dann die Summe dieser beiden Winkel:

$$90^0 - \beta + 90^0 - \alpha = 180^0 - (\alpha + \beta) = \gamma.$$

Im ersten und siebten Falle dagegen ist statt des einen jener Winkel zwischen Höhe und nächstliegender Seite zu setzen der Komplementwinkel des Nebenwinkels des stumpfen Dreieckswinkels, also:

1) $\sphericalangle(h, b) = 90^0 - (180^0 - \alpha) = \alpha - 90^0$;

7) $\sphericalangle(h, a) = 90^0 - (180^0 - \beta) = \beta - 90^0$.

Dann wird:

1) $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(h, a) - (h, b) =$
$90^0 - \beta - (\alpha - 90^0) = 180^0 - (\alpha + \beta) = \gamma$;

7) $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(h, b) - (h, a) =$
$90^0 - \alpha - (\beta - 90^0) = 180^0 - (\alpha + \beta) = \gamma$.

6) Der Fusspunkt D der Höhe fällt in den Punkt B selbst: Die Höhe fällt mit der Seite a selbst zusammen, Abschnitt p wird gleich Null, $\sphericalangle(a, c) = \beta = 180^0 - \beta = 90^0$; Abschnitt $q = AD$ wird gleich der Seite c, α ist spitz. $\triangle hbq = \triangle abc$. (S. Fig. 62, II.)

7) Der Fusspunkt D der Höhe fällt auf die Verlängerung der Seite c über den Eckpunkt B hinaus (nach rechts): Die Höhe liegt ganz ausserhalb des Dreiecks nach rechts: Abschnitt $q = AD$ reicht über das Dreieck hinaus und umfasst die Strecken c und p, $\sphericalangle(b, q) = \alpha$ ist spitz. Abschnitt $p = BD$ dagegen liegt ganz ausserhalb des Dreiecks ABC, $\sphericalangle(a, p) = 180^0 - \beta$ ist spitz, also $\sphericalangle\beta$ stumpf. Also ist, weil $p < q$ ist, auch a kleiner als b, h kürzer als beide, α spitz und kleiner als der Aussenwinkel bei β. Dreieck hbq umfasst die beiden Dreiecke hap und abc. (S. Fig. 62, III.)

Frage 86. Welche Längenbeziehungen lassen sich aufstellen zwischen Höhen und Seiten eines Dreiecks?

Antwort. Zwischen Höhen und Seiten bestehen folgende Längenbeziehungen:

Erkl. 160. Die erste der nebenstehenden Beziehungen ist für die Höhe h_c bereits in der vorigen Antwort angeführt und in Figur 60 bis 62 beigesetzt.

1) Da jede Höhe mit den zwei anliegenden Seiten je ein rechtwinkliges Dreieck bildet, in welchem die Höhe Hypotenuse ist, so erhält man aus Satz 48 zunächst folgende Beziehung:

$$h_c < a \qquad h_a < b \qquad h_b < c$$
$$h_c < b \qquad h_a < c \qquad h_b < a$$

Erkl. 161. Ein Satz der allgemeinen Grössenlehre heisst:

„Man kann die gleichen Seiten zweier oder mehrerer Gleichungen oder Ungleichungen mit gleichgerichtetem Ungleichheitszeichen addieren oder subtrahieren, multiplizieren oder dividieren — u. s. w.“

Erkl. 162. Aus $\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}$ entsteht zunächst durch Addition der Zähler und Beibehaltung des gleichnamigen Nenners:

$$\frac{b+c+c+a+a+b}{2}=\frac{2c+2a+2b}{2}=\frac{2(a+b+c)}{2}=a+b+c.$$

Erkl. 163. Satz 54 wird besonders wichtig, wenn die Höhe als eines der „Bestimmungsstücke“ des Dreiecks (s. Erkl. 119) gebraucht werden soll. Dann ist nämlich die Vorbedingung wohl zu beachten, dass eine Höhe nie grösser gegeben werden darf, als eine der beiden ihr anliegenden Seiten.

2) Durch Addition je zweier dieser Ungleichungen erhält man:

$$2h_c<a+b,\quad 2h_a<b+c,\quad 2h_b<c+a,$$

oder durch Division mit zwei:

$$h_c<\frac{a+b}{2},\quad h_a<\frac{b+c}{2},\quad h_b<\frac{c+a}{2}.$$

3) Und durch Addition dieser **drei** Ungleichungen entsteht:

$$h_a+h_b+h_c<\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2},$$

$$h_a+h_b+h_c<a+b+c.$$

Daher kann man folgende Aussagen machen:

Satz 54. Eine Höhe eines Dreiecks ist kleiner als jede einzelne ihrer anliegenden Seiten, also auch kleiner als die halbe Summe der anliegenden Seiten.

Satz 54a. Die Summe der drei Höhen eines Dreiecks ist kleiner als der Umfang des Dreiecks.

c) Ueber die besonderen Dreiecke.

α) Ueber das gleichschenklige Dreieck.

Frage 87. Was versteht man unter einem gleichschenkligen Dreieck?

Antwort. Unter einem gleichschenkligen Dreieck versteht man ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleiche Länge haben. Diese beiden gleichen Seiten heissen die Schenkel des Dreiecks, die dritte Seite wird insbesondere als Grundseite oder Basis bezeichnet, die Gegenecke der letzteren als Spitze oder Scheitel des Dreiecks.

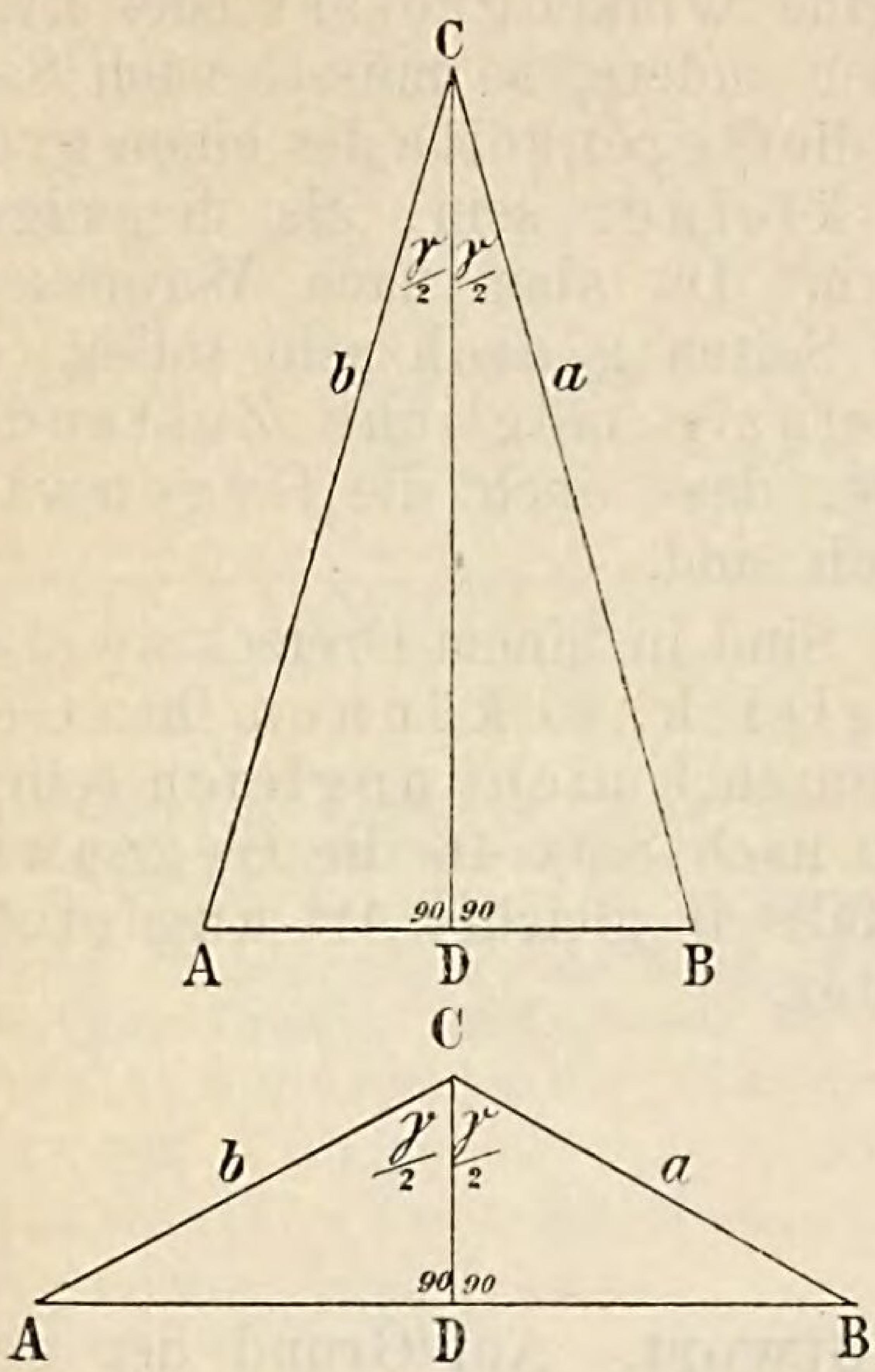
In der Zeichnung werden gewöhnlich die Seiten a und b gleich gemacht, so dass c Grundseite, C Spitze oder Scheitel, α und β Basiswinkel, γ Winkel an der Spitze oder am Scheitel, oder Scheitelwinkel, h_c oder schlechtweg h „Höhe“ wird.

Erkl. 164. Da im gleichschenkligen Dreieck mit der Bezeichnung Grundseite schon iene bestimmte Seite ausdrücklich bezeichnet wird, und ebenso durch die Bezeichnung Spitze eine ganz bestimmte Ecke, so wird unter „Höhe des gleichschenkligen Dreiecks“ ohne näheren Zusatz auch gewöhnlich die Senkrechte von dieser Spitze auf diese Grundseite verstanden.

Frage 88. Zu welchen Vorstellungen gelangt man bei der Umklappung eines gleichschenkligen Dreiecks um die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze?

Antwort. Wird das gleichschenklige Dreieck ABC umgeklappt um

Figur 63.



die Halbierungslinie CD des Winkels γ, so behält die Strecke CD als Symmetrieachse ihre Lage unverändert bei, Winkel $ACD = \frac{\gamma}{2}$ fällt auf die gleichgrosse andere Hälfte $BCD = \frac{\gamma}{2}$; Seite a fällt der Richtung nach auf Seite b, also da nach Voraussetzung a und b gleiche Länge haben sollen, auch Punkt A auf Punkt B. Folglich decken sich auch die Strecken DA und DB und die Winkel DAC und DBC, sowie CDA und CDB. Da letztere beiden ausserdem aber Nebenwinkel sind, so muss auch jeder die Hälfte vom gestreckten betragen, also $CDA = CDB = 90^0 = R$.

Frage 89. Zu welchen Vorstellungen gelangt man, wenn beim Umklappen eines Dreiecks um eine Winkelhalbierende ein Winkel α auf die Seite eines gleichgrossen Winkels β übergeführt wird?

Antwort. Beim Umklappen um die Halbierungslinie von γ fällt wie zuvor CD auf CD, ACD auf BCD, a der Richtung nach auf b. Um die Lage der Endpunkte A und B zu vergleichen, betrachtet man wie in Antwort auf Frage 75 die Grösse der Winkel

$$CDA = \left(180^0 - \frac{\gamma}{2}\right) - \alpha$$

und

$$CDB = \left(180^0 - \frac{\gamma}{2}\right) - \beta.$$

Da nach Voraussetzung in Frage 89 $\sphericalangle \alpha = \beta$ sein soll, so muss auch $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CDB$ sein, also Strecke CA auf Strecke CB fallen und Punkt A auf Punkt B, daher auch Seite a nach Richtung und Grösse auf Seite b.

Erkl. 165. Frage 88 und 89 bilden den unmittelbaren Anschluss an die Fragen 74 und 75, in welchen Dreiecke mit ungleichen Seiten oder Winkeln betrachtet wurden. Daher ist auch Frage 90 eine Wiederholung der Frage 76 für den Fall der gleichen Seiten oder gleichen Winkel.

Frage 90. Welche Ergebnisse liefert die Anwendung der Sätze 46 und 47 auf solche Dreiecke, in welchen zwei Seiten oder zwei Winkel gleich sind?

Antwort. 1) Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich gross sind, so können auch die Gegenwinkel dieser

Seiten nicht ungleich sein; denn wäre der eine Winkel grösser oder kleiner als der andere, so müsste nach Satz 47 auch die Gegenseite des einen grösser oder kleiner sein, als diejenige des andern. Da aber nach Voraussetzung diese Seiten gleich sein sollen, so ist der einzig mögliche Zustand derjenige, dass auch die Gegenwinkel gleich sind.

2) Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so können ihre Gegenseiten auch nicht ungleich sein, weil sonst nach Satz 46 die Gegenwinkel ebenfalls in gleicher Art ungleich sein müssten.

Erkl. 166. In nebenstehender Ueberlegung ist der indirekte Beweis, welcher schon in Antwort auf Frage 75 angestellt wurde, für gleiche Seiten und Winkel wiederholt. Dabei sind die beiden Sätze 46 und 47 verwendet. Da aber Satz 47 aus Satz 46 erschlossen werden konnte, so könnte auch die ganze Ableitung der Antworten auf die Fragen 88 bis 91 allein auf einen dieser Sätze, z. B. auf Satz 46 oder auf die Antwort auf Frage 73 aufgebaut werden.

Frage 91. Wie lauten die auf Grund der vorigen drei Antworten sich ergebenden Aussagen über gleichschenklige Dreiecke?

Antwort. Auf Grund der gemeinschaftlichen Ergebnisse der vorigen drei Antworten kann man folgende Aussagen machen:

Satz 55. Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

Oder:

Satz 55a. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Gegenwinkel der Schenkel — die Basiswinkel einander gleich.

Und ebenso umgekehrt:

Satz 56. Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber.

Oder:

Satz 56a. Hat ein Dreieck zwei gleiche Winkel, so ist es auch gleichschenklig — mit dem gemeinsamen Winkelschenkel als Grundseite.

Erkl. 167. Man könnte die nebenstehenden Sätze dahin zusammenfassen:

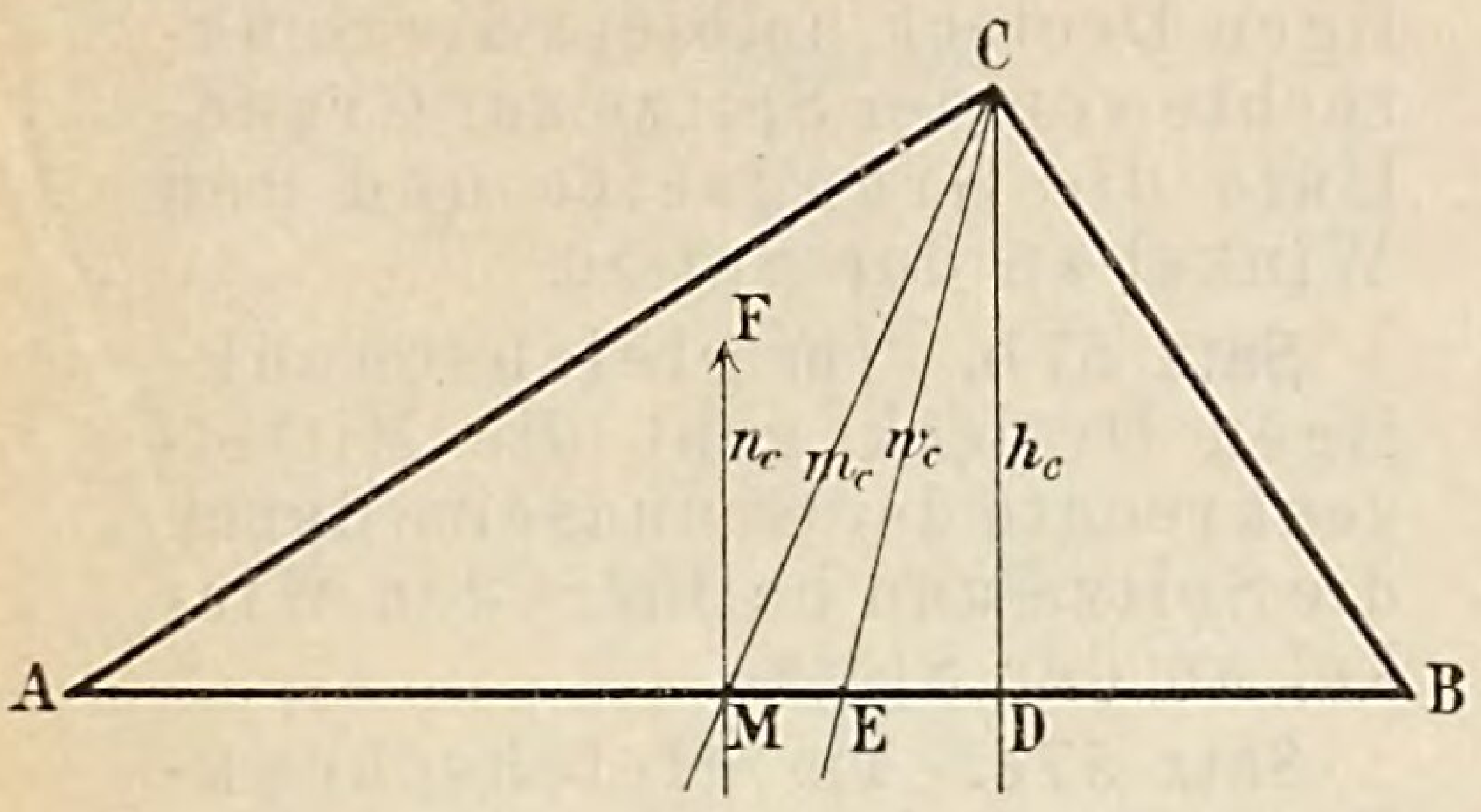
„Gleiche Gegenseiten und gleiche Gegenwinkel bedingen einander gegenseitig.“

Erkl. 168. Für das Dreieck mit zwei gleichen Winkeln sind in den Aufgaben 50 und 51, 76, 114 bis 117, 128 bis 133 und 145 bis 150 der Aufgabensammlung am Schlusse des zweiten Teiles dieses Lehrbuches eine Reihe von Beispielen gegeben, welche nunmehr auch als Beispiele für das gleichschenklige Dreieck Gültigkeit haben.

Frage 92. Welche Eigenschaften besitzt nach den Antworten auf die Fragen 88 und 89 die Symmetrieachse CD im gleichschenkligen Dreieck ABC?

Antwort. Nach den beim Umklappen des gleichschenkligen Dreiecks gewonnenen Vorstellungen ergibt sich, dass die Symmetrieachse CD infolge dieser Eigenschaft eine

Figur 64.



Erkl. 169. In Figur 64 ist an einem Beispiel gezeigt, welche verschiedenen Lagen bei einem ungleichseitigen Dreieck die vier Linien einnehmen, welche beim gleichschenkligen Dreieck sämtlich mit der Symmetrieachse zusamenfallen, nämlich:

die Höhe von C auf c h_c od. CD,
die Winkelhalbierende bei C w_c od. CE,
die Mittellinie oder Schwerlinie von C nach c . . . m_c od. CM,
die Mittelsenkrechte auf c . n_c od. MF.

Erkl. 170. Ueber die einzelnen Linien der ebengenannten Arten wird später noch ausführlich zu sprechen sein.

Erkl. 171. Dass die Mittellinien auch Schwerlinien heissen, beruht nicht auf einer geometrischen, sondern auf einer physikalischen Eigenschaft derselben, welche später erläutert werden wird.

Reihe anderer Eigenschaften in sich vereinigt, welche bei nicht gleichschenkligen Dreiecken durch lauter verschiedene Linien erfüllt zu werden pflegen. Sie ist nämlich:

1) als Symmetrielinie der Winkelschenkel die Winkelhalbierende des Winkels γ;

2) da $\sphericalangle CDA = CDB = 90^0$ ist, so ist CD die Höhe des Dreiecks ABC von C auf c;

3) da ausserdem $CA = CB$ ist, so ist CD die in der Mitte der Strecke c errichtete Senkrechte oder nach Erkl. 36 die Mittelsenkrechte von AB;

4) da endlich D Mittelpunkt der Seite c und C deren Gegenecke ist, so ist CD die Linie von einer Ecke zur Mitte der Gegenseite, und wird als solche auch Mittellinie oder Schwerlinie genannt.

Die merkwürdige Eigenschaft des gleichschenkligen Dreiecks ist also die, dass jede dieser Linien auch die noch übrigen Eigenschaften der drei andern in sich vereinigt. Im ganzen kommt in Betracht, dass eine Linie durch die Ecke geht, den Winkel halbiert, die Grundseite senkrecht trifft und dieselbe halbiert. Wenn man daher irgend eine Linie auswählt, welche zwei dieser Eigenschaften schon besitzt, kann man derselben auch die beiden andern Eigenschaften zuschreiben.

Frage 93. Welche Aussagen über das gleichschenklige Dreieck ergeben sich aus der in voriger Antwort besprochenen Eigenschaft der Symmetrieachse?

Antwort. Auf Grund der in voriger Antwort gewonnenen Vorstellungen kann man über das gleichschenklige Dreieck folgende Aussagen machen:

Satz 57. Im gleichschenkligen Dreieck ist die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze zugleich Mittelsenkrechte der Grundseite.

Erkl. 172. In Anlehnung an die Betrachtungen des ersten Abschnitts dieses Teiles kann auch das Dreieck mit zwei gleichen Seiten dualistisch gegenübergestellt werden dem Dreiseit mit zwei gleichen Winkeln. Dann werden dualistisch entsprechend die Mittelsenkrechte der dritten Seite und die Halbierende des dritten Winkels, und es werden gegenüberzustellen sein von den

nebenstehenden Sätzen der erste und der dritte bezw. der zweite und vierte.

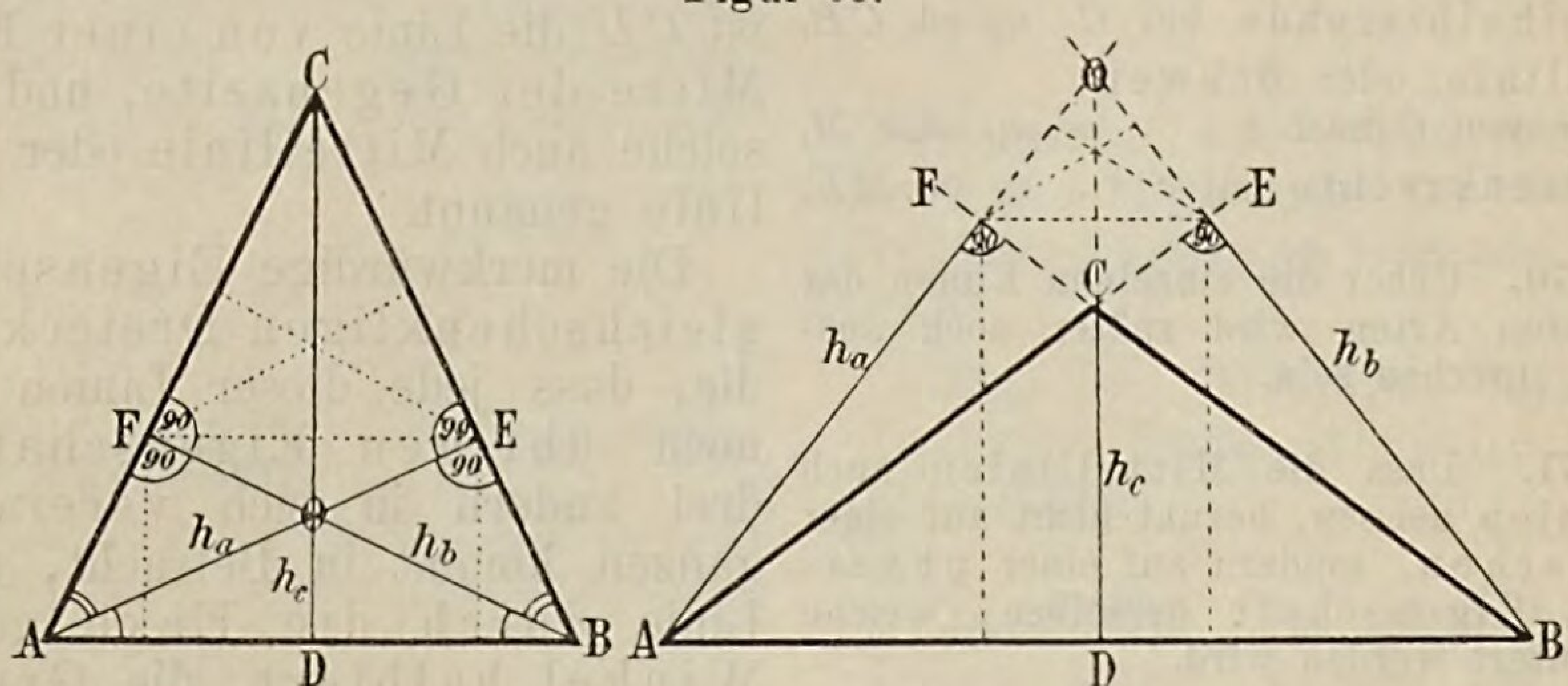
Erkl. 173. Wie aus Figur 64 hervorgeht, hat man sich sehr davor zu hüten, bei einem nicht gleichschenkligen Dreieck die Linien h, m, w, n mit einander zu verwechseln, oder der einen Eigenschaften der andern zuzuschreiben.

Satz 57a. Im gleichschenkligen Dreieck halbiert die Senkrechte von der Spitze zur Grundlinie die Grundseite und den Winkel an der Spitze.

Satz 57b. Im gleichschenkligen Dreieck geht die Mittelsenkrechte der Grundseite durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.

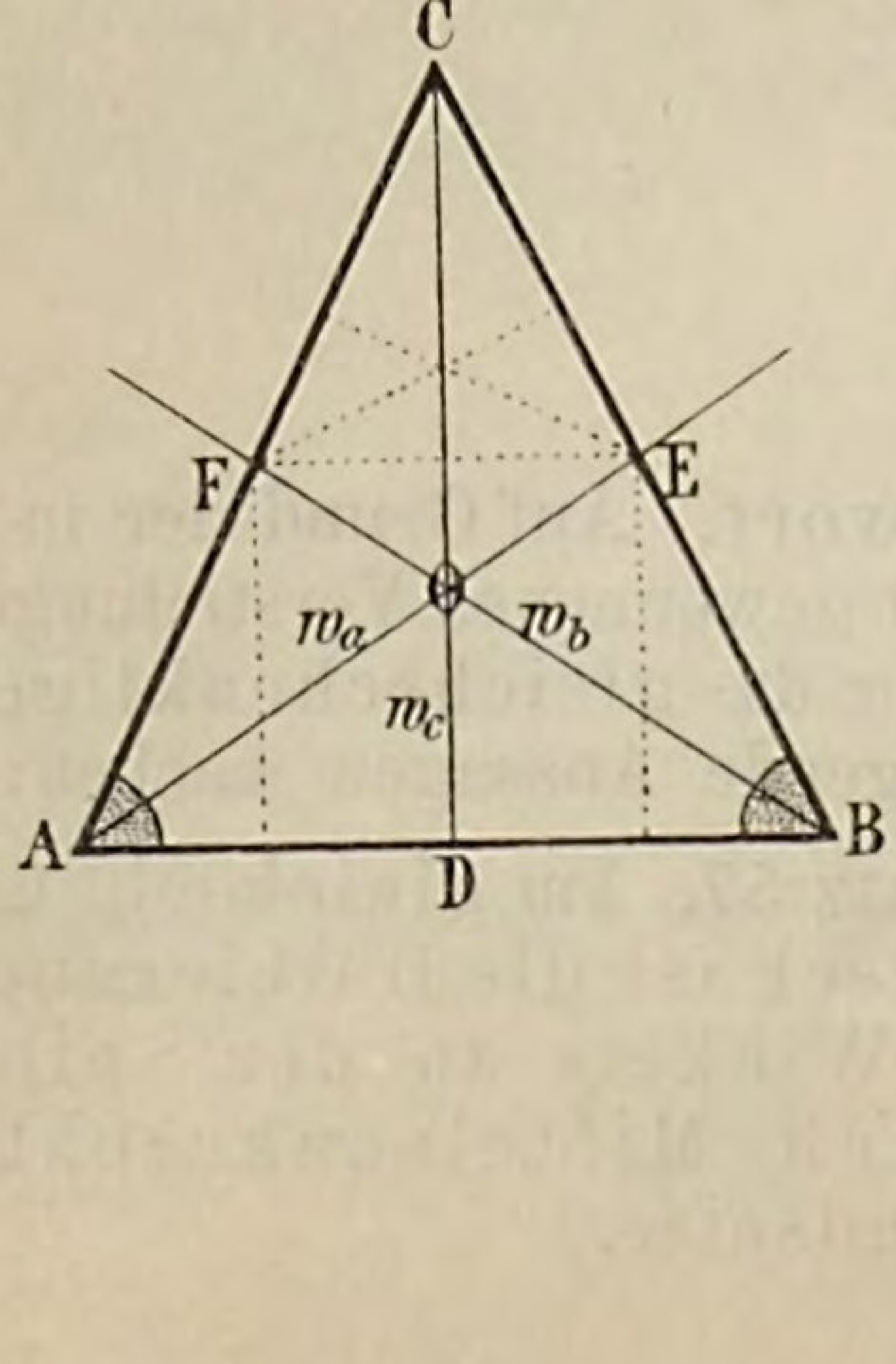
Satz 57c. Im gleichschenkligen Dreieck halbiert die Verbindungslinie der Spitze mit der Mitte der Grundseite den Winkel an der Spitze und steht auf der Grundlinie senkrecht.

Figur 65.



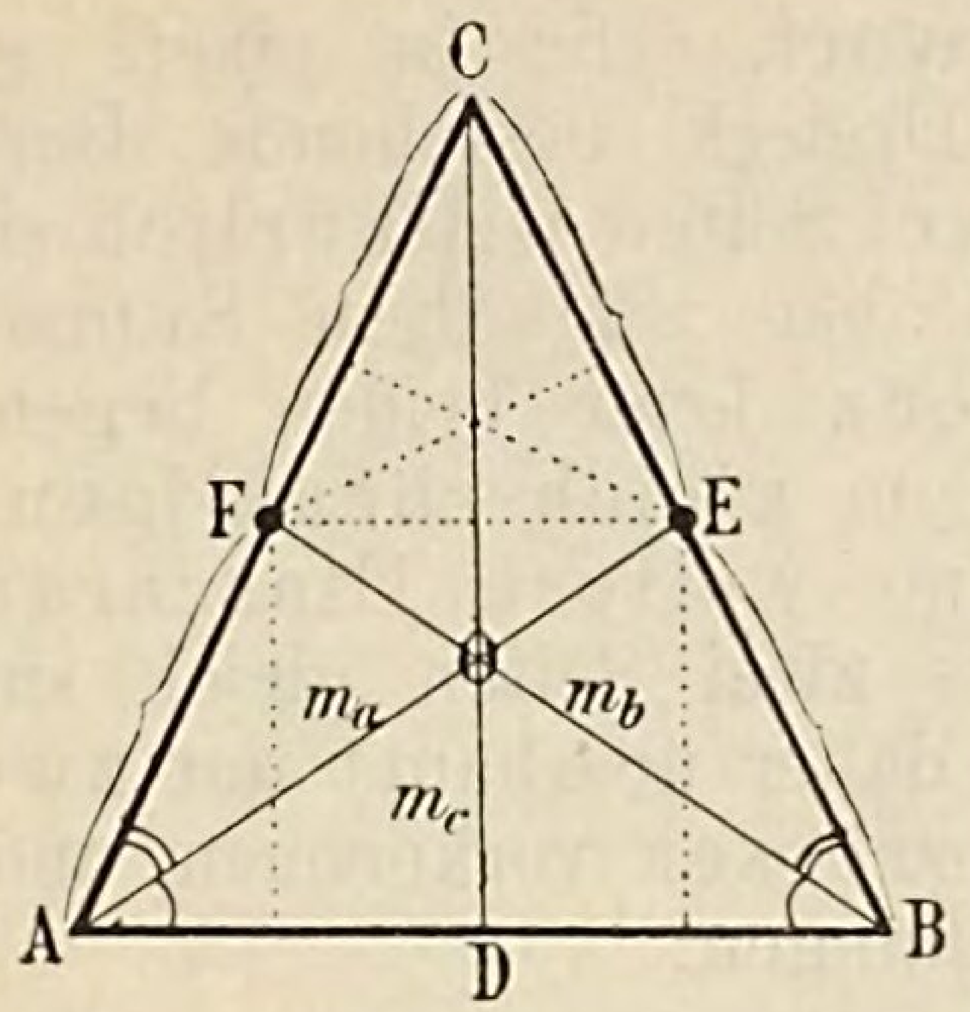
Frage 94. Welche weiteren Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks ergeben sich aus dessen Symmetrie in Bezug auf die Achse?

Figur 66.

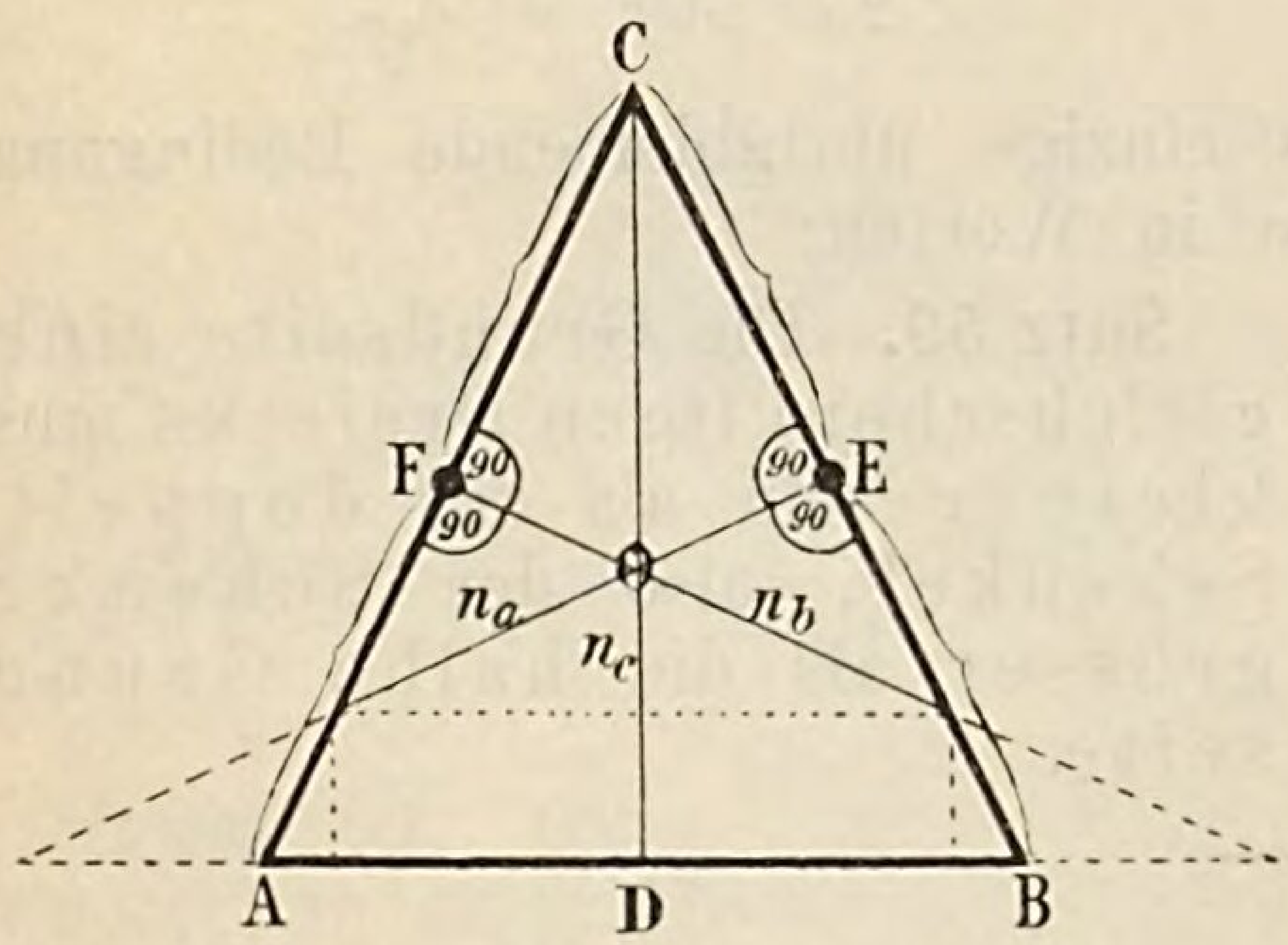


Antwort. Da beim Umklappen des gleichschenkligen Dreiecks um seine Symmetrieachse dessen eine Hälfte, nämlich das Dreieck ACD auf die andere Hälfte, das Dreieck BCD fällt, so müssen nach Satz 54 auch alle solche Elemente der beiderseitigen Dreiecke zur Deckung gelangen, welche ihrer Entstehung nach einander entsprechen, nämlich entsprechende Punkte, Geraden, Strecken, Winkel, Kreisbogen u. s. w. Solche Elemente sind: die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, Schnittpunkte entsprechender Geraden, nämlich von Höhen, Winkelhalbierenden, Mittellinien, Mittelsenkrechten, die durch solche Geraden abgeschnittenen Strecken und eingeschlossenen Winkel, Kreisbogen

Figur 67.



Figur 68.



um die Ecken des Dreiecks u. a. Da ferner entsprechende achsig-symmetrische Punkte nach Satz 8a auf derselben Achsensenkrechten liegen und gleichen Abstand von der Achse haben, so muss die Verbindungslinie je zweier entsprechenden Punkte auf der Symmetrieachse des Dreiecks senkrecht sein, und da die Grundseite des Dreiecks ebenfalls auf der Achse senkrecht ist, so müssen solche Verbindungsgeraden beiderseits entsprechender Punkte mit der Grundseite parallel sein und beiderseits des Achsenschnittpunktes gleichlange Strecken enthalten. Ferner müssen nach Satz 11a je zwei entsprechende Geraden sich auf der Achse treffen und im Achsenpunkt gleiche Winkel mit der Achse bilden.

Daher kann man folgende Aussagen machen:

Satz 58. Die von den Basisecken eines gleichschenkligen Dreiecks ausgehenden Höhen (s. Figur 65), Winkelhalbierenden (s. Figur 66), Mittellinien (siehe Figur 67), sowie die Mittelsenkrechten der Schenkel (s. Figur 68) sind gleichlang, schneiden einander auf der Achse, bilden gleiche Winkel mit der Basis, den beiden Schenkeln und der Achse, schneiden gleiche Strecken aus auf einander und auf der Basis und den beiden Schenkeln, und treffen die Schenkel in solchen Punkten, die gleichen Abstand haben von der Achse sowie den Ecken und Seiten des Dreiecks, und deren Verbindungslinien der Grundlinie parallel sind.

Erkl. 174. Da das gleichschenklige Dreieck und ebenso die später betrachteten besonderen Gattungen von Dreiecken eine Reihe nur ihnen besonders zukommender Eigenschaften besitzen, so ist es dringend geraten, bei allgemeinen Untersuchungen über ein Dreieck nicht eine dieser speziellen Figuren als Beweisfigur anzuwenden, sondern für solche allgemeine Untersuchungen auch ein allgemeines Dreieck mit ungleichen Seiten und ungleichen, schiefen Winkeln als Grundlage der Ueberlegungen zu wählen, und so Irrtümern auszuweichen, welche aus der besonderen Gestalt der Figur hervorgehen könnten.

Erkl. 175. In den sämtlichen Figuren 65 bis 68 bestehen nach nebenstehenden Sätzen die Gleichheiten:

$AE = BF$, $OAD = OBD$, $AO = BO$, $FO = EO$, $FE \parallel AB$,
$OAF = OBE$, $AF = BE$, $CF = CE$, $FM = EM \perp AB$;
$OFA = OEB$, und viele andere.
$OFC = OEC$,
$AOD = BOD$ $(= EOC = FOC)$.

Frage 95. Welche Beschränkungen ergeben sich aus Satz 49 für die Wahl der Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks?

Erkl. 176. Die Schreibweise mit doppelten Zeichen bedeutet, dass wenn auf der linken Seite das oben stehende Zeichen gewählt wird, auch rechts das obere zu stehen hat, und umgekehrt. Es sind also immer zwei Vergleichungen in einer Zeile geschrieben, nämlich:

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$$
$$a-b<c, \quad b-c<a, \quad c-a<b$$

Durch Einsetzung von $a=b$ entsteht also einzeln:

$$2a>c, \quad a+c>a, \quad c+a>a$$
$$0<c, \quad a-c<a, \quad c-a<a$$

Davon ergeben die erste und durch beiderseitige Addition von a auch die letzte das nebenstehende $2a>c$; die zweite und — durch beiderseitige Subtraktion von a — die dritte bis fünfte: liefern das selbstverständliche $c>0$.

Antwort. Die in einem gewöhnlichen Dreieck bestehende Beziehung, dass zwei Seiten willkürlich sind, die dritte aber zwischen Summe und Differenz jener beiden liegen muss, erfährt im gleichschenkligen Dreieck eine weitere Einschränkung, da stets zwei Seiten gleich sind. Es können daher überhaupt nur zweierlei Seitengrössen vorkommen, und in den Ungleichungen:

$$a \pm b \gtrless c, \quad b \pm c \gtrless a, \quad c \pm a \gtrless b$$

ist für b ebenfalls a zu setzen, so dass entsteht:

$$c<2a \quad \text{oder} \quad a>\frac{c}{2}$$

als einzige übrigbleibende Bedingung: also in Worten:

Satz 59. Die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks muss kleiner sein als der doppelte Schenkel, also der Schenkel grösser als die halbe Grundseite.

Frage 96. Welche besonderen Eigenschaften müssen die Winkel bei einem gleichschenkligen Dreieck besitzen?

Erkl. 177. Die Richtigkeit der nebenstehenden Grössenangaben über die Winkel ist bereits nachgewiesen in den oben erwähnten Aufgaben der Aufgabensammlung am Schlusse des ersten Teiles, ergibt sich aber auch direkt aus der Betrachtung der Figur unter Berücksichtigung des Satzes über die Innenwinkelsumme und die Aussenwinkel.

Erkl. 178. Da im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundseite nie stumpf werden können, so kann die Höhe auf die Grundseite auch nie ausserhalb fallen, wohl aber kann dies eintreffen bei den Höhen auf die Schenkel, da ja der Winkel an der Spitze ein stumpfer sein kann. Dann schneiden sich die drei Höhen im Scheitelwinkelraum des Winkels an der Spitze, aber wegen der in Antwort auf Frage 94 angestellten Ueberlegungen doch wieder auf der Achse (s. Figur 65, II).

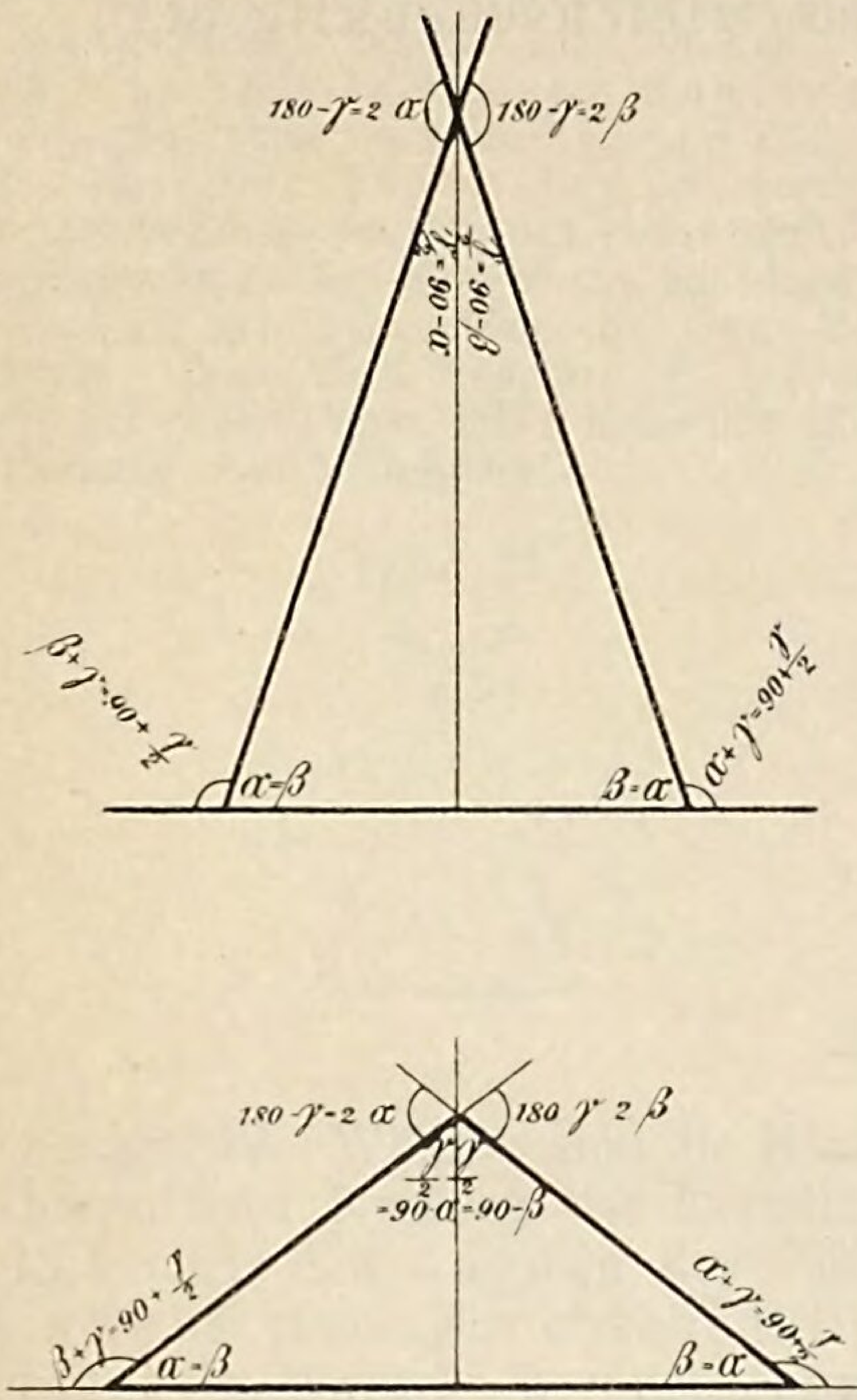
Antwort. Da im gleichschenkligen Dreieck auch zwei gleiche Winkel vorhanden sein müssen, so kann nur ein Winkel desselben willkürlich bestimmt werden, die beiden andern sind dann durch Rechnung festgelegt. Vollständig beliebig zwischen 0^0 und 180^0 ist aber nur der Winkel an der Spitze, denn da an der Grundseite zwei gleichgrosse Winkel sein müssen, so darf von einem einzelnen derselben der Betrag von 90^0 nicht überschritten werden. Es darf daher gewählt werden $\alpha=\beta$ zwischen 0^0 und 90^0, γ zwischen 0^0 und 180^0. Ist α gegeben, so wird:

$$\gamma = 180^0 - 2\alpha = 2\,(90-\alpha).$$

Ist γ gegeben, so ist:

$$\alpha = \beta = \frac{180-\gamma}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}.$$

Figur 69.



Ferner ist der Aussenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks gleich:

$$2 \cdot \alpha = 2 \cdot \beta,$$

der Aussenwinkel an der Grundseite gleich:

$$\gamma + \alpha = \gamma + \beta = 90 + \frac{\gamma}{2}.$$

Frage 97. Aus welchen Eigenschaften eines Dreiecks lässt sich schliessen, dass dasselbe gleichsckenklig ist?

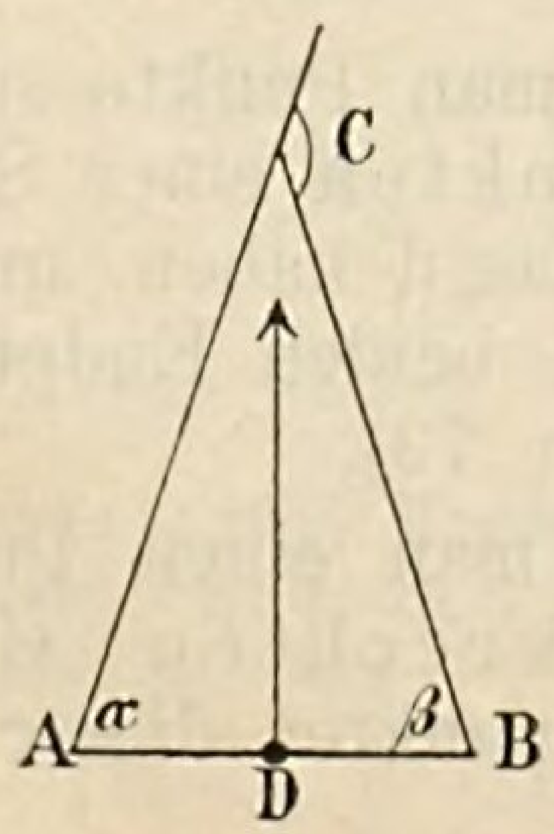
Erkl. 179. Von den vielen Einzelfällen nebenstehender Antwort findet man einige in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles. Hier seien als Beispiele ausgewählt der erste und letzte dieser Fälle.

Voraussetzung: (s. Figur 70) DC sei Mittelsenkrechte, d. h.:

$$AD = BD, \sphericalangle ADC = 90^0 = BDC$$

Behauptung: $\triangle ABC$ ist gleichschenklig.

Figur 70.



Antwort. Dass ein Dreieck gleichschenklig ist, kann erkannt werden zunächst daran, dass es zwei gleiche Seiten oder zwei gleiche Winkel hat. Aber auch das Zutreffen einer der in den Sätzen 57 oder 58 ausgesprochenen Eigenschaften machen ein Dreieck zu einem gleichschenkligen. Es ist nämlich jedes Dreieck gleichschenklig; 1) wenn in ihm eine Mittelsenkrechte zugleich durch die Gegenecke geht, oder 2) eine Winkelhalbierende zugleich Höhe oder 3) Mittellinie ist, oder 4) wenn zwei Höhen oder 5) zwei Mittellinien oder Winkelhalbierende gleichlang sind, oder 6) wenn ein Aussenwinkel doppelt so gross als ein nicht an derselben Ecke liegender Innenwinkel ist, u. s. w. In allen diesen Fällen nämlich lässt sich durch Umklappen um eine passend gewählte Achse nachweisen, dass im ganzen Dreieck zwei Seiten oder

Beweis: Zum Beweise klappe man um die Linie CD selbst um. Dann ist CD sich selbstentsprechend, $\sphericalangle CDB$ fällt auf CDA, Strecke DB auf DA, also Punkt B auf Punkt A, folglich auch Strecke BC auf CA und $\sphericalangle DBC$ auf DAC. Also kann man als Satz aussprechen: „Wenn ein Eckpunkt eines Dreiecks senkrecht über der Mitte seiner Gegenseite liegt, so ist das Dreieck gleichschenklig." zwei Winkel gleich werden, dass es also gleichschenklig ist.

Erkl. 180. Noch einfacher gestaltet sich der letzte Fall:

Voraussetzung: Aussenwinkel bei C sei doppelt so gross wie α, d. h.:

$$180^0 - \gamma = 2 \cdot \alpha$$

Behauptung: $\triangle ABC$ ist gleichschenklig.

Beweis: Zum Beweise benütze man bloss den Satz vom Aussenwinkel, wonach der Aussenwinkel $180 - \gamma = \alpha + \beta$ sein muss. Da nach Voraussetzung auch $180 - \gamma = 2\alpha$ ist, so muss $2\alpha = \alpha + \beta$ sein, also erhält man durch beiderseitige Subtraktion von α das Ergebnis:

$$\alpha = \beta.$$

Frage 98. Auf welche Weisen kann man ein gleichschenkliges Dreieck in Rücksicht auf die Antwort der vorigen Frage konstruieren?

Antwort. In Rücksicht der Antwort auf vorige Frage kann man ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren, indem man einem Dreieck irgend eine der Eigenschaften beilegt, welche nach Antwort der Frage 97 ein Dreieck zu einem gleichschenkligen machen.

Man erhält also ein gleichschenkliges Dreieck:

1) wenn man auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus gleiche Stücke abträgt und die Endpunkte derselben verbindet (s. Fig. 71),

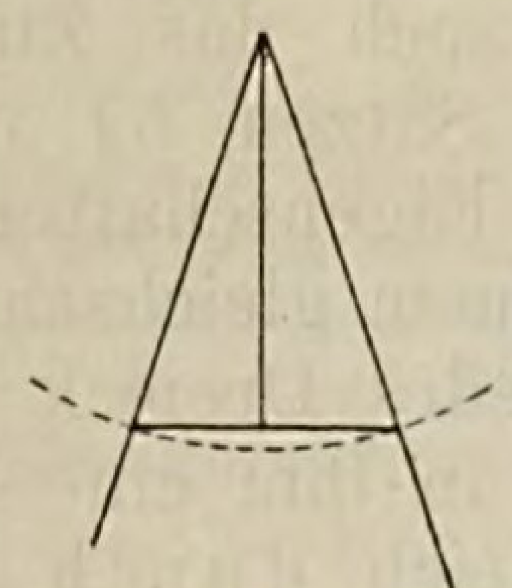
2) wenn man an einer Strecke in deren Endpunkten gleiche Winkel nach derselben Seite (also in entgegengesetztem Drehungssinne) anträgt (siehe Figur 72),

3) wenn man Punkte sucht, die von den Endpunkten einer Strecke gleichen Abstand haben, und mit diesen Punkten die beiden Endpunkte verbindet (s. Figur 73),

4) wenn man einen Punkt auf der Mittelsenkrechten einer Strecke mit den Endpunkten dieser Strecke verbindet,

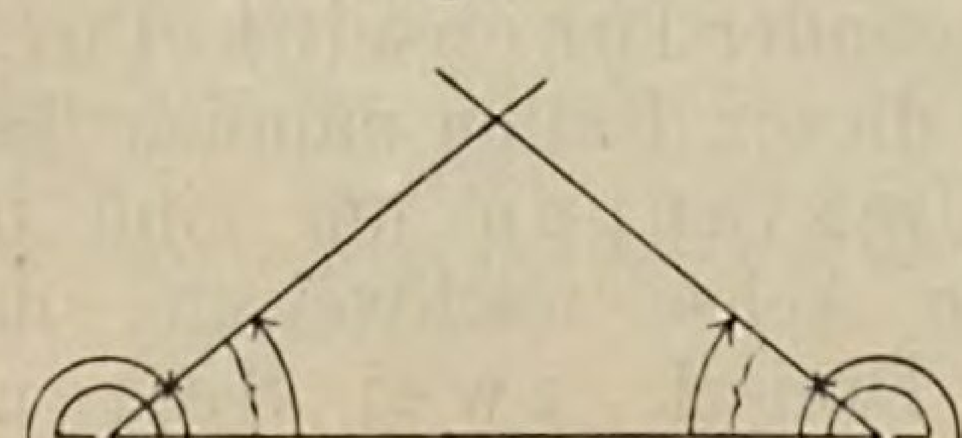
Erkl. 181. Um auf den Schenkeln eines Winkels zwei Punkte zu finden, welche vom Scheitel gleiche Entfernung haben, setzt man mit dem Zirkel im Scheitel des Winkels ein und beschreibt mit gleichem Radius zwei Kreisbögchen, welche die beiden Schenkel schneiden (s. Figur 71).

Figur 71.



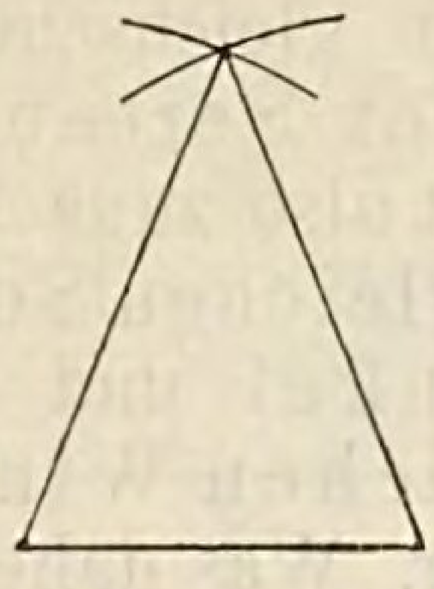
Erkl. 182. Um an den Endpunkten einer Strecke gleiche Winkel anzutragen, legt man den Winkelmesser an und misst eine gleiche Anzahl Grade ab in den beiden entgegengesetzten Zählungen desselben. Jedoch ist diese Art weniger genau, als die vorhergehende und nachfolgende.

Figur 72.



Erkl. 183. Um Punkte zu finden, die von den Endpunkten einer Strecke gleiche Entfernung haben, zeichnet man um den einen Endpunkt mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, setzt dann im andern Endpunkt mit demselben Radius ein, und beschreibt ein Kreisbögchen, welches den ersten trifft. Der Schnittpunkt beider Kreisbogen hat dann den gleichen Abstand von beiden Mittelpunkten. Denn nach Lehrsatz 26 des ersten Teils hat jeder Punkt einer Kreislinie gleiche Entfernung vom Mittelpunkt.

Figur 73.

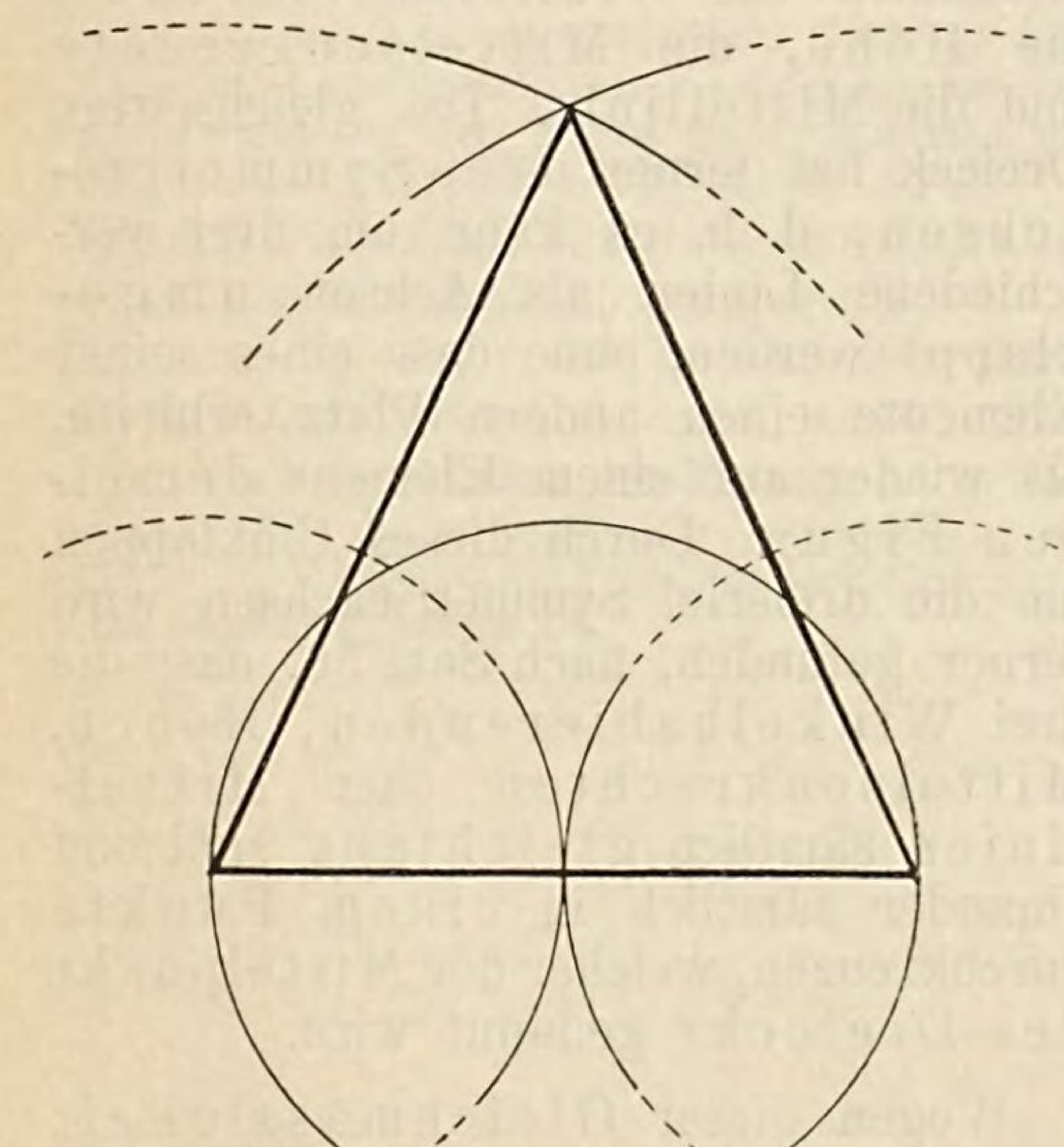


5) wenn man auf der Halbierungslinie eines Winkels eine Senkrechte errichtet,

6) wenn man auf einer Strecke in ihrem Endpunkt eine Senkrechte errichtet und den Anfangspunkt der Strecke mit zwei Punkten jener Senkrechten verbindet, die nach beiden Seiten vom Fusspunkt gleichen Abstand haben, — u. s. w.

Frage 99. Welches sind die Mittelpunkte und Radien der Kreislinien, welche nach den Angaben der vorigen Antwort bei einem gleichschenkligen Dreieck in Betracht kommen können?

Figur 74.



Erkl. 184. Von zwei Kreisen der vierten Art sagt man, sie berühren einander in dem Mittelpunkt der Grundseite (s. die Lehre vom Kreise im nächsten Teile dieses Lehrbuchs).

Antwort. Bei einem gleichschenkligen Dreieck können folgende Kreislinien in Betracht kommen:

1) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Spitze ist und dessen Radius der eine Schenkel ist, geht nicht nur durch die eine, sondern durch beide Ecken der Grundseite.

2) Zwei Kreise, deren Mittelpunkte die beiden Ecken der Grundseite, deren Radius die gemeinschaftliche Länge der beiden Schenkel ist, schneiden einander in der Spitze.

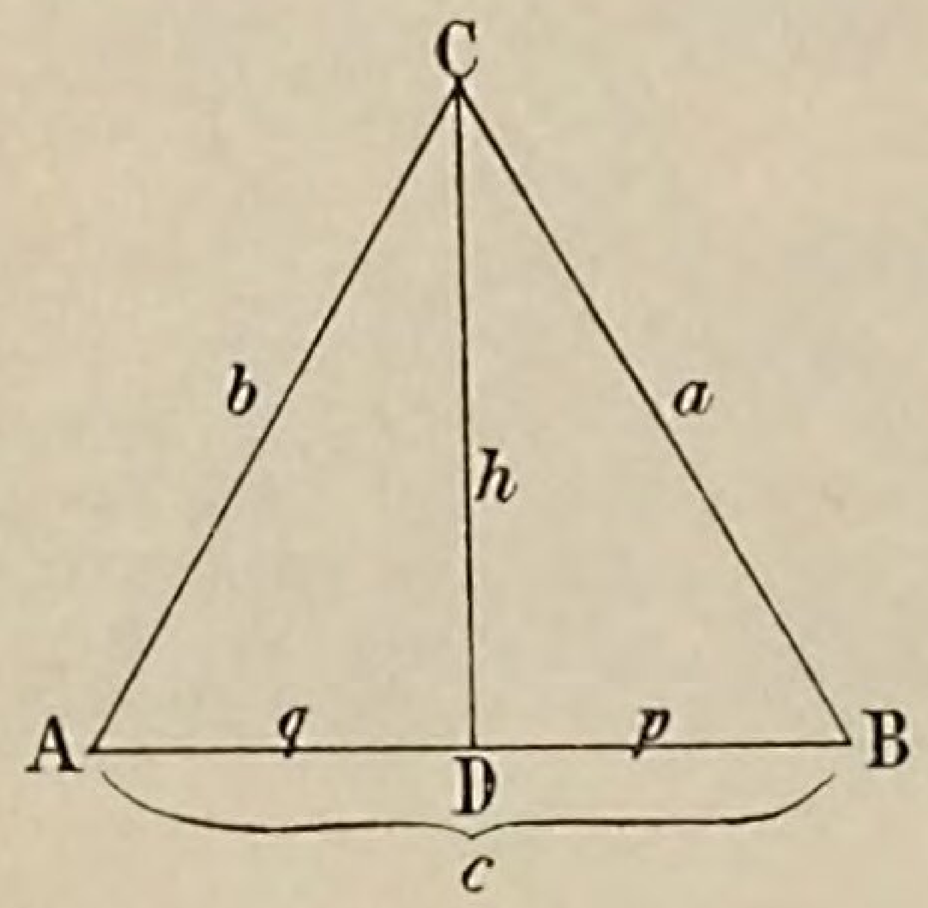
3) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Grundseite ist, und dessen Radius die Hälfte der Grundseite ist, geht durch beide Ecken der Grundseite.

4) Zwei Kreise, deren Mittelpunkte die beiden Ecken der Grundseite, deren Radien die gemeinschaftlich gleiche Hälfte der Grundseite ist, gehen beide durch den Mittelpunkt der Grundseite.

β) Ueber das gleichseitige Dreieck.

Frage 100. Welche Eigentümlichkeiten muss ein Dreieck besitzen, welches drei gleiche Seiten oder drei gleiche Winkel hat?

Figur 75.



Erkl. 185. Schon in Antwort auf Frage 41 des ersten Teils wurde berechnet, dass wenn ein Dreieck drei gleiche Winkel hat, dann jeder ein Drittel der Gesamtwinkelsumme betragen muss, also jeder:

$$\frac{1}{3}\cdot 180^0 = 60^0 = \frac{2}{3}\,\mathrm{R}.$$

Erkl. 186. Man überzeugt sich leicht, dass für das gleichseitige Dreieck die in Antwort auf die Fragen 95 und 96 aufgeführten Bedingungen zwischen Seiten und Winkeln erfüllt sind. Denn hat jede der drei Seiten die Grösse a, so ist die Summe zweier Seiten $2a$, also grösser als a; und die Differenz zweier Seiten ist 0, also kleiner als a. Ferner ist erfüllt, dass:

$$\sphericalangle\gamma = 180 - 2\alpha = 2\,(90 - \alpha)$$

und dass:

$$\alpha = \frac{180-\gamma}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}$$

sowie dass der Aussenwinkel:

$$= 2\alpha = \alpha + \gamma = 90 + \frac{\gamma}{2}.$$

Denn es ist:

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^0 = 180 - 2\cdot 60 =$$
$$2\cdot(90-60) = \frac{180-60}{2} = 90 - \frac{60}{2},$$

und der Aussenwinkel hat:

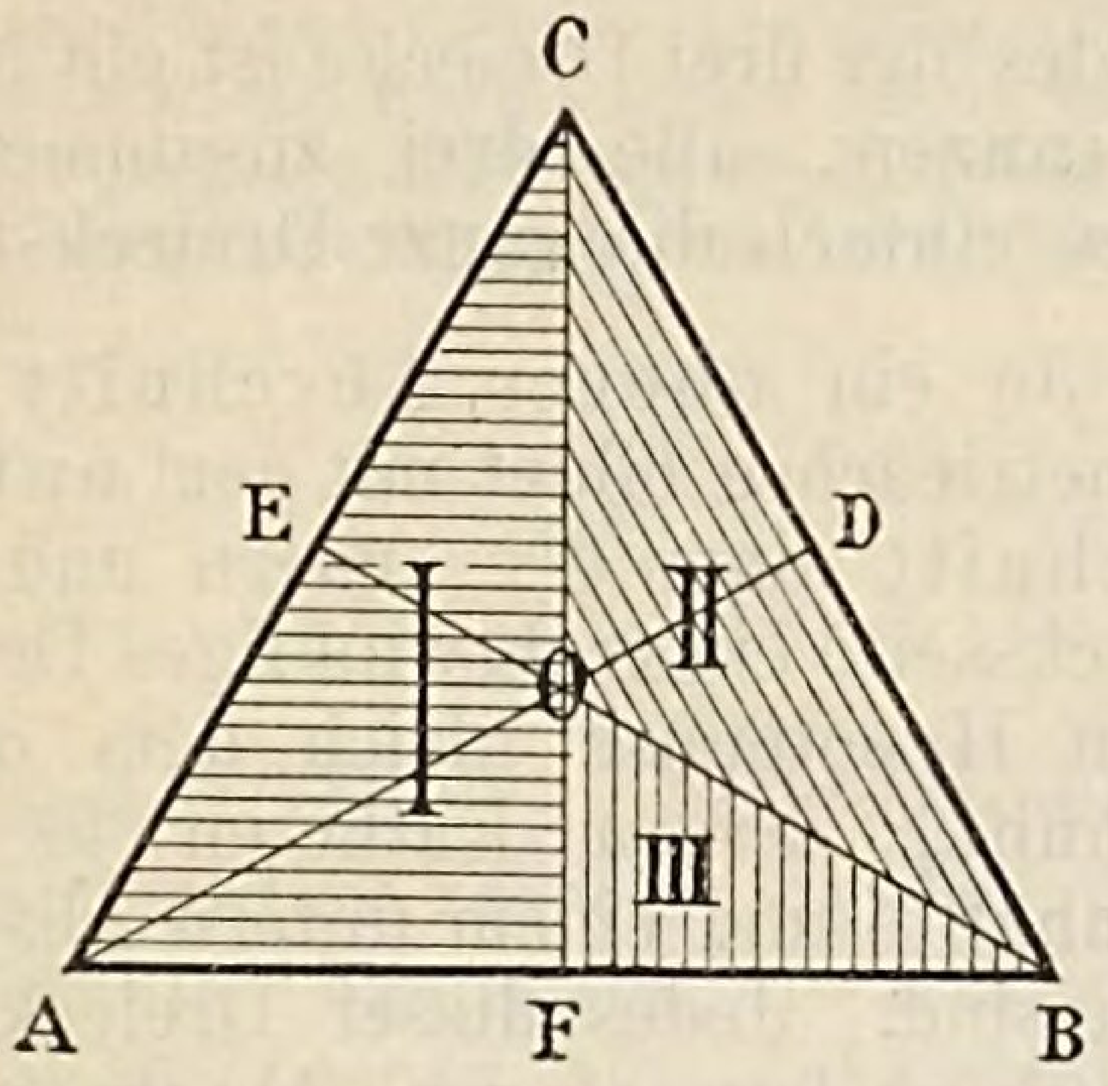
$$120^0 = 2\cdot 60 = 60 + 60 = 90 + \frac{60}{2}.$$

Antwort. Da schon ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten oder Winkeln gleichschenklig ist für die dritte bezw. die gemeinschaftliche Schenkelseite als Grundseite, so muss ein Dreieck mit drei gleichen Seiten oder Winkeln gleichschenklig sein für jede der drei Seiten als Grundseite. Es hat also zunächst jedes Dreieck mit drei gleichen Seiten auch drei gleiche Winkel und jedes Dreieck mit drei gleichen Winkeln ist auch gleichseitig. Was daher vom gleichschenkligen Dreieck nur in Bezug auf Spitze und Grundseite galt, muss beim gleichseitigen Dreieck in Bezug auf alle drei Seiten und ihre Gegenecken gelten. Es fallen also nach Satz 57 beim gleichseitigen Dreieck für jede Ecke bezw. jede Seite in eine und dieselbe Linie zusammen: die Winkelhalbierende, die Höhe, die Mittelsenkrechte und die Mittellinie. Das gleichseitige Dreieck hat ferner drei Symmetrieachsen, d. h. es kann um drei verschiedene Linien als Achsen umgeklappt werden, ohne dass eines seiner Elemente einen andern Platz erhielte, als wieder auf einem Element derselben Figur. Durch dieses Umklappen um die dreierlei Symmetrieachsen wird ferner gefunden, nach Satz 58, dass die drei Winkelhabierenden, Höhen, Mittelsenkrechten oder Mittellinien sämtlich gleichlang sind und einander sämtlich in einem Punkte durchkreuzen, welcher der Mittelpunkt des Dreiecks genannt wird.

Wegen dieser Gleichmässigkeit aller seiner Eigenschaften wird das gleichseitige Dreieck auch das „regelmässige Dreieck“ genannt.

Frage 100 a. Welche Teildreiecke werden im gleichseitigen Dreieck durch die drei Symmetrieachsen desselben gebildet?

Figur 75a.



Erkl. 186a. Die sechs Dreiecke der ersten Art sind:

AFC, *BFC*; *BDA*, *CDA*; *CEB*, *AEB*;

die drei der zweiten Art sind:

AOB, *BOC*, *COA*;

jene der dritten Art:

AFO, *BFO*; *BDO*, *CDO*; *CEO*, *AEO*.

Jedes Dreieck einer der drei Gattungen ist mit dreien von derselben Art achsig-symmetrisch je zu einer der drei Höhen als Symmetrieachse: nämlich die Dreiecke *ACF*, *AOC*, *AFO*:

1) zu *FC* als Achse mit *BCF*, *BOC*, *BFO*;

2) zu *BE* als Achse mit *CAD*, *COA*, d. h. sich selbst, *CDO*;

3) zu *AD* als Achse mit *ABE*, *AOB*, *AEO*.

In nebenstehender Ausführung ist jeweils nur soweit die gegenseitige Vertauschung angegeben, dass jedes der Dreiecke der betrachteten Art einmal genannt ist.

Antwort. Zeichnet man in einem gleichseitigen Dreieck die drei Symmetrieachsen desselben, so werden folgende Teildreiecke erzeugt (siehe Figur 75a):

1) Jede Symmetrieachse als ganze teilt das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse gleich einer Seite, deren Katheten je einer Seitenhälfte und einer Höhe des gleichseitigen Dreiecks gleich sind. Jedes dieser Dreiecke hat gegenüber der Höhenstrecke einen Winkel von 60^0, als dritten Winkel also einen halben Dreieckswinkel von 30^0. Durch Umklappung um eine der drei Achsen kommt jedes dieser sechs Dreiecke je mit einem achsig-symmetrischen zur Deckung, nämlich durch Umklappung um *FC* als Achse:

$\triangle$ *ACF* mit *BCF*, $\triangle$ *AEB* mit *BDA*, $\triangle$ *ACD* mit *BCE*.

Ebenso gelangt jedes dieser sechs Dreiecke durch eine Umdrehung um 120^0 um den Mittelpunkt in positiver bezw. negativer Drehungsrichtung je mit einem andern derselben sechs Dreiecke zur Deckung, nämlich:

$\triangle$ *ACF* mit *BAD* bezw. *CBE*,

$\triangle$ *AEB* mit *BFC* bezw. *CDA*.

Jedes der sechs Dreiecke ist die Hälfte des ganzen, alle sechs zusammen bedecken dreifach die ganze Dreiecksfläche.

2) Die oberen Abschnitte je zweier Symmetrieachsen bilden mit einer Dreiecksseite ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundseite gleich einer Seite, dessen Schenkel je zwei obere Abschnitte sind. An der Grundseite hat jedes dieser Dreiecke zwei halbe Dreieckswinkel von je 30^0, an der Spitze also einen Winkel von 120^0.

Durch Umklappung um eine der drei Achsen kommen je zwei dieser drei Dreiecke gegenseitig mit einander zur Deckung, das dritte aber mit sich selbst, nämlich durch Umklappung um *FC* als Achse:

$\triangle$ *AOC* mit *BOC*; *AOB* mit sich selbst.

Durch Umdrehung um 120° um den Mittelpunkt in positiver bezw. negativer Drehungsrichtung gelangt jedes dieser drei Dreiecke mit einem der benachbarten zur Deckung, nämlich:

$\triangle AOC$ mit BOA bezw. COB.

Jedes der drei Dreiecke ist ein Drittel des ganzen, alle drei zusammen bedecken einfach die ganze Dreiecksfläche.

Erkl. 186b. Unter oberen und unteren Abschnitten sind bei den Höhen des Dreiecks zu verstehen die nach der Spitze bezw. nach den Fusspunkten gehenden Abschnitte der Höhen. Es sind also auf den

Höhen	AD,	BE,	CF:
obere Abschnitte	AO,	BO,	CO,
untere Abschnitte	OD,	OE,	OF.

Würde man längs den Höhen und ihren Abschnitten die sämtlichen Teildreiecke aus Papier einzeln ausschneiden, so würde man diejenigen der zweiten und dritten Gattung aneinanderlegen müssen, jene der ersten Gattung aber aufeinander, so dass ein dreifaches Blatt entstünde auf der ursprünglichen Dreiecksfläche.

3) Je ein oberer Abschnitt einer Symmetrieachse bildet mit dem unteren Abschnitt einer der andern und einer Dreiecksseite ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich dem oberen Abschnitt, dessen Katheten je einer Seitenhälfte und einem untern Abschnitt gleich sind. Jedes dieser Dreiecke hat gegenüber dem oberen Abschnitt den rechten Winkel, gegenüber dem unteren Abschnitt einen halben Dreieckswinkel von 30°, gegenüber der Seitenhälfte einen Winkel von 60°. Durch Umklappung um eine der drei Achsen kommt jedes dieser sechs Dreiecke je mit einem achsig-symmetrischen zur Deckung, nämlich durch Umklappung um FC als Achse:

$\triangle AFO$ mit BFO, AEO mit BDO,
CEO mit CDO.

Ebenso gelangt jedes dieser sechs Dreiecke durch eine Umdrehung um 120° um den Mittelpunkt in positiver bezw. negativer Drehungsrichtung je mit einem andern derselben sechs Dreiecke zur Deckung, nämlich:

$\triangle AFO$ mit $\triangle BDO$ bezw. CEO,
$\triangle AEO$ mit $\triangle BFO$ bezw. CDO.

Jedes der sechs Dreiecke ist ein Sechstel des ganzen, alle sechs zusammengefügt bedecken einfach die ganze Dreiecksfläche.

Frage 101. In welcher Weise werden die in Antwort der Frage 98 angegebenen Konstruktionen sich für das gleichseitige Dreieck abändern?

Antwort. Um ein gleichseitiges Dreieck zu erhalten, kann man auf folgende Weise verfahren:

1) Man zeichnet mittels des Winkelmessers einen Winkel von 60⁰ und trägt auf dessen Schenkeln gleiche Stücke ab; oder

2) man trägt an den beiden Endpunkten einer Strecke mittels des Winkelmessers im entgegengesetzten Drehungssinne Winkel von 60⁰ an; oder

3) man sucht einen Punkt, dessen Abstand von den Endpunkten einer Strecke der Länge dieser selben Strecke gleich ist.

Erkl. 187. Da die beiden ersten Arten die Benützung des Winkelmessers erfordern, so sind sie weniger genau, als die auch einfachere und deshalb gebräuchlichste dritte Art. Diese wird ausgeführt, wie in Erkl. 181 angegeben wurde, indem als Radius des Kreises die Strecke selbst benutzt wird. — Die drei weiteren Fälle der Antwort auf Frage 98 gestatten keine unmittelbare Uebertragung auf das gleichseitige Dreieck.

Frage 102. Welche Anwendung auf das gleichseitige Dreieck ergeben die in Antwort der Frage 99 für das gleichschenklige Dreieck aufgeführten Kreislinien?

Antwort. Da beim gleichseitigen Dreieck Spitze und Grundseitenecke bezw. Schenkel und Grundseite gleichbedeutend werden, so fallen die beiden ersten Arten der in Antwort der Frage 99 erwähnten Kreise in eine einzige Gattung zusammen, und man hat beim gleichseitigen Dreieck nur noch dreierlei Gruppen von Kreisen in Betracht zu ziehen, nämlich:

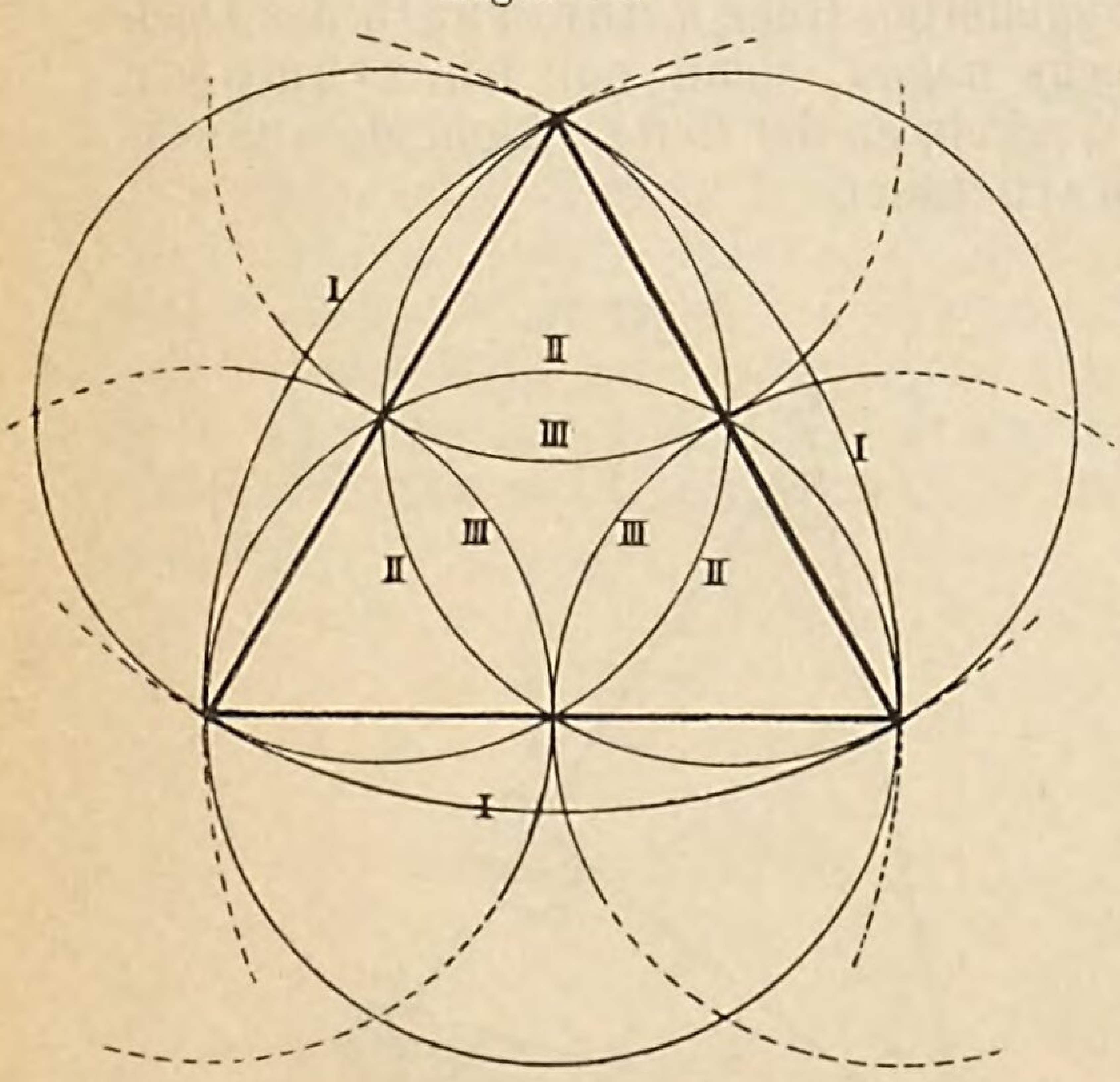
1) Drei Kreise, deren Mittelpunkte je eine Ecke und deren Radius jeweils die Seitenlänge des Dreiecks ist; jeder dieser Kreise geht durch zwei Ecken des Dreiecks und schneidet daselbst je einen der beiden andern Kreise gleicher Art.

2) Drei Kreise, deren Mittelpunkt die Mitte je einer Seite ist, und deren Radius die halbe Seitenlänge des Dreiecks ist, gehen je durch die beiden Ecken der zugehörigen Seite.

3) Drei Kreise, deren Mittelpunkt je eine Ecke, und deren Radius wieder die halbe Seitenlänge ist, gehen jeweils zu zweien durch die Mittelpunkte der beiden Seiten, welche in ihrem Mittelpunkte zusammenstossen.

Erkl. 188. Dass die Kreise der zweiten Art ebenfalls durch die Mittelpunkte der Seiten gehen, also daselbst mit den Kreisen der dritten Art zusammentreffen, rührt daher, dass die Mitten zweier Seiten mit einer benachbarten Ecke selbst wieder ein gleichwinkliges Dreieck bilden (s. darüber noch später in den Antworten 144 und 147).

Figur 76.



Erkl. 189. Die Konstruktion der Kreise der ersten Art liefert insbesondere die Mittel, einen Winkel von 60⁰ ohne Winkelmesser mit dem Zirkel genau zu erhalten.

γ) Ueber das rechtwinklige Dreieck.

Frage 103. Welche Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks sind in den bisherigen Ausführungen festgestellt worden?

Erkl. 190. Aus dem nebenstehenden ist in erster Reihe zu entnehmen, dass ein rechtwinkliges Dreieck nie gleichseitig sein kann. Ueber die Lage und Benennung der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks vergl. man Erkl. 133.

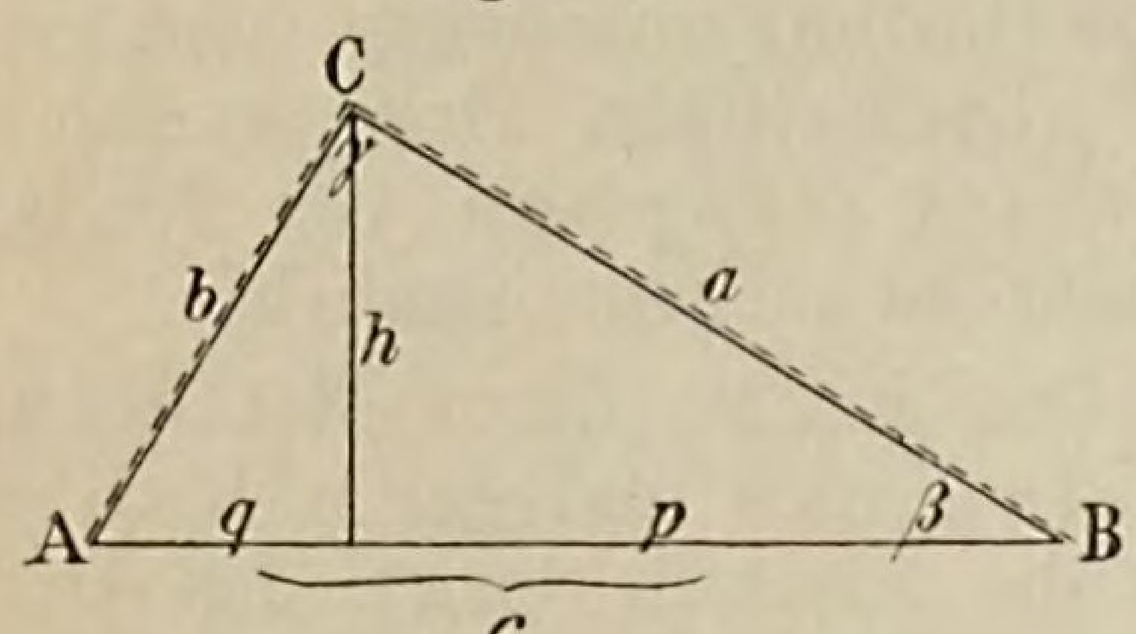
Antwort. Ueber das rechtwinklige Dreieck wurde bereits festgestellt:

1) im Lehrsatz 17 des zweiten Teils, dass es neben dem rechten Winkel nur noch zwei spitze Winkel haben könne, und dass diese Komplementwinkel seien;

2) im Satz 48 dieses Teils, dass deshalb auch die dem rechten Winkel gegenüberliegende Hypotenuse länger sei, als jede der beiden Katheten.

Frage 104. Welche Lage haben nach Abschnitt 2) und 6) der Antwort auf Frage 85 die drei Höhen im rechtwinkligen Dreieck?

Figur 77.



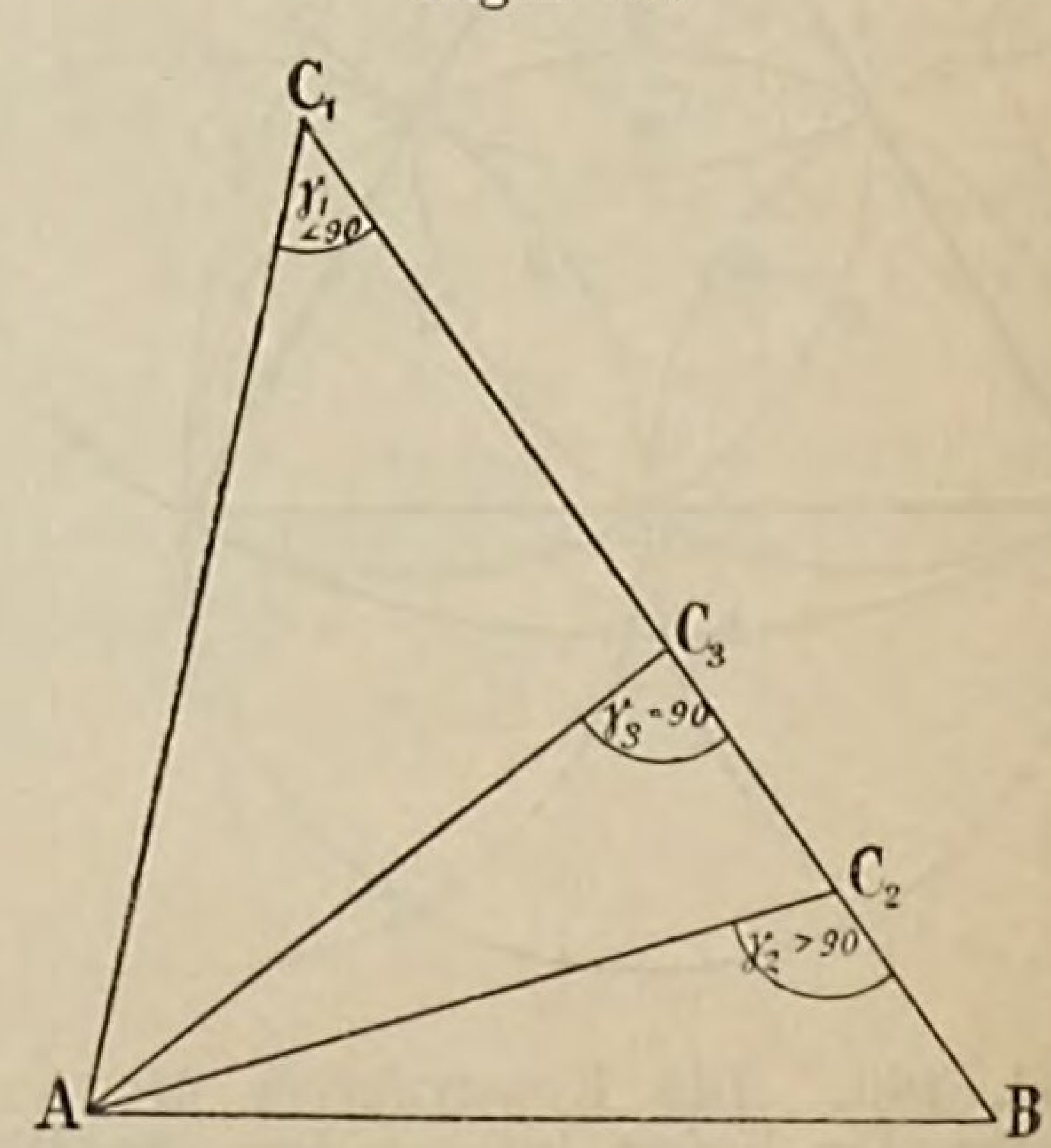
Erkl. 191. Beim rechtwinkligen Dreieck wird insbesondere die Hypotenuse als Grundseite gewählt, und die ihr zugehörige Höhe, weil die beiden andern mit Seiten zusammenfallen, auch meist mit h ohne Index bezeichnet und schlechtweg „die Höhe“ des rechtwinkligen Dreiecks genannt.

Erkl. 192. Wie schon in Erkl. 154 für das beliebige Dreieck angedeutet wurde, schneiden sich auch im rechtwinkligen Dreieck die drei Höhen in einem Punkte. Dieser Punkt fällt hier in den Punkt C, den Scheitel des rechten Winkels selber.

Erkl. 193. Wie schon aus Antwort der Frage 85 hervorgeht, bildet das rechtwinklige Dreieck den Uebergang für Winkel und Höhenlage Ist der Winkel γ ein spitzer, wie im Dreieck ABC_1 in Figur 78, so liegt der Höhenfusspunkt innerhalb BC diesseits C, ist γ ein stumpfer, wie in Dreieck ABC_2, so liegt der Höhenfusspunkt ausserhalb BC jenseits C; der Uebergang vom spitzen zum stumpfen

Antwort. Von den drei Höhen des rechtwinkligen Dreiecks ABC in Fig. 77 fällt die Höhe h_a von A auf a mit der Seite b zusammen, weil $AC \perp BC$. Auch die Höhe h_b fällt mit Seite a zusammen, weil $BC \perp CA$. Da die an der Grundseite liegenden Winkel α und β beide spitz sein müssen, so muss die zugehörige Höhe h_c innerhalb des Dreiecks liegen, denn nur bei stumpfen Winkeln an der Seite c kann sie ausserhalb fallen.

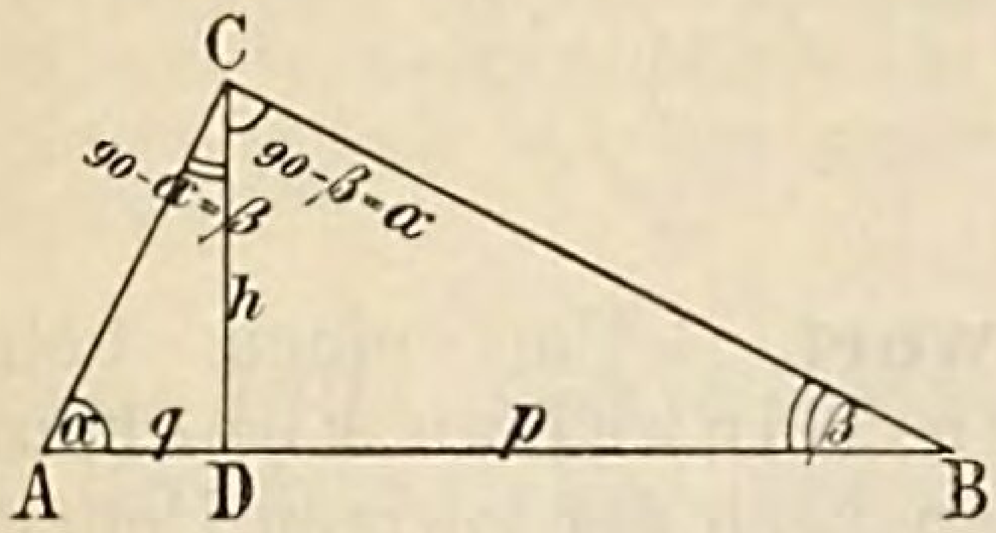
Figur 78.



Winkel ist der rechte Winkel, und dazu gehört diejenige Lage des Höhenfusspunktes, welche die Uebergangsstelle bildet von der diesseitigen zur jenseitigen, nämlich die Lage im Punkte C selbst.

Frage 105. Welche Beziehungen zwischen Seiten, Winkeln und Höhenabschnitten eines rechtwinkligen Dreiecks ergeben sich aus den Sätzen 52?

Figur 79.



Erkl. 194. Die durch die Höhen des rechtwinkligen Dreiecks gebildeten Abschnitte p und q werden auch die „Segmente" der Hypotenuse genannt (von secare = abschneiden, secamentum, assimiliert zu segmentum = Abschnitt).

Erkl. 195. Von den Teilwinkeln des $\sphericalangle \gamma$ bei C ist der eine, $ACD = 90 - \alpha$, der andere $BCD = 90 - \beta$, zusammen $90 - \alpha + 90 - \beta = 180 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

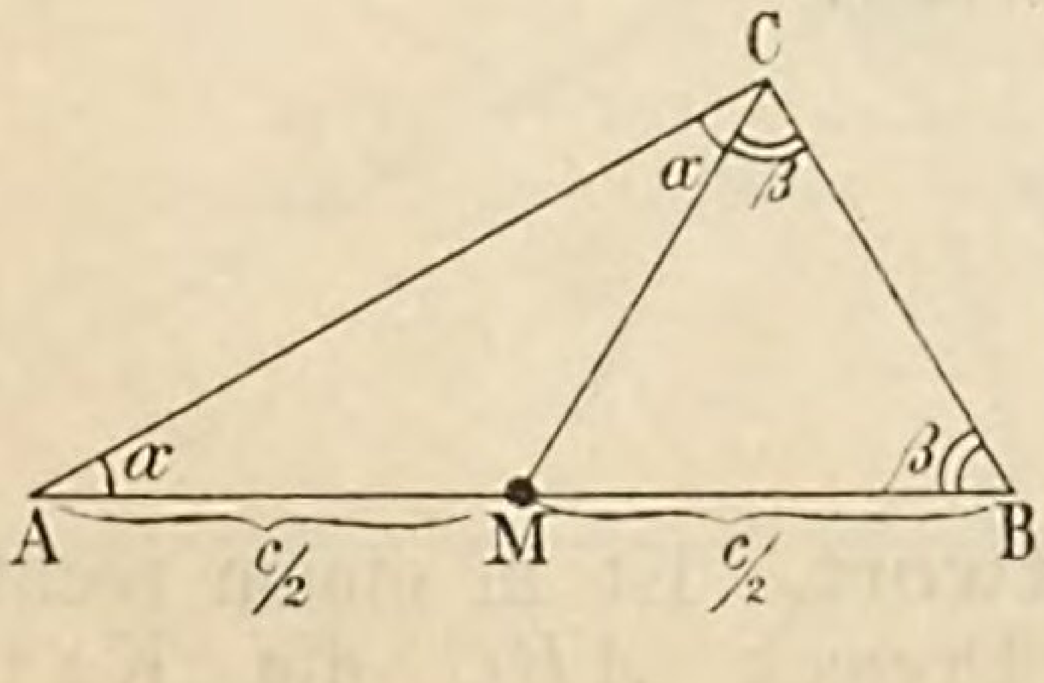
Antwort. Ueber die Beziehungen der Seiten a und b, der Winkel α und β und der Abschnitte p und q auf der Hypotenuse ergibt sich aus den Sätzen 52 folgendes:

Die längere Kathete liegt dem grösseren Winkel gegenüber, hat also den kleineren anliegenden Winkel, aber die längere Projektion; und umgekehrt hat der grössere Winkel die kleinere anliegende Kathete und Projektion. Der Höhenfusspunkt D liegt also auf derjenigen Hälfte der Hypotenuse, welche dem grösseren Winkel aber der kleineren Kathete anliegt.

Am Punkt C aber liegt an der grösseren Kathete der grössere Abschnitt des Winkels γ, an dem kleineren Teilwinkel auch die kleinere Kathete.

Frage 106. Welche Figur entsteht, wenn man den einen spitzen Winkel α des rechtwinkligen Dreiecks nicht, wie bei der Höhe an der andern, sondern an der gleichen Kathete vom Scheitel des rechten Winkels aus anträgt?

Figur 80.



Erkl. 196. Vergl. hier auch die Aufgabe 144 der Aufgabensammlung am Schlusse des ersten Teiles.

Antwort. Wenn der Winkel $\alpha = CAB$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC in Figur 80 an derselben Kathete CA in C angetragen wird, so entsteht eine Teilungslinie CM des rechtwinkligen Dreiecks, durch welche das Dreieck CAM abgeschnitten wird. In diesem Dreieck ist aber $\sphericalangle \alpha$ zweimal vorhanden, nämlich $\sphericalangle CAM = \sphericalangle ACM$, also ist das Dreieck gleichschenklig mit Grundseite AC, folglich mit gleichen Schenkeln $AM = CM$.

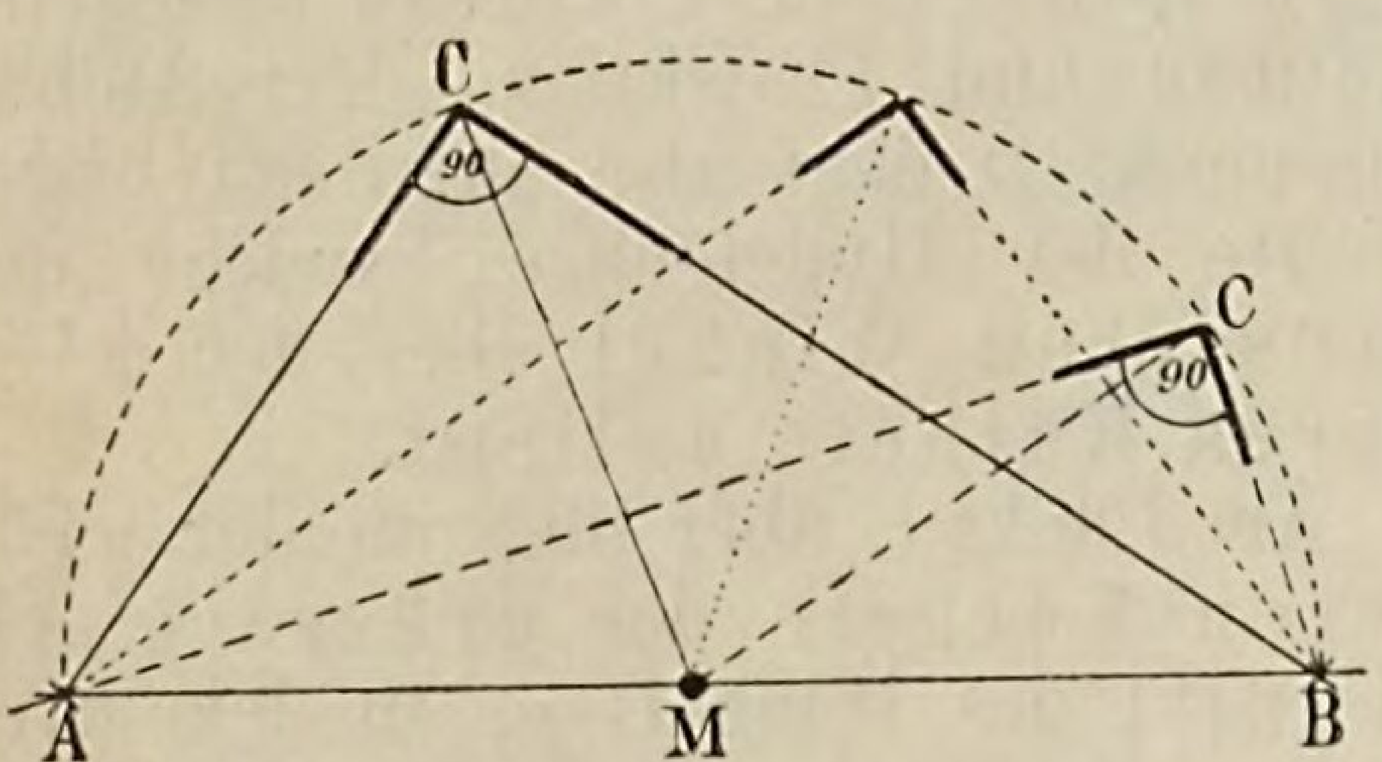
Im andern Teildreieck MCB ist sodann der Winkel bei $B = \beta = 90 - \alpha$ als Komplement zu α im rechtwinkligen

Dreieck ABC; und der Winkel bei $C = MCB$ muss auch $= 90 - \alpha$ sein als Komplement zu ACM im rechten Winkel ACB. Folglich ist auch $\sphericalangle MCB = MBC$ und es ist auch das Dreieck MCB gleichschenklig mit Grundseite BC und Schenkeln $BM = CM$. Die Vergleichung mit dem vorigen Ergebnis liefert also die Gleichheit der drei Stücke $MA = MC = MB$, also ist die erhaltene Teilungslinie CM die Mittellinie m_c des rechtwinkligen Dreiecks.

Erkl. 197. Aus den Antworten auf die Fragen 105 und 106 geht hervor, dass die Höhe das rechtwinklige Dreieck in zwei andere rechtwinklige Dreiecke teilt, welche unter einander und mit dem ganzen Dreieck einzeln gleiche Winkel α, $90^0 - \alpha$, 90^0 haben, — dass dagegen die Mittellinie des rechtwinkligen Dreiecks der halben Hypotenuse gleich ist und das Dreieck in zwei gleichschenklige teilt mit den Basiswinkeln α, α und β, β.

Frage 107. Welche Anwendung gestattet das Ergebnis der vorigen Frage zur Konstruktion eines rechten Winkels?

Figur 81.



Antwort. Um einen beliebigen rechten Winkel zu konstruieren, zieht man nach der vorigen Ueberlegung durch einen beliebigen Punkt M einen Strahl MC und eine Gerade AB, trägt auf den drei Richtungen drei gleiche Stücke ab, nämlich $MC = MA = MB$ und verbindet C mit A und B. Dann bilden die Geraden AC und BC einen rechten Winkel.

Man erhält daher den

Satz 60. Ist in einem Dreieck die Entfernung einer Ecke von der Mitte der Gegenseite gleich der Hälfte dieser Seite, so ist der Winkel an jener Ecke ein rechter.

Da die Richtung der Linie MC vollständig willkürlich war, so muss der rechte Winkel sich ergeben für alle Punkte eines Halbkreises über der Strecke AB als Durchmesser (man vergleiche hierzu den vom Kreise handelnden Abschnitt im nächsten Teile dieses Lehrbuches).

Erkl. 198. Der Beweis für die nebenstehende Konstruktion, welche von dem berühmten Albrecht Dürer angegeben wurde, kann folgendermassen geführt werden: Angenommen der $\sphericalangle MAC$ sei φ, dann sind MAC und MBC gleichschenklige Dreiecke, also $\sphericalangle MCA = MAC = \varphi$, $\sphericalangle CMB$ als Aussenwinkel $= 2\varphi$,

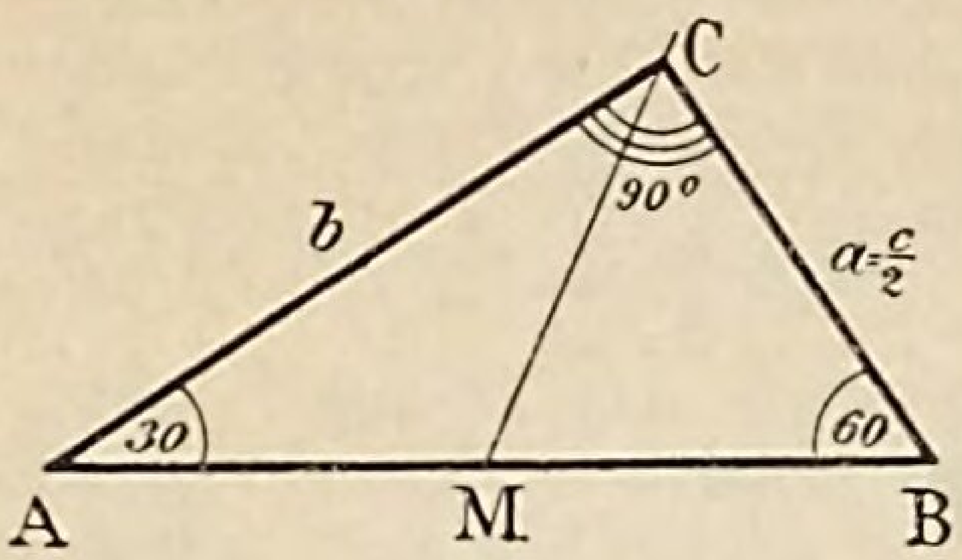
$$\sphericalangle MCB = MBC = \frac{180^0 - 2\varphi}{2} = 90^0 - \varphi.$$

Folglich ist $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + BCM = \varphi + 90^0 - \varphi = 90^0$.

Frage 108. Welche Abänderung erleidet die vorige Figur 81, wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse doppelt so gross wird, als eine der Katheten?

Antwort. Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Kathete $BC = \frac{1}{2} AB$ oder $AB = 2\,BC$, dann ist nach dem vorigen zu den drei

Figur 82.



Erkl. 199. Umgekehrt kann man beweisen, dass wenn in einem Dreieck die Winkel sind: $\frac{1}{3}$R, $\frac{2}{3}$R, 1 R, dass dann die Hypotenuse das Doppelte der einen Kathete ist. Dies trifft zu bei einer Art der im Handel käuflichen Winkelscheite, welche ein aus Holz geschnittenes Dreieck mit den genannten drei Winkeln darstellen.

gleichen Grössen noch eine vierte hinzugetreten, nämlich:

$$MB = MC = MA = \frac{AB}{2} = BC.$$

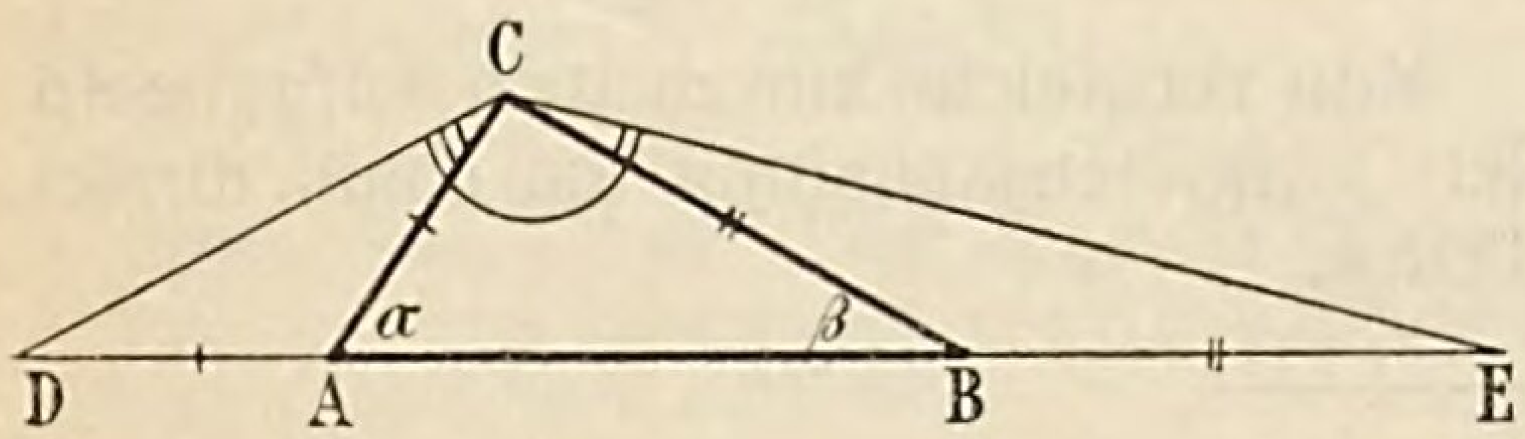
Demnach ist BMC ein gleichseitiges Dreieck, also $\sphericalangle CBM = 60^0$. Folglich ist $\sphericalangle CAB = 30^0$ und die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks werden:

$$\alpha = 30^0 = \frac{1}{3}\text{R}, \quad \beta = 60^0 = \frac{2}{3}\text{R},$$

$$\gamma = 90^0 = \frac{3}{3}\text{R}.$$

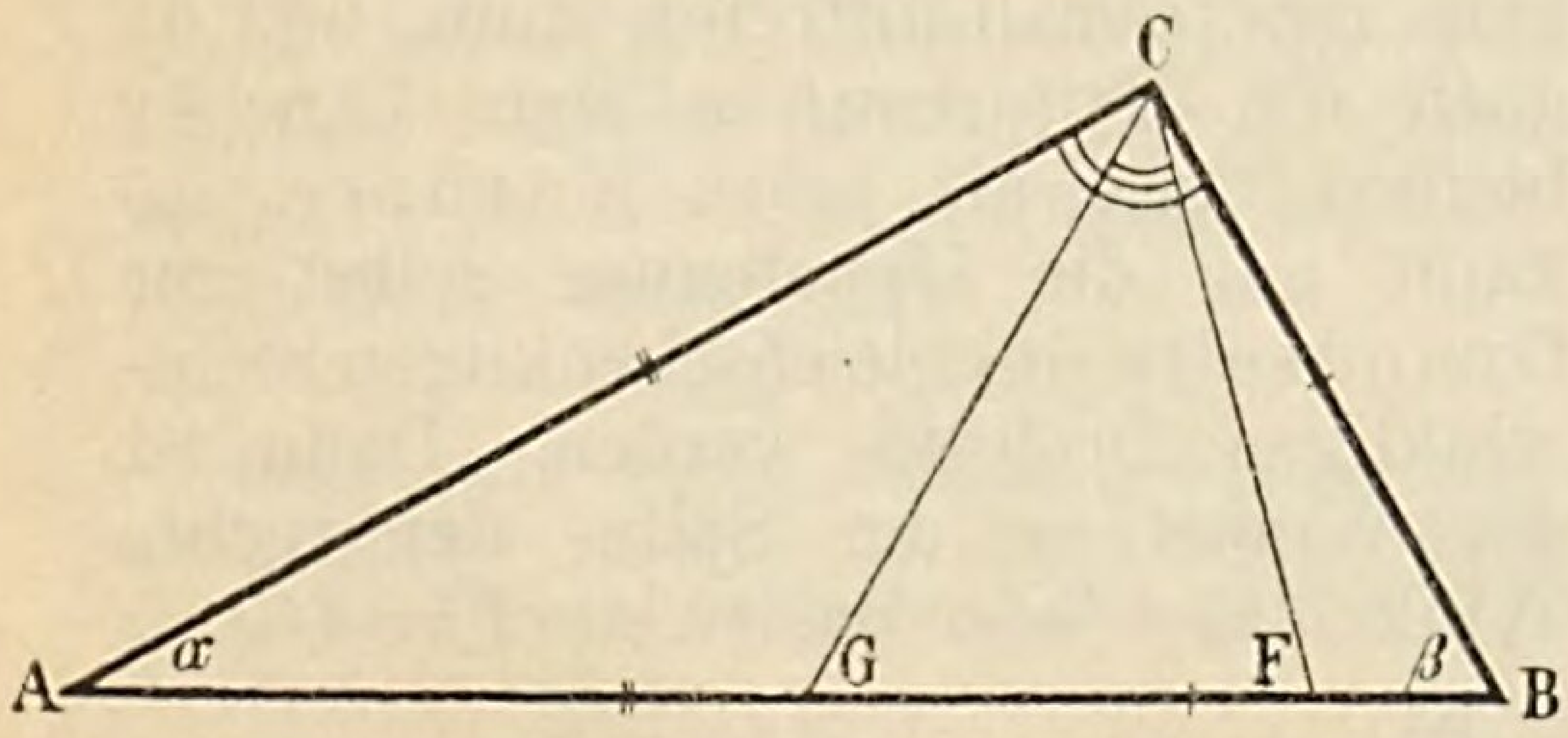
Frage 109. Was für Winkel entstehen am Scheitel des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck, wenn man die Hypotenuse je um die anliegende Kathete verlängert oder verkürzt und die entstehenden Endpunkte mit dem Scheitel des rechten Winkels verbindet?

Figur 83.



Erkl. 200. In den Dreiecken BCF bezw. ACG ist Grundseite CF bezw. CG, also Winkel an der Spitze $CBF = \beta$ bew. $CAG = \alpha$, so dass die Grösse der Winkel an der Grundseite zu entnehmen ist aus Antwort auf Frage 96.

Figur 84.



Antwort. 1) Verlängert man AB um $AD = AC$ (siehe Figur 83), so ist $\triangle ACD$ gleichschenklig, also $\sphericalangle \alpha$ als Aussenwinkel $= 2 \cdot \sphericalangle ACD$, so dass $\sphericalangle ACD = \frac{\alpha}{2}$ wird.

2) Verlängert man AB um $BE = BC$ (siehe Figur 83), so ist $\triangle BCE$ gleichschenklig, also $\sphericalangle \beta$ als Aussenwinkel $= 2 \cdot \sphericalangle BCE$, so dass $\sphericalangle BCE = \frac{\beta}{2}$ wird.

3) Verkürzt man AB um $AF = AC$ (siehe Figur 84), so ist $\triangle ACF$ gleichschenklig, also:

$$\sphericalangle ACF = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sphericalangle BCF = 90 - ACF = \frac{\alpha}{2}.$$

4) Verkürzt man AB um $BG = BC$ (siehe Figur 84), so ist $\triangle BCG$ gleichschenklig, also:

$$\sphericalangle BCG = \frac{180 - \beta}{2} = 90 - \frac{\beta}{2}$$

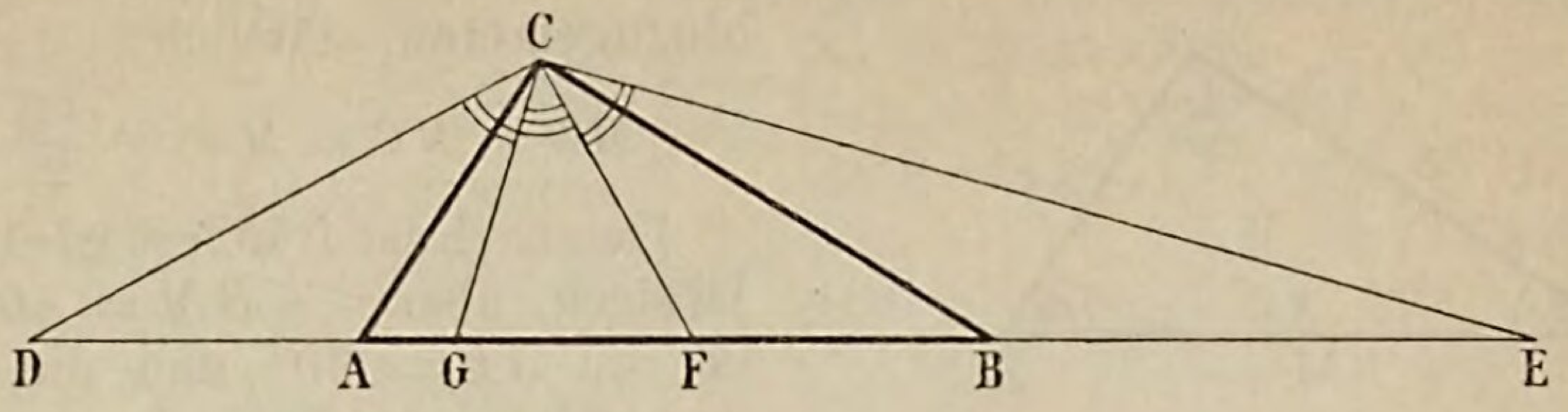
und

$$\sphericalangle ACG = 90 - BCG = \frac{\beta}{2}.$$

5) Sind also beide Katheten auswärts abgetragen (siehe Figur 83), so ist der Winkel:

$$DCE = 90^0 + ACD + BCE = 90 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90 + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Figur 85.



Erkl. 201. Wird dieselbe Kathete ein- und auswärts angetragen, so kommt für das entstehende Dreieck DCF bezw. ECG Satz 93 in Anwendung und liefert $\sphericalangle DCF = \sphericalangle ECG = 90^0$, wie auch aus der Summe $\frac{\alpha}{2} + \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$ zu erkennen ist.

also:

$$\sphericalangle DCE = 90^0 + 45^0 = 135^0 = \frac{3}{2}\,\text{R}.$$

6) Sind beide Katheten einwärts abgetragen (siehe Figur 84), so ist der Winkel FCG entweder

$$\left.\begin{array}{l} = ACF - ACG = \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} \\ \text{oder:} \\ = BCG - BCF = \left(90 - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} = 90 - \frac{\alpha + \beta}{2} = 45^0 = \frac{1}{2}\,\text{R}.$$

7) Und ist eine Kathete auswärts, die andere einwärts angetragen (siehe Figur 85), so entsteht:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DCG = DCA + ACG = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \\ \text{bezw.:} \\ \sphericalangle ECF = ECB + BCF = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} = 45^0 = \frac{1}{2}\,\text{R}.$$

Man vergleiche hierzu auch Aufgabe 86 der Aufgabensammlung am Ende dieses Teiles.

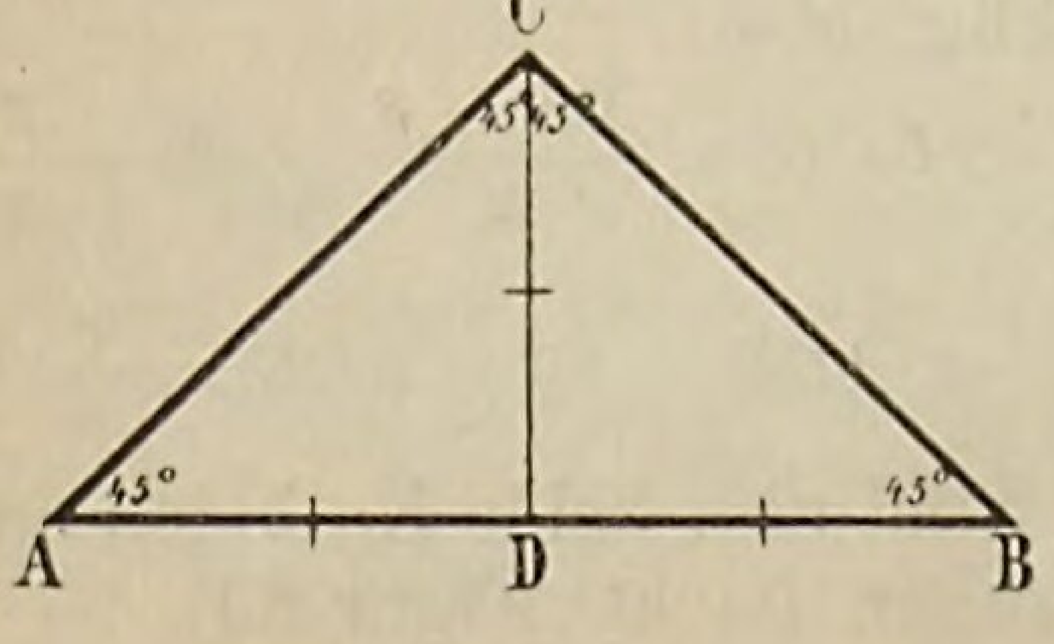
δ) Ueber das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

Frage 110. Welche Eigenschaften musss ein Dreieck erhalten, welches gleichzeitig rechtwinklig und gleichschenklig ist?

Antwort. Da der rechte Winkel kein zweitesmal auftreten kann, und da auch die Hypotenuse stets länger bleiben muss als jede Kathete, so kann nur die Hypotenuse selbst zur Grundseite des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks werden. Dann ist der Winkel an der Spitze der rechte Winkel, also jeder Basiswinkel $= 45^0 = \frac{1}{2}$ R.

Da die Höhe dieses Dreiecks gleichzeitig Mittellinie wird, so beträgt sie nach Erkl. 197 die Hälfte der Grund-

Figur 86.

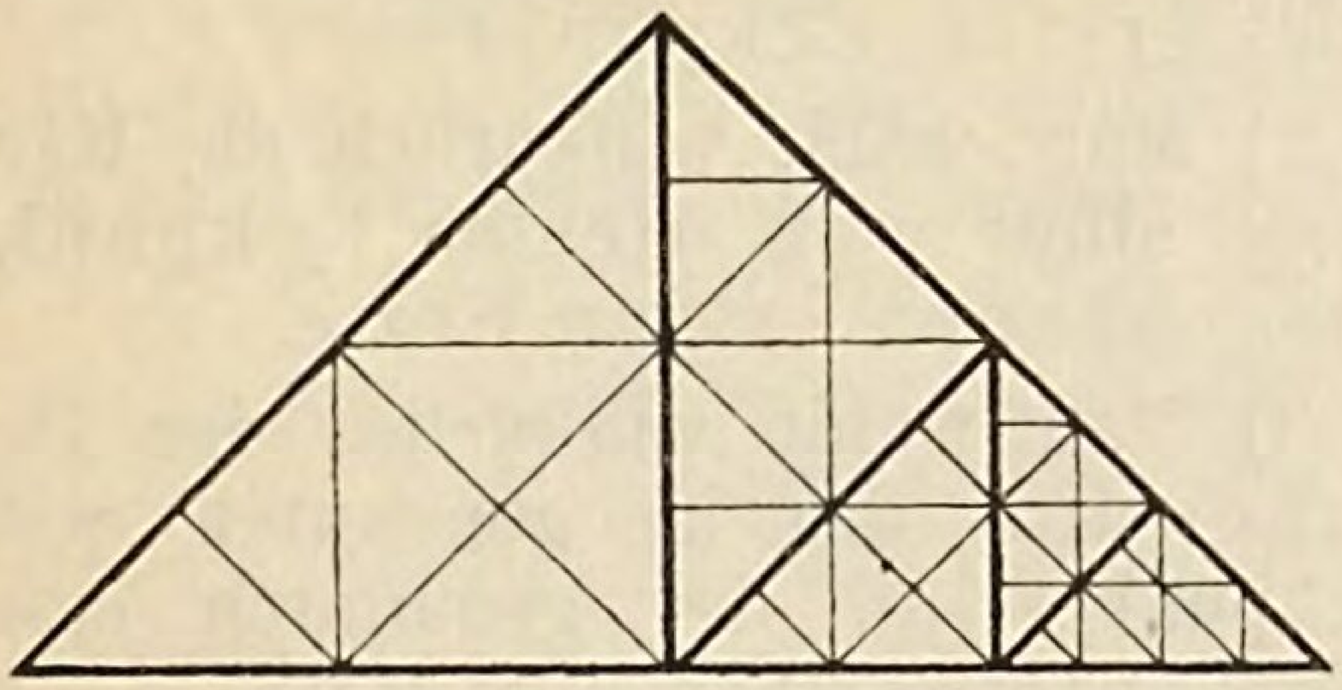


Erkl. 202. Das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck wird auf Grund nebenstehender Ueberlegung durch seine Symmetrie-

achse in zwei ebenfalls rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke zerlegt. Dasselbe ist noch häufiger, als das in Erkl. 197 erwähnte Dreieck, der Gegenstand der praktischen Verwendung als Winkelscheit (siehe Figur 22 und 75 des ersten Teils).

Erkl. 203. Wenn in den durch die Höhe abgeschnittenen Teildreiecken wieder die Höhe gezeichnet wird und ebenso in den neuentstehenden Dreiecken, so entstehen immer wieder stets kleiner werdende rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke, durch welche das ganze Feld in lauter kleine Fächer dieser Gestalt zerlegt wird (siehe Figur 87).

Figur 87.



seite, also $\frac{c}{2}$. Dadurch werden ACD und BCD ebenfalls rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke mit den gleichen Seiten $\frac{c}{2}$ und den Winkeln 45^0, 45^0, 90^0. Man erhält also den

Satz 60a. In jedem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ist die Höhe gleich der halben Hypotenuse bezw. gleich der halben Basis.

d) Ueber die Konstruktion der Dreiecke.

Frage 111. Was versteht man unter der Konstruktion eines Dreiecks aus gegebenen Stücken?

Erkl. 204. Das Wort Konstruktion kommt von dem lateinischen Wort construere = zusammenfügen, herrichten.

Antwort. Unter der Konstruktion eines Dreiecks aus gegebenen Stücken versteht man die mittels Lineal, Massstab, Winkelmesser, Winkelscheit, Zirkel und ähnlichen Hilfsmitteln geschehende Herstellung, oder die Zeichnung, oder die Auffindung eines solchen Dreiecks, bei welchem Seiten oder Winkel oder sonstige Elemente eine vorgeschriebene oder angegebene Grösse haben.

Frage 112. Welche Elemente eines Dreiecks können für die Konstruktion als Bestimmungsstücke in Betracht kommen?

Erkl. 205. Ueber die Konstruktionen eines Dreiecks, bei welchen die Dreiecksfläche in Betracht kommt, sehe man den fünften Teil dieses Lehrbuches.

Erkl. 206. Sind andere Strecken, als bloss Seiten gegeben, so betrachtet man diese als Elemente von Teildreiecken, deren Seiten dann jene anderen Strecken sind.

Antwort. Als Bestimmungsstücke für die Konstruktion eines Dreiecks sind anzusehen die sämtlichen Massgrössen seiner Seiten, Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierenden, Mittelsenkrechten u. s. w., seiner Innenwinkel, Aussenwinkel, der Winkel zwischen andern der vorigen Strecken u. s. w., und die Fläche des Dreiecks, in allererster Reihe aber **Seiten** und **Innenwinkel.**

Frage 113. Inwieweit wird bei der Konstruktion eines jeden Dreiecks willkürlich verfahren?

Antwort. Da jegliches Dreieck, in welchem die gegebenen Strecken in vorgeschriebener Grösse enthalten sind, der Aufgabe genügt — ganz ohne Rücksicht seiner Lage, also ohne Rücksicht der Stelle in der Ebene, in welcher sich das gefundene Dreieck befindet, so kann man über die Lage des gesuchten Dreiecks in der Regel in dreifacher Hinsicht willkürlich verfügen, nämlich wie folgt:

1) Man wählt willkürlich die Lage eines ersten Eckpunktes.

2) Man wählt willkürlich die Richtung einer von diesem Eckpunkte ausgehenden ersten Seite.

3) Man wählt willkürlich den Drehungssinn des im genannten ersten Eckpunkte an der genannten ersten Seite anliegenden Winkels.

Erkl. 207. Die Reihenfolge der nebenstehend genannten Willkürlichkeiten ist meist gleichgültig; es kann daher oft auch erst die Wahl der Lage einer Seite, dann die der Lage eines Eckpunktes erfolgen.

Erkl. 208. Es wird sich später (s. Erkl. 241) herausstellen, dass die genannten drei Willkürlichkeiten genau den drei Ortsveränderungen entsprechen, welche mit geometr. Gebilden vorgenommen werden, nämlich nach der nebenstehenden Reihenfolge 1) Verschiebung, 2) Umdrehung, 3) Umwendung (siehe Antwort der Frage 15).

Erkl. 209. Die dritte Willkürlichkeit wird oft dadurch ausgeschlossen, dass man die Lage des Dreiecks zur ersten Seite angibt mittels der Vorschrift: „**Ueber**“ eine gegebene Seite ein Dreieck aus gegebenen Stücken zu konstruieren.

Frage 114. Wie viele Stücke sind zur Konstruktion eines Dreiecks erforderlich?

Antwort. 1) Aus der Länge einer einzigen Seite kann man kein bestimmtes Dreieck konstruieren, da über die Wahl des dritten Eckpunktes keinerlei Angabe vorliegt.

2) Aus der Grösse eines einzigen Winkels kann man kein bestimmtes Dreieck konstruieren, da über die Wahl der Längen dieser Schenkel keinerlei Angabe vorliegt.

3) Aus der Länge zweier Seitenstrecken lässt sich kein bestimmtes Dreieck konstruieren, da über die Wahl des eingeschlossenen Winkels keinerlei Angabe vorliegt.

4) Aus der Grösse zweier Winkel lässt sich kein bestimmtes Dreieck konstruieren, da über die Wahl der gemeinschaftlichen Seite keinerlei Angabe vorliegt.

5) Aus einer Seite und einem Winkel lässt sich kein bestimmtes Dreieck konstruieren, da über die Wahl der zweiten anliegenden Seite

Erkl. 210. Da man zu einer gegebenen Seite als dritten Eckpunkt jeden beliebigen Punkt einer Ebene wählen kann — und da man zu einem gegebenen Winkel noch jeden Punkt auf jedem Schenkel als zweiten und dritten Eckpunkt wählen kann, so kann man sagen, es gäbe noch doppelt unendlich viele verschiedene Dreiecke, die sämtlich in einer Seite oder in einem Winkel übereinstimmen.

Erkl. 211. Da man zu zwei gegebenen Seiten als eingeschlossenen Winkel jeden beliebigen Winkel wählen kann, — oder da man zu zwei gegebenen Winkeln als gemeinschaftliche Seitenstrecke jede beliebige Länge wählen kann — oder da man zu einer Seite und einem Winkel als anliegende Seite jede beliebige Länge, oder als anliegenden Winkel jeden beliebigen Winkel wählen kann: so kann man sagen, es gäbe noch einfach unendlich viele verschiedene Dreiecke, die sämtlich übereinstimmen in zwei Seiten oder in zwei Winkeln oder in einer Seite und einem Winkel.

Erkl. 212 Ueber Beziehungen zwischen solchen Dreiecken, welche in zwei Elementen übereinstimmen, sehe man die Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

oder des zweiten anliegenden Winkels keinerlei Angabe vorliegt.

Also müssen zur Konstruktion eines Dreiecks mindestens drei Stücke gegeben sein.

Frage 115. Welche Zusammenstellungen zu je drei Stücken kann man bilden aus den drei Seiten und drei Winkeln des Dreiecks?

Erkl. 213. Die Gruppen der sechs Stücke $abc\alpha\beta\gamma$ wären folgende:

1) abc,

2) ab mit α oder mit β oder mit γ,
bc „ α „ „ β „ „ γ,
ca „ α „ „ β „ „ γ,

3) $\alpha\beta$ mit a oder mit b oder mit c,
$\beta\gamma$ „ a „ „ b „ „ c,
$\gamma\alpha$ „ a „ „ b „ „ c,

4) $\alpha\beta\gamma$.

Antwort. Die drei Seiten und Winkel eines Dreiecks kann man auf folgende Weise zu je dreien zusammenstellen:

1) drei Seiten,
2) zwei Seiten und ein Winkel,
3) eine Seite und zwei Winkel,
4) drei Winkel.

Frage 116. Wie viele verschiedene Aufgaben für die Konstruktion eines Dreiecks ergeben sich aus den vorigen vier Fällen?

Erkl. 214. Der vierte Fall der Antwort 115 fällt nach der nebenstehenden Ausführung zusammen mit dem vierten Fall der Antwort 114 und lässt noch einfach unendlich viele Dreiecke zu, die in allen drei Winkeln übereinstimmen.

Erkl. 215. Bildet man nach der Lehre der Kombinatorik (siehe die hierüber handelnden Lehrbücher in Kleyers Encyklopädie) die sämtlichen Kombinationen der sechs Elemente $abc\alpha\beta\gamma$ zu je dreien, so erhält man folgende 20 Gruppen:

1. abc	5. $ac\alpha$	8. $a\alpha\beta$	10. $a\beta\gamma$					
2. $ab\alpha$	6. $ac\beta$	9. $a\alpha\gamma$						
3. $ab\beta$	7. $ac\gamma$		11. $bc\alpha$	14. $b\alpha\beta$	16. $b\beta\gamma$			
4. $ab\gamma$			12. $bc\beta$	15. $b\alpha\gamma$				
			13. $bc\gamma$		17. $c\alpha\beta$	19. $c\beta\gamma$		
					18. $c\alpha\gamma$			
						20. $\alpha\beta\gamma$		

Antwort. Von den vorigen vier Fällen ist zunächst der vierte ausgeschlossen, da die drei Winkel eines Dreiecks gar nicht alle willkürlich gewählt werden können; denn wenn zwei bekannt sind, so muss wegen der Innenwinkelsumme von 2 R der dritte das Supplement zur Summe der beiden ersten sein. Es sind daher schon im dritten der aufgezählten Fälle nicht nur eine Seite und zwei Winkel, sondern eine Seite und alle drei Winkel gegeben; und dadurch fällt die Notwendigkeit fort, in diesem dritten Falle zu unterscheiden, ob die beiden ausser einer Seite noch gegebenen Winkel beide anliegende sind, oder ob nur der eine ein anliegender, der andere ein gegenüberliegender Winkel ist.

Nach Ausschluss der letzten Gruppe 20 verteilen sich die übrigen 19 folgendermassen unter die Fälle I bis IV:

I.	1. abc,		
II.	4. $ab\gamma$,	6. $ac\beta$,	11. $bc\alpha$,
III.	2. $ab\alpha$,	5. $ac\alpha$,	12. $bc\beta$,
	3. $ab\beta$,	7. $ac\gamma$,	13. $bc\gamma$,
IV.	8. $a\alpha\beta$,	14. $b\alpha\beta$,	17. $c\alpha\beta$,
	9. $a\alpha\gamma$,	15. $b\alpha\gamma$,	18. $c\alpha\gamma$,
	10. $a\beta\gamma$,	16. $b\beta\gamma$,	19. $c\beta\gamma$.

Dagegen ist im zweiten Falle eine genaue Unterscheidung notwendig, ob der ausser den zwei Seiten noch gegebene Winkel der von diesen Seiten eingeschlossene ist, oder ob er einer von beiden gegenüberliegt, wobei vorerst allerdings gleichgültig bleibt, welcher von beiden er gegenüberliegt.

Durch die Ausscheidung des letzten und Zweiteilung des zweiten Falles erhält man für die Konstruktion eines Dreiecks doch wieder vier verschiedene Fälle, nämlich mit den folgenden gegebenen Stücken:

I. Drei Seiten.

II. Zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel.

III. Zwei Seiten und der einer von beiden gegenüberliegende Winkel.

IV. Eine Seite und zwei (also alle drei) Winkel.

Frage 117. Wie wird die (I.) Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Seiten a, b, c ausgeführt?

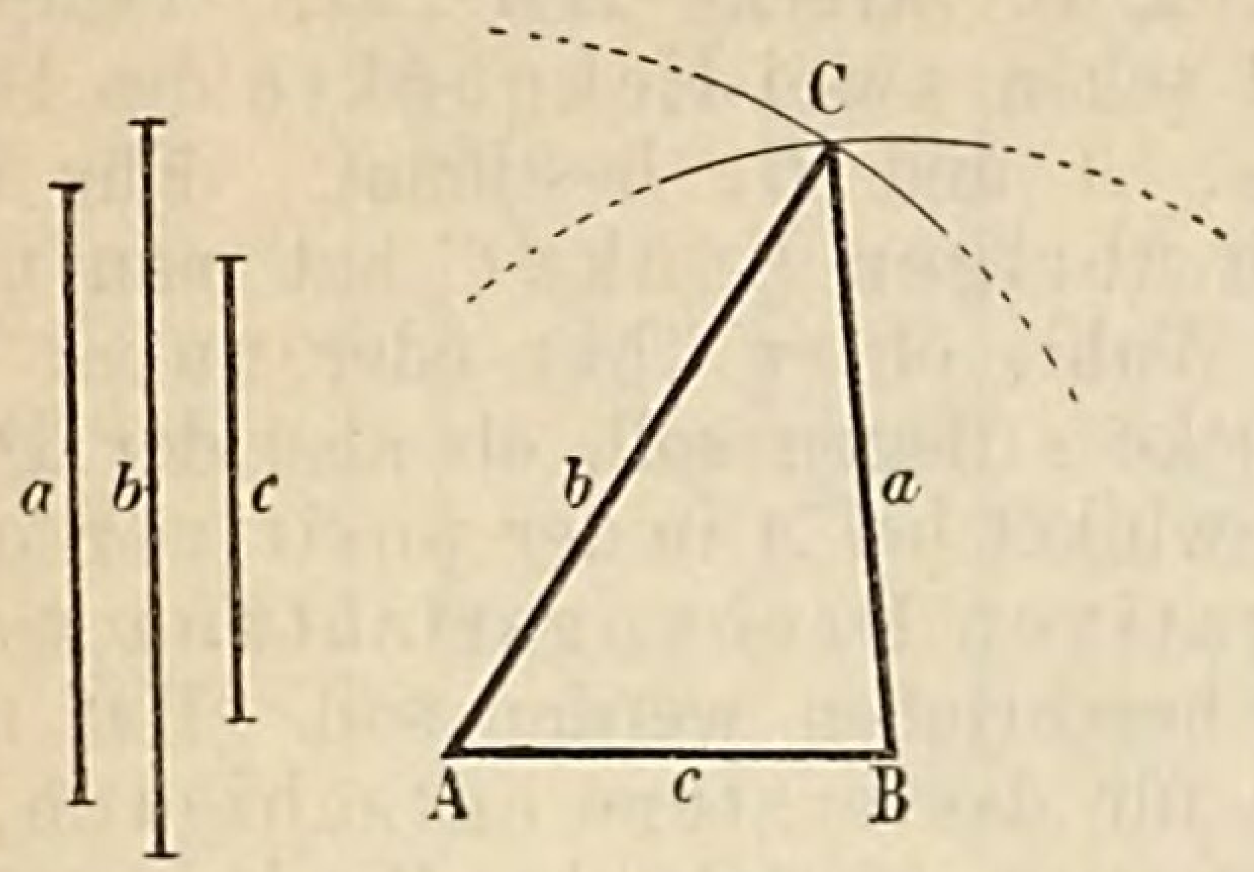
Erkl. 216. Ueber die planmässige Auflösung von allgemeinen Konstruktionsaufgaben sehe man die Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles. Der erste Teil einer solchen Auflösung, die Analysis, wird hier durch die vorhergegangenen Untersuchungen vertreten.

Erkl. 217. Wenn man die in Antwort der Frage 70 oder Erkl. 209 gegebenen Vereinbarungen über die gewöhnliche Lage der Elemente eines Dreiecks befolgt, so wäre die dritte Willkürlichkeit beseitigt und nur dasjenige Dreieck gefordert, dessen Punkt C über c liegt. Auch über die Wahl der Richtung der ersten Dreiecksseite wird durch die allgemein übliche Gewohnheit die Entscheidung getroffen, dass die Seite c als Grundseite eine horizontale Richtung erhält.

Erkl. 218. Nach Lehrsatz 49 besteht für die Möglichkeit der Konstruktion des Dreiecks aus drei gegebenen Strecken die Bedingung, dass jede der drei Strecken grösser sein muss, als die Differenz und kleiner als die Summe der beiden andern.

Antwort. Um ein Dreieck aus seinen drei Seiten zu konstruieren, wählt man nach Antwort der Frage 113 zunächst beliebig einen Eckpunkt, z. B. A. Sodann legt man durch diesen Eckpunkt in beliebiger Richtung, z. B. in der Richtung AB einen Strahl und begrenzt auf diesem eine Strecke, welche die Länge der einen vorgeschriebenen Seite hat, z. B. Strecke $AB = c$. Dadurch sind schon zwei Eckpunkte des Dreiecks, A und B, bestimmt. Für den noch übrigen Punkt C hat man noch die Wahl, ob er über oder unter der Strecke c liegen soll, also ob der Dreieckswinkel beim Punkt A in der positiven oder negativen Drehungsrichtung von c aus beschrieben werden soll. Hat man sich für das erstere entschieden, so handelt es sich noch darum, einen Punkt C über der Linie c zu finden, welcher von A die Entfernung b und von B die Entfernung a

Figur 88.



Erkl. 219. Dass das gefundene Dreieck in der That die Strecken a, b, c als Seiten hat, geht daraus hervor, dass AB abgetragen wurde gleich c, dass die Strecken AC und BC als Radien der Kreise die Länge b bezw. a haben müssen.

Erkl. 220. Wenn man von einer Geraden zwei Punkte kennt, durch welche sie geht, so muss die Gerade mit der Verbindungslinie dieser Punkte zusammenfallen.

Erkl. 221. Der unterhalb c liegende Punkt, welcher, wie C, von A den Abstand b und von B den Abstand a hat, ist nicht zu berücksichtigen, da nur ein Dreieck über c gesucht wird.

habe. Nach Lehrsatz 26 des ersten Teils dieses Lehrbuches haben nun alle Punkte des Kreises um A mit Radius b den Abstand b von A und ebenso alle Punkte des Kreises um B mit Radius a den Abstand a von B. Da der Schnittpunkt beider Kreise sowohl auf dem ersten als auch auf dem zweiten Kreise liegt, so hat er die Eigenschaft, welche für C erforderlich ist. Also entsteht der dritte Eckpunkt C des verlangten Dreiecks als Schnittpunkt der beiden Kreisbögen.

Es bleibt daher nur noch die Frage zu erledigen, ob vielleicht noch weitere Punkte C über der Linie c existieren könnten, die ebenfalls von A den Abstand b und von B den Abstand a hätten. Gibt es aber überhaupt einen weiteren Punkt D, für welchen ebenfalls $DA = b$ und $DB = a$ wäre, so müsste nach Satz 14 und Erkl. 44b wegen der Gleichheit $DA = CA = b$ der Punkt A, und ebenso wegen der Gleichheit $DB = CB = a$ auch der Punkt B auf der Mittelsenkrechten der Punkte D und C liegen. Es müsste also die Verbindungslinie von A und B selber Mittelsenkrechte von C und D sein, folglich kann von diesen beiden Punkten nur der einzige, nämlich C, über c liegen, der andere muss unterhalb liegen, weil ja die Linie c als Mittelsenkrechte zwischen beiden Punkten hindurchgeht. Man erhält also nur ein einziges Dreieck aus den Stücken a, b, c.

Frage 118. Wie wird die (II.) Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel ausgeführt?

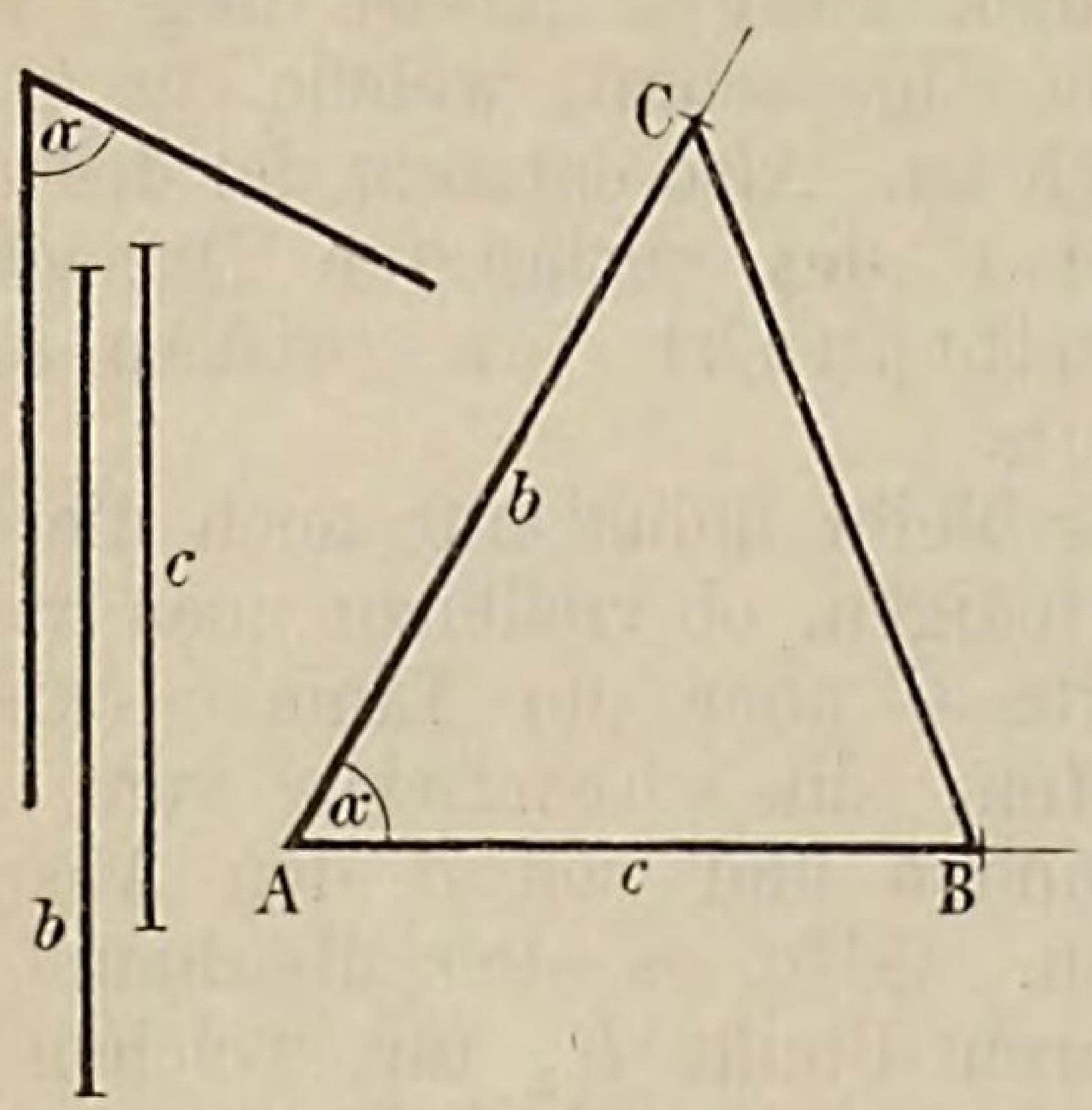
Erkl. 222. Würden die gegebenen Stücke statt b, c, α die Stücke a, c, β sein, so wäre als erste freie Wahl Punkt B, als zweite die Richtung c zu nehmen, welche zur Erzielung der üblichen Dreieckslage wagrecht von rechts nach links zu wählen wäre. Punkt C würde wieder oberhalb c zu legen sein.

Sind die gegebenen Stücke endlich a, b, γ, so würde man zuerst C wählen, von da aus

Antwort. Um ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, z. B. aus den Stücken b, c, α zu konstruieren, wählt man nach Antwort der Frage 113 zunächst beliebig einen Punkt als Scheitel des Winkels α, z. B. A. Sodann legt man durch diesen Eckpunkt in beliebiger Richtung, z. B. in der Richtung AB

entweder in der Richtung nach rechts unten die Richtung a oder in der Richtung nach links unten die Richtung b wählen, und den dritten Punkt so legen, dass er erreicht würde durch Drehung um den Betrag γ: durch a in negativem, durch b in positivem Drehungssinne.

Figur 89.



einen Strahl und trägt auf diesem eine Strecke ab, welche die Länge der einen vorgeschriebenen Seite hat, z. B. Strecke $AB = c$. Dadurch sind schon zwei Eckpunkte des Dreiecks, A und B, bestimmt. Für den noch übrigen Punkt C hat man noch die Wahl, ob er über oder unter der Strecke c liegen soll, ob also der Dreieckswinkel bei A in der positiven oder negativen Drehungsrichtung von C aus beschrieben werden soll. Hat man sich für das erstere entschieden, so trägt man (mittels des Winkelmessers, oder sonstwie) im positiven Drehungssinne den bekannten Winkel α an die Gerade c im Punkte A an, und erhält so die Richtung der Linie b. Auf diesem Schenkel trägt man alsdann die gegebene Strecke $b = AC$ ab, und findet so den dritten Eckpunkt C, der mit B zu verbinden ist.

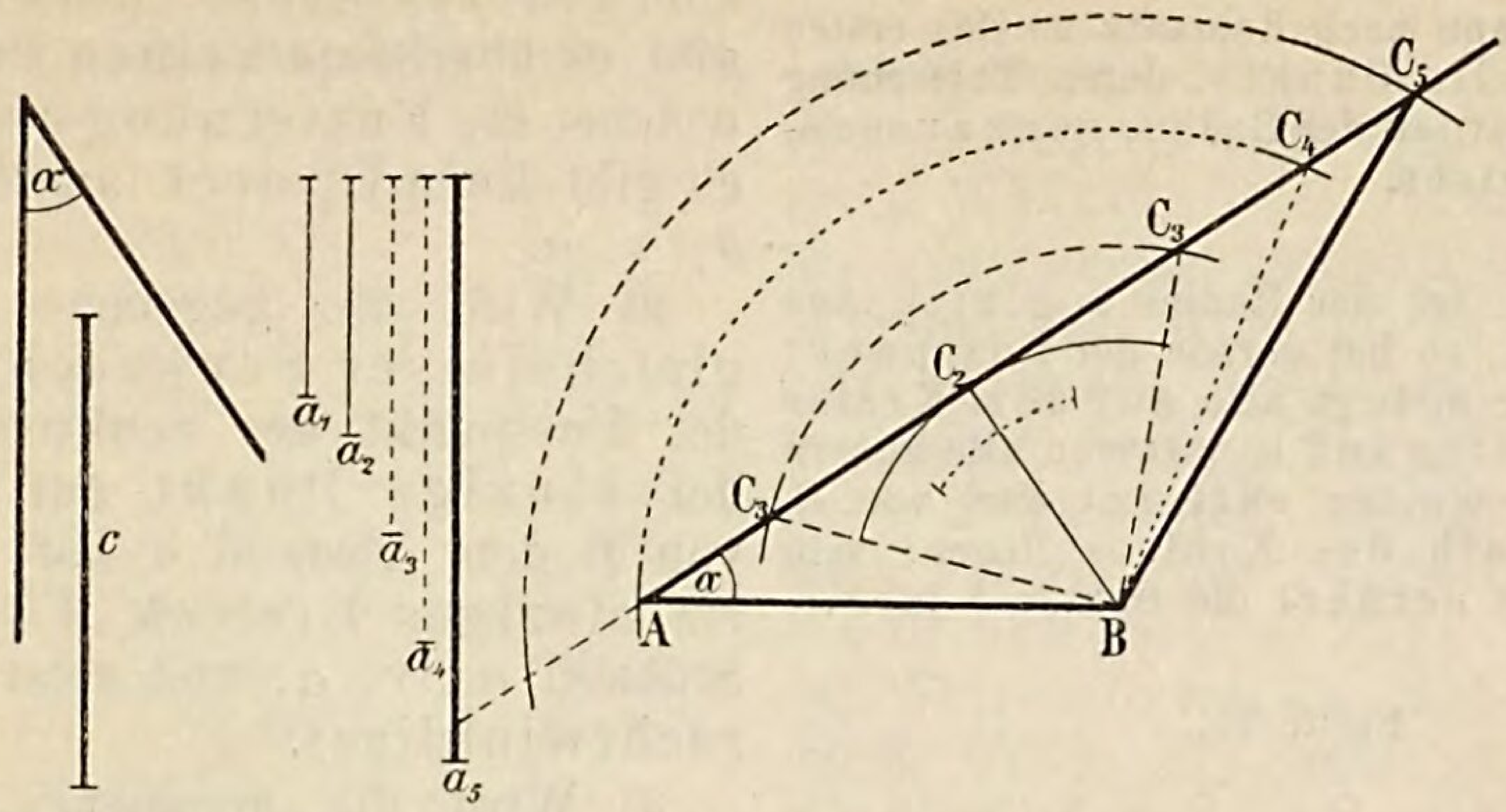
Da es nur einen einzigen Winkel von der Grösse α und auf dessen Schenkel nur einen einzigen Punkt im Abstande b von A gibt, so ist bei diesem Falle kein Zweifel möglich, dass nur ein einziges Dreieck erhalten werden kann aus den Stücken b, c, α.

Frage 119. Wie wird die (III.) Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel ausgeführt?

Erkl. 223. Wären die gegebenen Stücke statt a, c, α etwa a, b, α, oder a, b, β, oder sonstige, der dritten Gruppe zugehörige, so würde in jedem Falle als erster Punkt wieder der Scheitelpunkt des gegebenen Winkels gewählt und von ihm aus derjenige Schenkel, dessen Länge gegeben ist, in solcher Lage gezeichnet werden, dass die übliche Lage des Dreiecks erzielt würde. Sodann wäre an diesem Schenkel im ursprünglichen Punkte der gegebene Winkel wieder in demjenigen Drehungssinne anzutragen, in welchem er vom gegebenen Schenkel in der gewöhnlichen Figur des Dreiecks beschrieben wird, und um den Endpunkt des ersten Schenkels ein Kreisbogen zu beschreiben mit der Länge der zweiten gegebenen Seite als Radius.

Antwort. Um ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen, z. B. aus den Stücken a, c, α zu konstruieren, wählt man nach Antwort der Frage 113 zunächst beliebig einen Punkt als Scheitel des Winkels α, z. B. A. Sodann legt man durch diesen Eckpunkt in beliebiger Richtung, z. B. in der Richtung AB einen Strahl und trägt auf diesem eine Strecke ab, welche die Länge der einen vorgeschriebenen Seite hat, z. B. die Strecke $AB = c$. Dadurch sind schon zwei Eckpunkte des Dreiecks, A und B, bestimmt. Für den noch übrigen Punkt C hat man noch die Wahl, ob er über oder unter der Strecke c liegen soll, ob also der Dreieckswinkel bei A in positiver oder negativer Drehungsrichtung von c aus

Figur 90.



Erkl. 224. Ist der gegebene Winkel α ein rechter oder ein stumpfer, so fallen von den im nebenstehenden besprochenen fünf verschiedenen Unterscheidungsfällen die ersten drei bezw. vier ohne weiteres fort, weil der Fusspunkt der Senkrechten dann auf c oder ganz unterhalb c liegt, also nur solche Punkte C in Betracht kommen, deren Abstand vom Fusspunkt grösser ist als AF, für welche also $a > c$ ist.

Sind daher von einem stumpfwinkligen Dreieck gegeben der stumpfe Winkel und irgend zwei Seiten (anliegende oder gegenüberliegende), so ist das Dreieck stets eindeutig bestimmt.

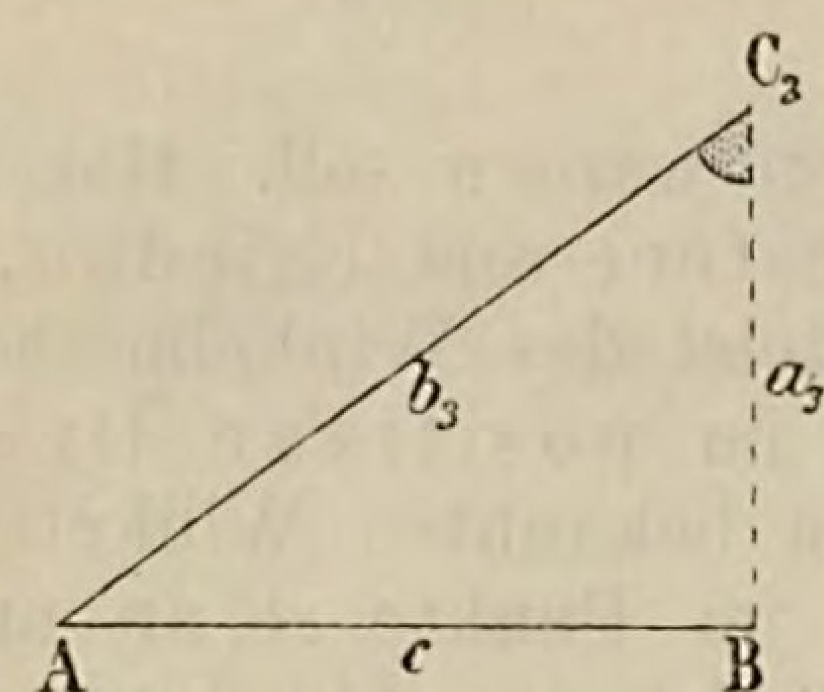
beschrieben werden soll. Hat man sich für das erstere entschieden, so trägt man (mittelst des Winkelmessers, oder sonstwie) im positiven Drehungssinne den bekannten Winkel α an die Gerade c im Punkte A an und erhält so die Richtung der Linie b. Nun handelt es sich noch darum, auf dieser Linie b über c einen Punkt C zu finden, welcher von B die Entfernung a hat. Nach Lehrsatz 26 des ersten Teils dieses Lehrbuches haben nun sämtliche Punkte des Kreises um B mit Radius a den Abstand a von B. Ein Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden b hat demnach die für Punkt C erforderliche Eigenschaft. Also entsteht der dritte Eckpunkt C des verlangten Dreiecks als Schnittpunkt der Linie b und dieses Kreises um B mit Radius a.

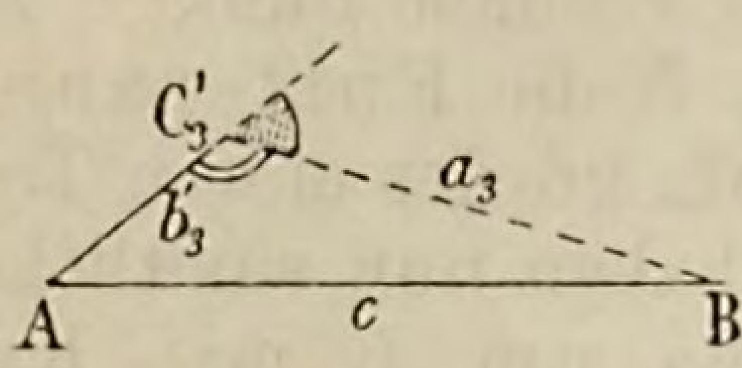
Es bleibt daher noch die Frage zu erledigen, ob vielleicht mehrere Punkte auf b über c existieren können, die sämtlich von B den Abstand a haben. Nach Satz 53 müssten je zwei solcher Punkte auch vom Fusspunkte der von B auf b zu errichtenden Senkrechten gleichen Abstand nach beiden Seiten dieses Fusspunktes besitzen, und je länger die Strecke a ist, desto weiter rücken die beiden von dem Fusspunkte fort, und rücken ihm desto näher, je kürzer der Abstand von B wird. Der Fusspunkt selber aber ist derjenige Punkt auf b, welcher am nächsten beim Punkt B liegt.

Erkl. 225. Ist der Radius a kürzer als die Senkrechte, so trifft der Kreis die Linie b gar nicht, denn nach Lehrsatz 29 des ersten Teiles liegen alle Punkte, deren Entfernung von B grösser ist, als der Radius, ganz ausserhalb des Kreises.

Erkl. 226. Ist der Radius a gleich der Senkrechten, so hat gerade der Fusspunkt die Entfernung a, liegt also auf dem Kreise und gleichzeitig auf b, während alle andern Punkte auf b weiter entfernt sind von B, also ausserhalb des Kreises liegen; man sagt, der Kreis berührt die Gerade b in F.

Figur 91.





Erkl. 227. Ist der Radius a grösser als BF aber kleiner als BA, so schneidet der Kreis die Linie b zweimal, nämlich einmal ausserhalb AF und einmal innerhalb AF.

Die beiden entstehenden Dreiecke haben beide die Stücke $AB = c$, $BC = a$, $\sphericalangle CAB = \alpha$. Dagegen ist der $\sphericalangle \gamma$ im einen Dreieck stumpf, im anderen Dreieck spitz. Wegen des gleichschenkligen Dreiecks $BC_3C'_3$ ist $\sphericalangle BC_3C'_3 = \sphericalangle BC'_3C_3$, also $\sphericalangle AC'_3B = 180 - \sphericalangle AC_3B$, d. h die Winkel γ der beiden Dreiecke sind supplementär. Sind dies aber die Winkel γ, so müssen auch die Winkel β entsprechend verschieden sein, damit die Winkelsumme 180 werden kann. Die Masse beider Dreiecke sind also:

1) $AB = c$, $BC = a$, $AC_3 = b_3 = AF + FC_3$;
$\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle AC_3B = \gamma_3 = 180 - \gamma'_3$
$\sphericalangle ABC_3 = \beta_3$

2) $AB = c$, $BC = a$, $AC'_3 = b'_3 = AF - FC'_3$;
$\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle AC'_3B = \gamma'_3 = 180 - \gamma_3$
$\sphericalangle ABC'_3 = \beta_3'$.

Erkl. 228. Ist Radius $a_4 = c$, so schneidet der Kreis die Linie b in A selbst und in C; ist $a > c$, so schneidet der Kreis die Strecke b nur einmal, das anderemal bloss ihre Verlängerung über A hinaus unterhalb c.

Wird daher 1) die gegebene Strecke a_1 kürzer als diese Senkrechte, so gibt es überhaupt keinen Punkt auf b, welcher die Entfernung a von B hat — es gibt kein Dreieck aus den Stücken a_1, c, α.

2) Wird die gegebene Strecke a_2 gleich dieser Senkrechten, so ist der Fusspunkt der Senkrechten selber der einzige Punkt auf b, welcher von B den Abstand a hat, — es gibt ein einziges Dreieck ABC_2 aus den Stücken a_2, c, α, und zwar ein bei C_2 rechtwinkliges.

3) Wird die gegebene Strecke a_3 grösser als die Senkrechte, so gibt es auf b jederseits des Fusspunktes einen Punkt mit Abstand a von B. Der eine liegt auswärts in der Richtung AF, der andere einwärts zwischen F und A, solange sein Abstand von F nicht selbst gleich FA wird; denn dann fiele C in A selbst und a würde so gross wie c, während vorher stets a kleiner als c, und der Winkel α kleiner ist als der c gegenüber entstehende Winkel γ. — Solange also a_3 kleiner als c ist, gibt es zweierlei Dreiecke ABC_3 und ABC'_3 mit den verlangten Stücken a_3, c, α.

4) Wird $a_4 = c$, so hat der Punkt A selbst den Abstand a von B, also ist A selbst der eine der beiden Punkte auf b, mit Abstand a von B, und es bleibt nur der andere Punkt als einziger übrig. — Ist also $a_4 = c$, so erhält man ein einziges Dreieck ABC_4 aus a, c, α, nämlich ein stumpfwinkliges gleichschenkliges mit Spitze B.

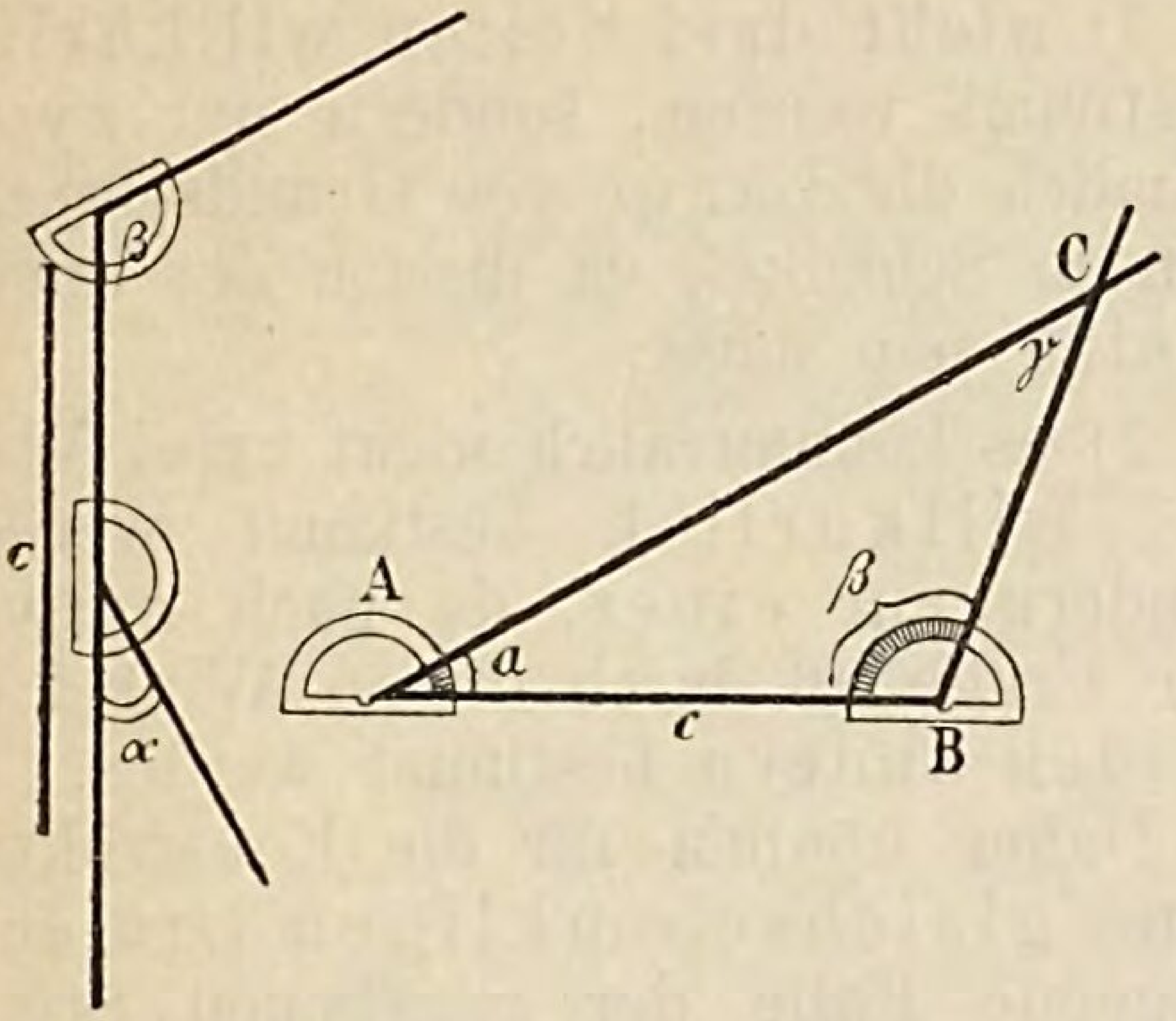
5) Wird aber $a_5 > c$, so fällt der eine Punkt auf b nach Satz 53 weiter weg von F als A selbst, er fiele also unterhalb der Linie c und ist auszuschliessen, schon weil $\sphericalangle \alpha$ gar nicht mehr ins Innere des Dreiecks fiele. Auch hier bleibt also nur noch der andere, auswärts von F liegende Schnittpunkt übrig, für welchen γ kleiner wird als α. — Für den Fall $a_5 > c$ erhält man also auch $\alpha > \gamma$ und nur ein einziges Dreieck ABC_5 aus den Stücken a_5, c, α.

Frage 120. Wie wird die (IV.) Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln ausgeführt?

Antwort. Um ein Dreieck aus einer Seite, z. B. der Seite c und zwei Winkeln zu konstruieren, zeichnet man zunächst zu den zwei gegebenen Winkeln den dritten hinzu, so dass man jedenfalls die beiden an der gegebenen Seite c anliegenden Winkel α und β kennt. Alsdann wählt man nach Antwort der Frage 113 zunächst einen beliebigen Punkt als Scheitel des Winkels α, z. B. A. Sodann legt man durch diesen Eckpunkt in beliebiger Richtung, z. B. AB, einen Strahl und trägt auf diesem eine Strecke ab, welche die Länge der gegebenen Seite hat, also $AB = c$. Dadurch sind schon zwei Eckpunkte des Dreiecks, A und B bestimmt. Für den noch übrigen Punkt C hat man noch die Wahl, ob er über oder unter der Strecke c liegen soll, ob also der Dreieckswinkel bei A (bezw. B) in positiver oder negativer (für B umgekehrt) Richtung von c beschrieben werden soll. Hat man sich für das erstere entschieden, so trägt man (mittelst des Winkelmessers, oder sonstwie) im positiven Drehungssinne den bekannten Winkel α an die Gerade c im Punkte A an, und im negativen Drehungssinne den bekannten Winkel β an dieselbe Gerade c im Punkte B. Dadurch erhält man die Richtung der Linien b und a und findet so den dritten Eckpunkt C als Schnittpunkt der beiden Geraden.

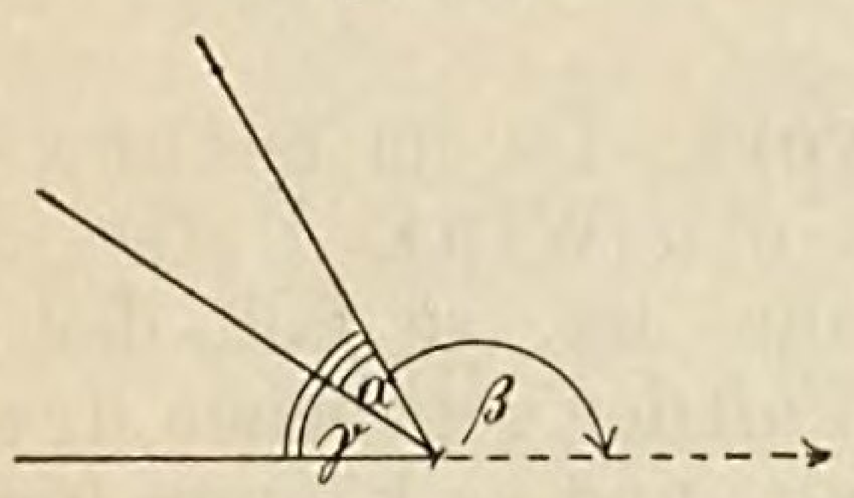
Da es nur je einen einzigen Winkel von der Grösse α bezw. β und für die zwei geraden Linien ihrer Schenkel nur einen einzigen Schnittpunkt gibt, so kann in diesem Falle stets nur ein einziges Dreieck erhalten werden aus den Stücken c, α, β.

Figur 92.



Erkl. 229. Die Konstruktion des dritten Winkels wird am bequemsten, wenn die beiden ersten Winkel so gegeben werden, dass ihr Scheitel und der eine Schenkel gemeinschaftlich sind. Denn dann braucht nur der eine der nicht gemeinschaftlichen Schenkel verlängert zu werden, um sofort die Grösse des dritten Winkels als Supplement zur Summe der beiden andern zu erhalten (vergl. Figur 93 und Aufgabe 97 der Aufgabensammlung am Schlusse des zweiten Teiles).

Figur 93.



Erkl. 230. Sind die gegebenen Stücke nicht c und zwei Winkel, sondern a oder b mit jeweils zwei Winkeln, so wird in der gleichen Weise erst der dritte Winkel konstruiert und alsdann erst der eine Eckpunkt der gegebenen Seite beliebig gewählt, sodann die Richtung dieser Seite in einer Lage (für a von links oben nach rechts unten, für b von rechts oben nach links unten) gewählt, welche die gewöhnliche Dreiecksfigur liefert, und daran wieder die beiden anliegenden Winkel so angetragen, dass ihre Drehungsrichtung mit derjenigen der üblichen Figur übereinstimmt.

Erkl. 231. Sind die beiden gegebenen Winkel schon die beiden anliegenden, so ist die Konstruktion des dritten Winkels nicht unbedingt erforderlich.

Frage 121. Wie gestalten sich die vorigen drei Hauptfälle der Dreieckskonstruktion für das gleichschenklige Dreieck?

Erkl. 232. Ist Grundseite und Schenkel gegeben, so hat man von den allgemeinen Fällen den vierten; ist ein Schenkel und der Winkel an der Spitze gegeben, so hat man entweder den zweiten Fall, weil der andere den Schenkelwinkel einschliessende Schenkel dem ersten gleich ist, oder nach Konstruktion der andern Winkel den vierten; ist ein Schenkel und ein Winkel an der Grundseite gegeben, so hat man entweder den vierten Fall, weil der andere anliegende Winkel dem ersten gleich ist, oder auch nach Konstruktion der andern Winkel wieder den vierten Fall; ist die Grundseite und ein Winkel gegeben, so hat man wie oben auch stets den vierten der allgemeinen Fälle.

Erkl. 233. Zu beachten bleibt nach Antwort der Frage 95 stets für die Bestimmung des gleichschenkligen Dreiecks, dass der Schenkel grösser sein muss, als die Hälfte der Grundseite und dass der Basiswinkel stets spitz sein muss.

Erkl. 234. Da der dritte der allgemeinen Fälle, in welchem nur ein Gegenwinkel einer Seite bekannt ist, ganz fortfällt, so kann auch jene Zweideutigkeit nicht eintreffen.

Antwort. Da im gleichschenkligen Dreieck zwei Seiten gleich und zwei Winkel gleich sind, so können im gleichschenkligen Dreieck:

1) nicht drei Seiten willkürlich bestimmt werden, sondern nur zwei, nämlich die Länge von Grundseite und einem Schenkel, da diesem der andere gleich sein muss;

2) es können auch nicht zwei Winkel willkürlich bestimmt werden, sondern nur einer, da nach Antwort der Frage 96 durch einen Winkel die beiden andern bestimmt werden.

Daher können für die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks folgende Fälle der gegebenen Stücke in Betracht kommen:

1) die Grundseite und ein Schenkel;

2) ein Schenkel und ein Winkel;

3) die Grundseite und ein Winkel;

und man erhält stets nur ein einziges Dreieck.

Frage 122. Wie gestalten sich die drei Hauptfälle des allgemeinen Dreiecks für das rechtwinklige Dreieck?

Erkl. 235. Die beiden Katheten liefern den zweiten der allgemeinen Fälle; Hypotenuse und spitzer Winkel oder Kathete und spitzer Winkel liefern den vierten; und Hypotenuse mit Kathete liefert den dritten Fall zweier Seiten und eines Gegenwinkels. Da aber der Hypotenuse der rechte Winkel gegenüberliegt, so tritt nach Erkl. 224 eine Zweideutigkeit auch hier gar nicht auf.

Antwort. Da im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel stets als rechter bekannt ist, so fällt der erste allgemeine Fall der gegebenen drei Seiten ganz weg, und es können für die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks folgende Fälle der gegebenen Stücke in Betracht kommen:

1) die beiden Katheten als einschliessende Seiten des rechten Winkels,

2) die Hypotenuse und eine Kathete,

3) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel,

4) die eine Kathete und ein spitzer Winkel;

und man erhält stets nur ein einziges Dreieck.

Frage 123. Wie viele Bestimmungsstücke können für das gleichseitige oder für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck willkürlich gewählt werden?

Antwort. Da im gleichseitigen Dreieck die Grösse aller drei Winkel gleich 60^0 bekannt ist, und da im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck die Grösse der Winkel 90^0 und zweimal 45^0 bekannt ist, so kann bei diesen beiden Dreiecken nur eine einzige Seite als Bestimmungsstück auftreten, nämlich beim gleichseitigen seine gemeinschaftliche Seitenlänge, beim gleichschenklig-rechtwinkligen entweder Schenkel, oder Grundseite, bzw. Hypotenuse — und man erhält stets nur ein einziges Dreieck.

Erkl. 236. Die Konstruktion der nebenstehenden Fälle vollzieht sich stets nach dem vierten der allgemeinen Fälle, da man die sämtlichen an einer Seite anliegenden Winkel von vorn herein kennt.

Frage 124. Welche Aussagen kann man machen über die Aufgabe der Konstruktion eines Dreiecks, von welchem vier Stücke willkürlich vorgeschrieben sind?

Antwort. Wenn von einem Dreieck vier Stücke willkürlich gegeben sind, so sind darunter wohl jedenfalls drei Stücke von der Art enthalten, dass aus ihnen ein einziges Dreieck eindeutig erhalten werden kann nach einem der vier Hauptfälle der Fragen 117 bis 120. Es handelt sich also noch darum, ob in diesem so erhaltenen einzigen Dreieck die Masszahl des vierten Stückes die gleiche geworden ist, wie die vorgeschriebene, oder nicht. Tritt das letztere ein, so ist nachgewiesen, dass kein Dreieck existiert, welches alle vier gegebenen Stücke in der vorgeschriebenen Grösse enthält: denn in das einzig mögliche Dreieck, welches die drei ersten Stücke enthalten konnte, passte das vierte nicht. Tritt aber der seltene Fall ein, dass das vierte Stück gerade die Grösse hat, welche es in dem aus den drei ersten Stücken konstruierten Dreieck auch schon erhält, so war seine Wahl entweder schon keine willkürliche, oder sie war zufällig so erraten, dass auch ohne dieses vierte Stück das gleiche Dreieck entstanden wäre.

Solche Aufgaben, bei welchen mehr Bestimmungsstücke vorgeschrie-

Erkl. 237. Ueberbestimmt wäre also nach nebenstehender Antwort die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren, von welchem willkürlich gegeben wären drei Seiten und ein Winkel, oder zwei Seiten und zwei Winkel, — oder ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben wären die Grundseite, ein Schenkel und ein Winkel, — oder ein rechtwinkliges Dreieck aus zwei Seiten und einem der spitzen Winkel, ein rechtwinklig-gleichschenkliges aus Hypotenuse und Schenkel, u. s. w.

Erkl. 238. Unmöglich können auch Aufgaben werden, bei welchen nur drei Stücke gegeben sind, wenn nämlich gegen die Gesetze über Winkelsumme oder Seitenlängen verstossen wird. So ist es unmöglich, ein Dreieck zu konstruieren mit den Winkeln 30^0, 40^0, 50^0 oder mit den Seiten 3, 4, 9. Denn im ersten Falle ist die Winkelsumme nicht 180^0, im letzten ist die Summe der zwei Seiten $3+4$ kleiner als 9 und die Differenz der Seiten $9-3>4$ und $9-4>3$.

Erkl. 239. Aufgaben, in welchen verschiedene Lösungen der Frage möglich sind, die aber alle den sämtlichen Vorschriften genügen, heissen unbestimmt, z. B. Dreiecke mit den Winkeln 30^0, 50^0, 100^0. — Siehe hierüber auch den Abschnitt über „geometrische Oerter" im nächsten Teile dieses Lehrbuchs.

ben sind, als zur eindeutigen Herstellung der Aufgabe notwendig sind, heissen überbestimmt und sind nach dem Vorhergehenden in der Regel unmöglich.

e) Ueber die Kongruenz der Dreiecke.

Frage 125. Welche Folgerungen ergeben sich aus denjenigen Dreieckskonstruktionen, welche eindeutige Lösungen lieferten, für die Uebereinstimmung (Kongruenz) mehrfacher Ausführungen derselben Konstruktion?

Erkl. 240. Zu den Fällen, in welchen eindeutige Lösungen erhalten werden, gehörten oben ohne Einschränkung: I. die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Seiten, II. die Konstruktion des Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel und IV. die Konstruktion des Dreiecks aus einer Seite und zwei anliegenden Winkeln.

Im Falle III jedoch, wo zwei Seiten und ein Gegenwinkel gegeben war, fanden sich zweierlei Lösungen, wenn die Seite, deren Gegenwinkel gegeben war, die kleinere war, dagegen nur eine einzige Lösung, wenn diejenige Seite, deren Gegenwinkel gegeben war, die grössere war, oder mit andern Worten, wenn der gegebene Winkel nicht Gegenwinkel der kleineren, sondern Gegenwinkel der grösseren der beiden gegebenen Seiten war.

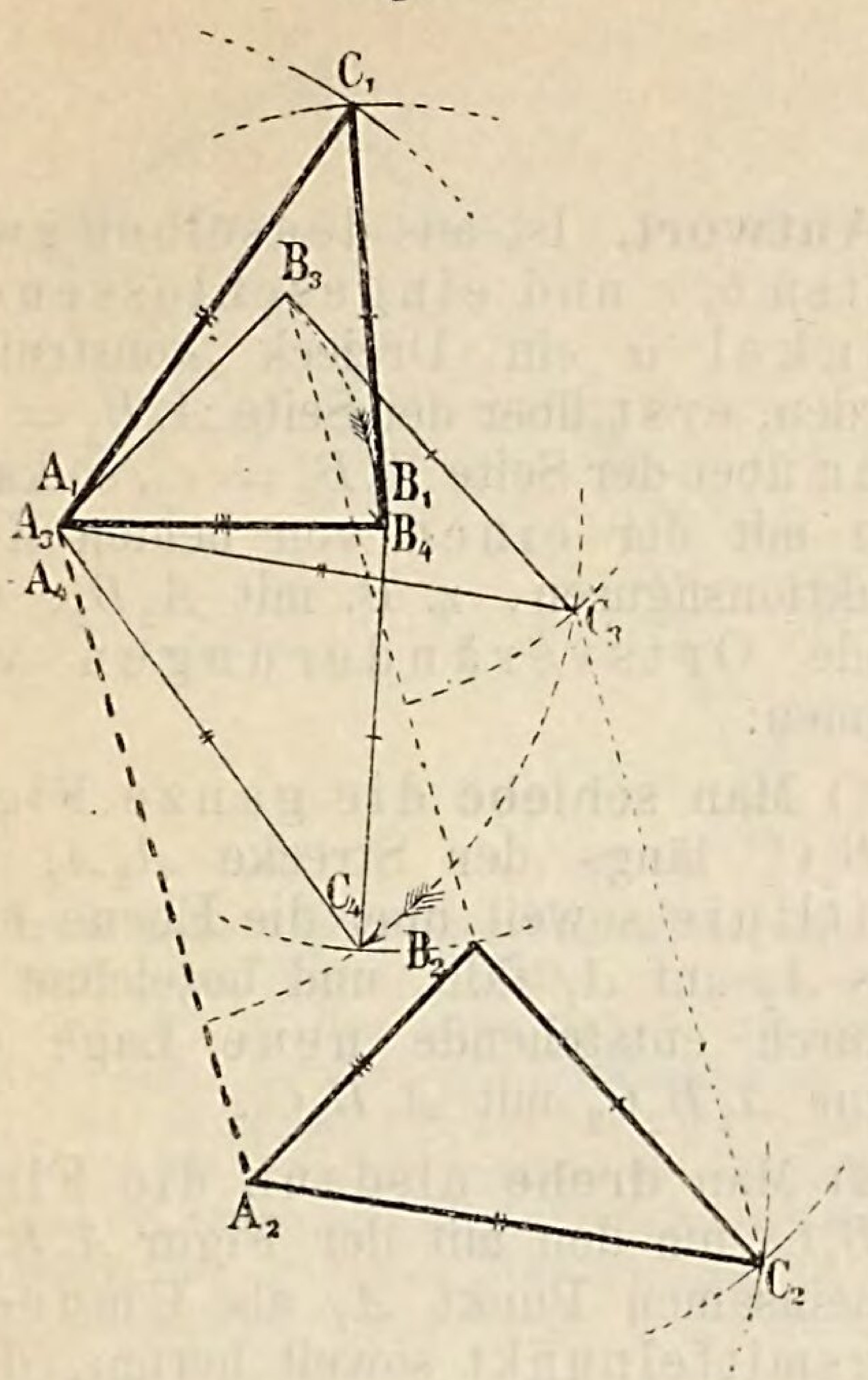
Antwort. Wenn eine Dreieckskonstruktion nur eine einzige Lösung liefert, so folgt daraus, dass wenn diese Konstruktion des Dreiecks aus den gegebenen Stücken über der willkürlich gewählten ersten Seite am gleichen Platze mehrfach wiederholt wird, — dann jedesmal das gleiche Dreieck entstehen muss. Denn es müssen die Schenkel gleicher Winkel stets aufeinander fallen, es müssen die Endpunkte gleicher Strecken stets aufeinander fallen, es müssen die Kreise mit gleichen Mittelpunkten und gleichen Radien aufeinander fallen. Solche Dreiecke, welche über derselben Anfangsseite mit denselben drei Stücken konstruiert sind, stimmen also nicht nur in diesen vorgeschriebenen drei Stücken überein, sondern auch in denjenigen drei Stücken, deren Grösse nicht zuvor gegeben war, — solche Dreiecke sind kongruent.

Frage 126. Welches Ergebnis liefert der Vergleich der Konstruktionen eines Dreiecks aus denselben drei gegebenen Seiten (I) an verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene?

Antwort. Ist aus denselben drei Seiten a, b, c ein Dreieck konstruiert worden erst über $A_1B_1 = c_1$, dann über der Seite $A_2B_2 = c_2$, so kann man mit der einen der beiden Konstruktionsfiguren, z. B. mit $A_2B_2C_2$, folgende Ortsveränderungen vornehmen:

1) Man **schiebe** die ganze Figur $A_2B_2C_2$ samt ihren Punkten, Geraden, Strecken, Winkeln, Kreisbogen u. s. w. längs der Strecke A_2A_1

Figur 94.



Erkl. 241. Jeder der Willkürlichkeiten bei der Konstruktion des Dreiecks entspricht eine Ortsveränderung behufs der Deckung beider Figuren. Es erschien als erste Willkürlichkeit die Wahl des ersten Eckpunktes — und dementsprechend als erste Ortsveränderung die Verschiebung dieser Eckpunkte zur Deckung. Zweite Willkürlichkeit war die Wahl der Richtung der ersten Seite — und dementsprechend zweite Ortsveränderung die Drehung beider Richtungen zur Deckung. Dritte Willkürlichkeit war die Wahl der Lage des dritten Punktes über oder unter der ersten Seite — und dementsprechend dritte Ortsveränderung die Umklappung dieses dritten Punktes nach der gleichen Seite.

Erkl. 242. Waren die beiden Konstruktionen schon so gemacht, dass entweder die dritten Punkte beide über oder unter der ersten Seite lagen — oder dass die erste Seite die gleiche Richtung hatte — oder dass der erste Punkt derselbe war — so fällt für die Herbeiführung der Deckung je eine der Ortsveränderungen fort, nämlich für die erste Annahme die Umklappung, für die zweite die Drehung, für die dritte die Verschiebung.

als Leitlinie über die Papierebene weg, so dass Punkt A_2 auf Punkt A_1 fällt und bezeichne die dadurch erhaltene neue Lage der Figur $A_2B_2C_2$ mit $A_3B_3C_3$.

2) Man **drehe** die Figur $A_3B_3C_3$ um ihren mit $A_1B_1C_1$ gemeinschaftlichen Punkt A als Umdrehungsmittelpunkt so weit herum, dass die Richtung der Linie c_3 auf c_1 fällt, und bezeichne die neue Lage der Figur $A_3B_3C_3$ mit $A_4B_4C_4$. Dann muss auch die Strecke A_3B_3 der Grösse nach auf die Strecke A_1B_1 fallen, da ja diese beiden Strecken die Länge c haben. Folglich fällt auch Punkt B_4 auf B_1.

3) Wenn nunmehr Punkt C_4 noch nicht auf derselben Seite der Strecke A_1B_1 liegt wie Punkt C_1, so **klappe** man die Figur $A_4B_4C_4$ um die Strecke A_1B_1 als Symmetrieachse herum, so dass Punkt C_4 ebenfalls auf dieselbe Seite von c zu liegen kommt, wie c_1.

Bei dieser Lage müssen aufeinanderfallen die Punkte A, die Strecken AB, die Punkte B — also auch die mit gleichen Radien b und a um die Punkte A und B beschriebenen Kreisbogen und folglich auch deren Schnittpunkt C_4 und C_1, sowie die Strecken AC, BC und die Winkel α, β, γ. Es haben also die beiden an verschiedenen Stellen der Zeichenebene aus denselben drei Seiten a, b, c hergestellten Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ die Eigenschaft, dass durch Umklappung, Drehung und Verschiebung das eine mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann: und man kann folgende Aussage machen:

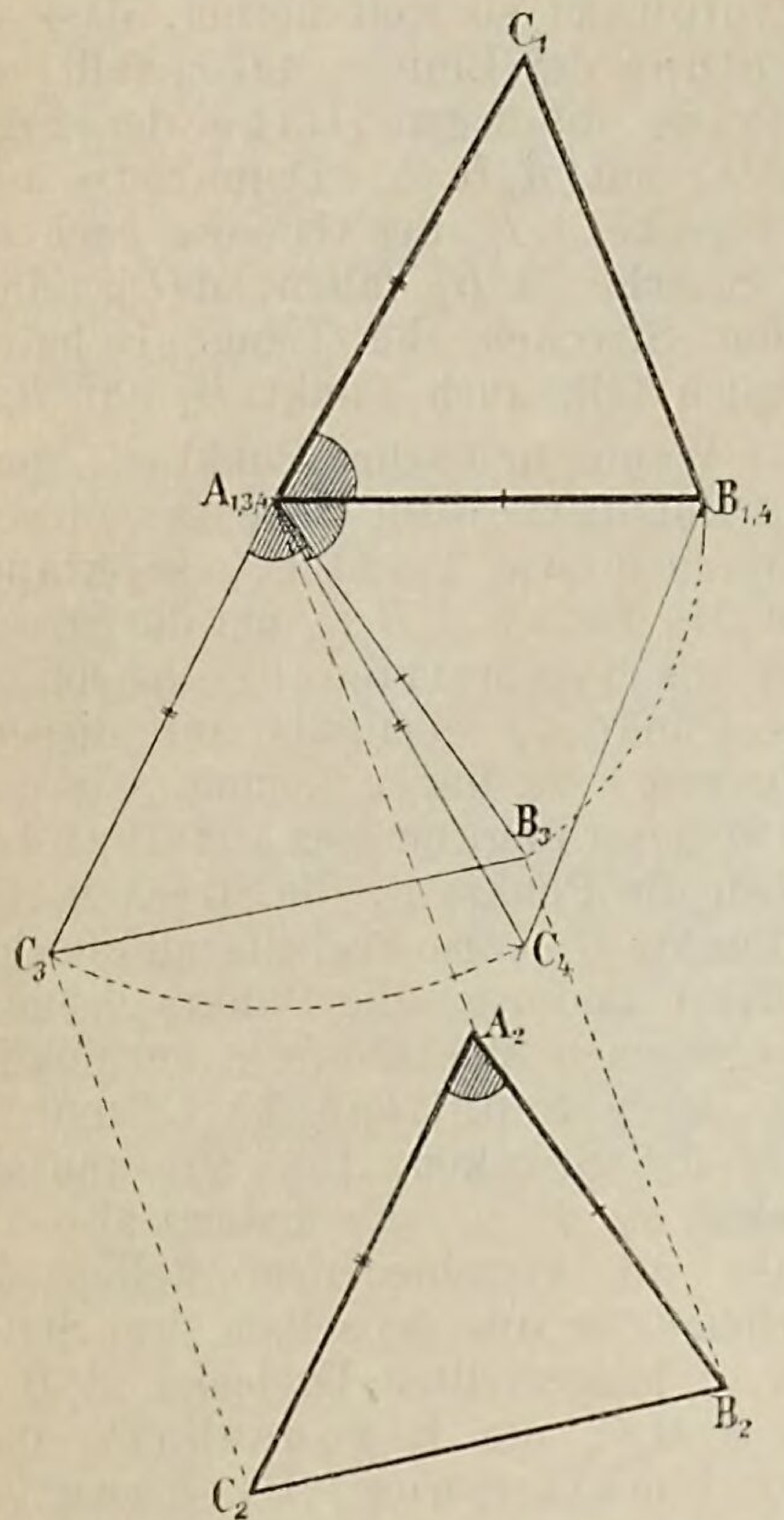
Satz 61. Dreiecke sind kongruent, wenn die drei Seiten in dem einen Dreieck ebenso gross sind, als in dem andern Dreieck (I. Kongruenzsatz);

oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 61 a. Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten bezüglich gleich sind, so sind auch die entsprechenden Winkel gleich.

Frage 127. Welches Ergebnis liefert der Vergleich der Konstruktion eines Dreiecks aus denselben zwei Seiten und eingeschlossenem Winkel (II.) an verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene?

Figur 95.



Erkl. 243. Auch hier gilt das in Erkl. 241 und 242 gesagte in vollständig gleicher Weise.

Erkl. 244. In Figur 96 ist der Fall durchgeführt, dass die Figur $A_2B_2C_2$ schon mit der Figur $A_1B_1C_1$ „gleichwendig" sei, d. h. dass Punkt C_2 auf derselben Seite über c_2 liege, wie Punkt C_1 über c_1. Daher ist in dieser Figur die Umklappung nicht mehr nötig, um Deckung herbeizuführen, denn Figur $A_1B_1C_1$ und Figur $A_4B_4C_4$ ist schon dieselbe.

Antwort. Ist aus denselben zwei Seiten b, c und eingeschlossenem Winkel α ein Dreieck konstruiert worden, erst über der Seite $A_1B_1 = c_1$, dann über der Seite $A_2B_2 = c_2$, so kann man mit der einen von beiden Konstruktionsfiguren, z. B. mit A_2B_2, folgende Ortsveränderungen vornehmen:

1) Man **schiebe** die ganze Figur $A_2B_2C_2$ längs der Strecke A_2A_1 als Leitlinie soweit über die Ebene fort, dass A_2 auf A_1 fällt, und bezeichne die dadurch entstehende neue Lage der Figur $A_2B_2C_2$ mit $A_3B_3C_3$.

2) Man **drehe** alsdann die Figur $A_3B_3C_3$ um den mit der Figur $A_1B_1C_1$ gemeinsamen Punkt A_1 als Umdrehungsmittelpunkt soweit herum, dass die Richtung der Linie c_3 auf c_1 fällt, und bezeichne die neue Lage der Figur $A_3B_3C_3$ mit $A_4B_4C_4$. Dabei muss auch die Strecke A_4B_4 der Grösse nach auf die Strecke A_1B_1 fallen, weil beide die gemeinschaftliche Länge c haben. Folglich fällt auch Punkt B_4 auf Punkt B_1.

3) Wenn in der neuen Lage Punkt C_4 noch nicht auf dieselbe Seite von A_1B_1 zu liegen kommt wie C_1, so **klappe** man die Figur $A_4B_4C_4$ um die Strecke A_1B_1 als Symmetrieachse um, so dass Punkt C_4 ebenfalls auf dieselbe Seite von c zu liegen kommt, wie C_1.

Bei dieser Lage wird der $\sphericalangle B_4A_4C_4$ von der Seite c_4 im gleichen Drehungssinne beschrieben, wie $B_1A_1C_1$ von c_1, und da beide Winkel gleich α sind, so muss Schenkel A_4C_4 der Richtung nach auf A_1C_1 fallen. Da ferner $A_4C_4 = b$ und $A_1C_1 = b$ abgetragen wurde, so muss auch Strecke A_4C_4 der Grösse nach auf Strecke A_1C_1 fallen, also auch Punkt C_4 auf C_1, sowie die Verbindungsstrecken CB und die Winkel ACB und CBA. Es haben also die

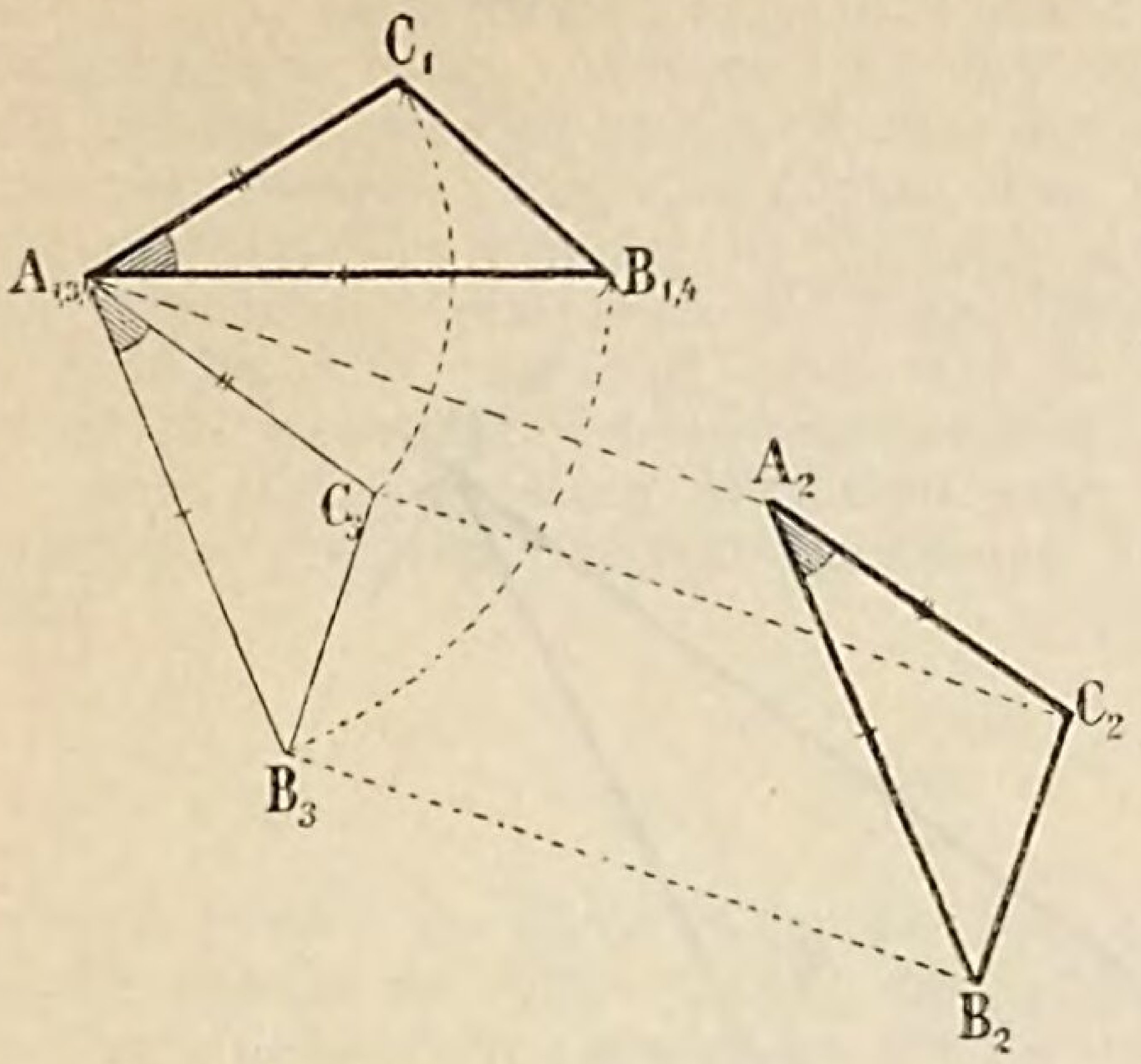
beiden an verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene aus denselben zwei Seiten b, c und eingeschlossenem Winkel α hergestellten Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ die Eigenschaft, durch Umklappung, Drehung und Verschiebung zur Deckung zu gelangen, und man kann folgende Aussage machen:

Satz 62. Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der von beiden eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck so gross sind, wie in dem andern Dreieck (II. Kongruenzsatz).

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 62a. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel bezüglich gleich sind, so sind auch die dritten Seiten und die ihr anliegenden Winkel entsprechend gleich.

Figur 96.



Erkl. 245. Es ist hervorzuheben, dass die Beifügung der Worte „bezüglich" und „entsprechend" in den nebenstehend ausgesprochenen Sätzen keineswegs überflüssig sind, denn nicht die Gleichheit beliebig gelegener Seiten und Winkel bedingt die Kongruenz, sondern die Seiten und Winkel müssen in beiden Dreiecken die gleiche Beziehung zu einander, dieselbe gegenseitige Lage haben.

Ist dies aber der Fall, und daher die Dreiecke kongruent, so sind auch wieder nicht beliebig gelegene übrige Seiten und Winkel einander gleich, sondern wieder nur die entsprechend gelegenen, d. h. es sind diejenigen Seiten gleich, welche gleichen Winkeln anliegen bezw. dem gleichgrossen Winkel gegenüberliegen, und es sind diejenigen Winkel gleich, welche von gleichgrossen Seiten eingeschlossen sind, bezw. welche der gleichgrossen Seite in beiden Dreiecken gegenüberliegen.

Frage 128. Welches Ergebnis liefert der Vergleich der Konstruktionen eines Dreiecks aus denselben zwei Seiten und einem Gegenwinkel (III.) an verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene?

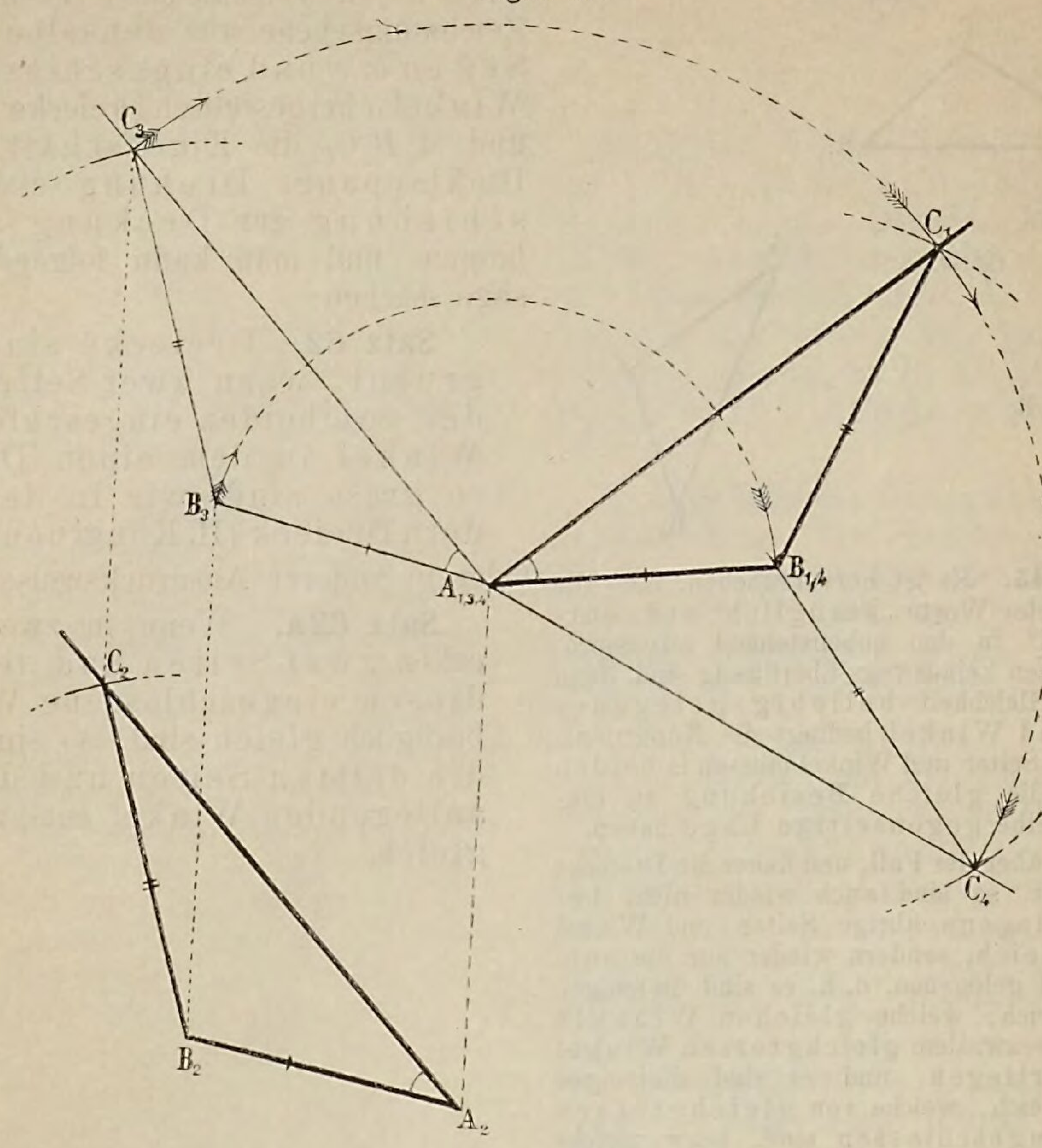
Erkl. 246. Auch hier gilt unverändert, was in Erkl. 241 und 242 zur ersten Ausführung gesagt wurde.

Erkl. 247. Bei Figur 97 könnte die falsche Ansicht entstehen, dass man die Umdrehung der Figur $A_3 B_3 C_3$ um Punkt A schon unterbrechen dürfe in dem Augenblicke, wenn Strahl $A_3 C_3$ der Richtung nach mit Strahl $A_1 C_1$ zusammenfällt, — um sodann Punkt B_3 um $A_1 C_1$ als Achse umzuklappen, statt nachher Punkt C_4 um die Achse AB. Der Fehlschluss besteht dabei in der durch die Anschauung der Figur 97

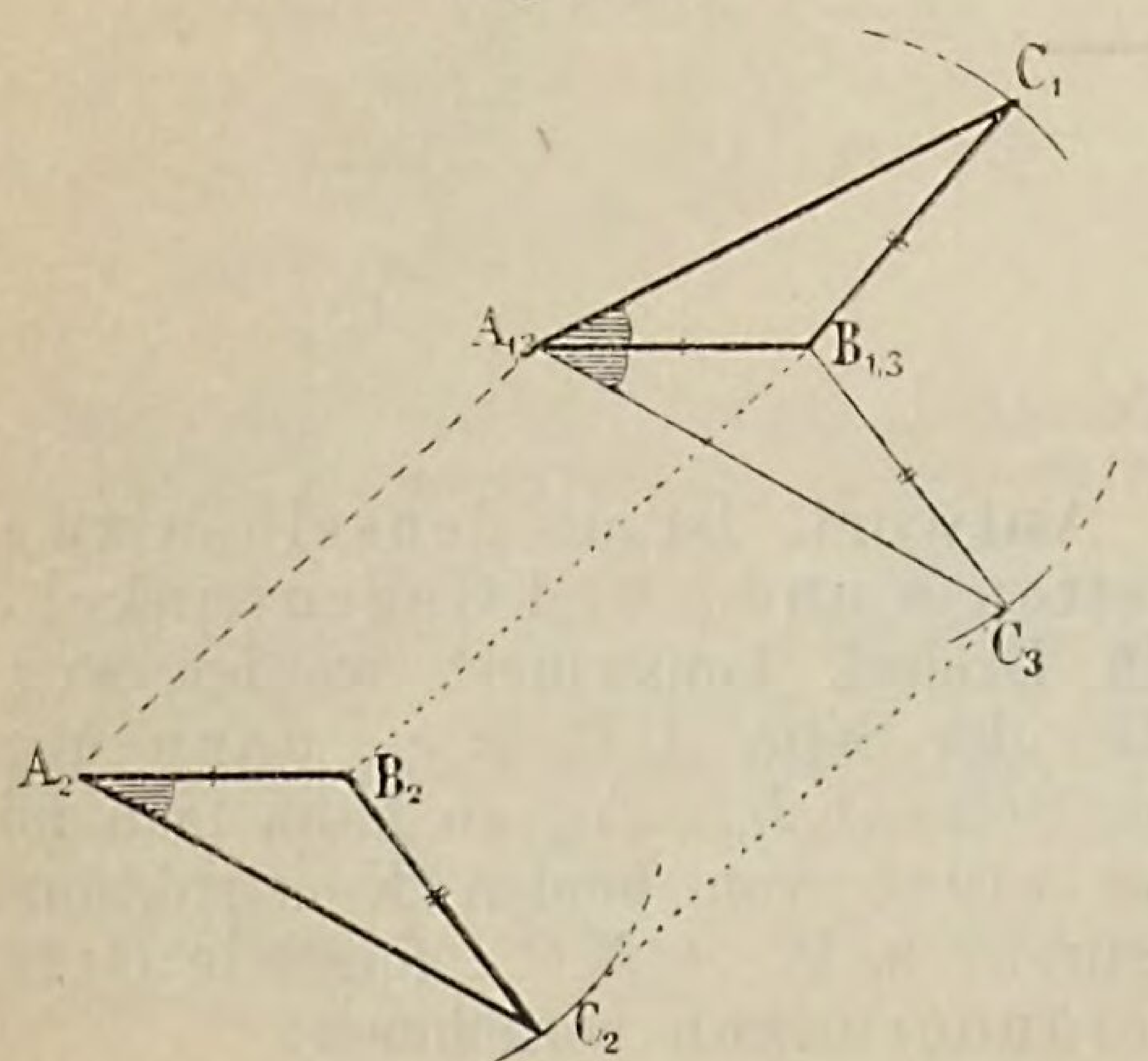
Antwort. Ist aus denselben zwei Seiten a und c und Gegenwinkel α ein Dreieck konstruiert worden erst über der Seite $A_1 B_1 = c_1$, dann über der Seite $A_2 B_2 = c_2$, so kann man mit der einen von beiden Konstruktionsfiguren, z. B. $A_2 B_2 C_2$, folgende Ortsveränderungen vornehmen:

1) Man **schiebe** die ganze Figur $A_2 B_2 C_2$ samt ihren Punkten, Senkrechten, Kreisbogen u. s. w. längs Strecke $A_2 A_1$ als Leitlinie soweit über die Papierebene, dass A_2 auf A_1 fällt,

Figur 97.



Figur 98.



allerdings nahegelegten Vorausnahme der Gleichheit der Strecken A_3C_3 und A_1C_1. Denn dass diese beiden Strecken gleich gross sein müssen, geht erst nachträglich aus dem Kongruenzsatze hervor; und dadurch erst erhält

und bezeichne die neue Lage der Figur $A_2B_2C_2$ durch $A_3B_3C_3$.

2) Man **drehe** alsdann die Figur $A_3B_3C_3$ um den mit Figur $A_1B_1C_1$ gemeinschaftlichen Punkt A_1 als Umdrehungsmittelpunkt soweit herum, bis Richtung c_3 auf Richtung c_1 fällt, und bezeichne die neue Lage der Figur $A_3B_3C_3$ mit $A_4B_4C_4$. Dabei muss auch die Strecke A_4B_4 der Grösse nach auf die Strecke A_1B_1 fallen, weil beide dieselbe Länge c haben; folglich fällt auch Punkt B_4 auf B_1.

3) Wenn in der neuen Lage Punkt A_4 noch nicht auf dieselbe Seite von A_1B_1 zu liegen kommt wie C_1, so **klappe** man die Figur $A_4B_4C_4$ um die Strecke A_4B_4 als Symmetrieachse herum, so dass Punkt C_4 auf dieselbe Seite von c zu liegen kommt, wie C_1.

man die Gewissheit, dass der Kreisbogen mit Radius A_3C_3 auch wirklich durch den Punkt C_1 hindurchgehen muss. Vorher ist dies noch nicht gewiss, kann also auch nicht zum Beweise verwendet werden. Dagegen könnte man das Ueberstreichen der Strecke A_1C_1 durch A_3B_3 ganz vermeiden, wenn man die Ueberführung des Strahles A_3B_3 auf A_1B_1 statt wie in Figur 97 in negativer Umdrehungsrichtung, in der eine etwas grössere Winkeldrehung erfordernden positiven Umdrehungsrichtung ausführte.

Erkl. 247a. In Figur 98 ist der Fall dargestellt, dass in der Figur $A_2B_2C_2$ die Richtung der ersten Seite A_2B_2 parallel ist der Richtung der Seite A_1B_1. Demnach ist $A_2B_2 \parallel A_1B_1$; und bei der Verschiebung fällt die Strecke A_2B_2 auf die Parallele A_1B_1, $\sphericalangle B_2A_2C_2 = \alpha$ fällt auf $B_1A_1C_1 = \alpha$, daher fiele Schenkel A_2C_2 der Richtung nach schon auf A_1C_1, wenn, wie in Figur 96, der $\sphericalangle \alpha$ im gleichen Drehungssinne gemessen wäre wie $A_2B_2C_2$ und $A_1B_1C_1$; dagegen ist die Umklappung noch nötig, weil in $A_2B_2C_2$ der Winkel α im negativen, in $A_1B_1C_1$ im positiven Drehungssinne gewählt wurde — während die Drehung um A_1 wegfällt, denn Figur $A_3B_3C_3$ ist schon dieselbe, wie oben auch $A_4B_4C_4$.

Erkl. 248. Wäre $a < c$ und in Figur $A_1B_1C_1$ das eine, dagegen in Figur $A_2B_2C_2$ das andere der beiden Dreiecke gezeichnet, welche aus diesen Stücken a, c, α hergestellt werden können, so müsste nach Figur 91 in dem einen Dreieck $\sphericalangle \gamma_1$ ein spitzer, im andern γ_2 ein stumpfer sein und umgekehrt würde dafür im erteren Dreieck der Winkel β_1 grösser sein, als β_2 im zweiten Dreieck, damit wieder die Winkelsumme von 180° entstünde. Da also in einem Dreieck der Gegenwinkel von c ein spitzer ist, im andern ein stumpfer, so kann die Eindeutigkeit der Lösung auch dadurch herbeigeführt werden, dass vorgeschrieben wird, ob der Gegenwinkel der Seite c ein spitzer oder ein stumpfer sein soll. Für jeden dieser beiden Fälle kann alsdann nur ein einziges, nämlich nur das eine oder nur das andere der beiden überhaupt möglichen Dreiecke erhalten werden, und man erhält die etwas veränderte Fassung des Lehrsatzes:

„Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, während die Gegenwinkel des einen Paares gleicher Seiten einander gleich sind, die Gegenwinkel des andern Paares entweder beide spitz oder beide stumpf sind."

Bei dieser Lage wird $\sphericalangle B_4A_4C_4 = \alpha$ von der Seite c_4 in derselben Drehungsrichtung beschrieben, wie $\sphericalangle A_1B_1C_1$ von c_1, und da beide Winkel gleich α sind, so muss Schenkel A_4C_4 der Richtung nach auf A_1C_1 fallen. Ferner fallen auf einander die mit gleichem Radius a beschriebenen Kreisbogen, also auch deren Schnittpunkt bezw. Schnittpunkte mit dem Schenkel b. Da aber aus den Stücken a, c, α zweierlei Dreiecke gezeichnet werden können, solange $a < c$ ist, so ist es nicht sicher, ob auch Strecke A_4C_4 auf A_1C_1 fällt, denn es könnte ja bei der Konstruktion von $A_1B_1C_1$ das eine und bei $A_2B_2C_2$ das andere der beiderlei Dreiecke gezeichnet worden sein. Nur in dem Falle $a > c$, wobei $\alpha > \gamma$, trifft der in Antwort der Frage 125 besprochene Fall ein, dass nur ein einziger Schnittpunkt des Kreises um B mit dem Schenkel b über c existiert, dass also auch nur ein einziges Dreieck mit Punkt C über c möglich ist. Wenn also a die grössere der beiden Seiten a und c war, — dann haben die beiden an verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene aus denselben Seiten a, c und dem Gegenwinkel der grösseren Seite a hergestellten Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ die Eigenschaft, dass sie durch Umklappung, Drehung und Verschiebung zur Deckung gebracht werden können, und man kann folgende Aussage machen:

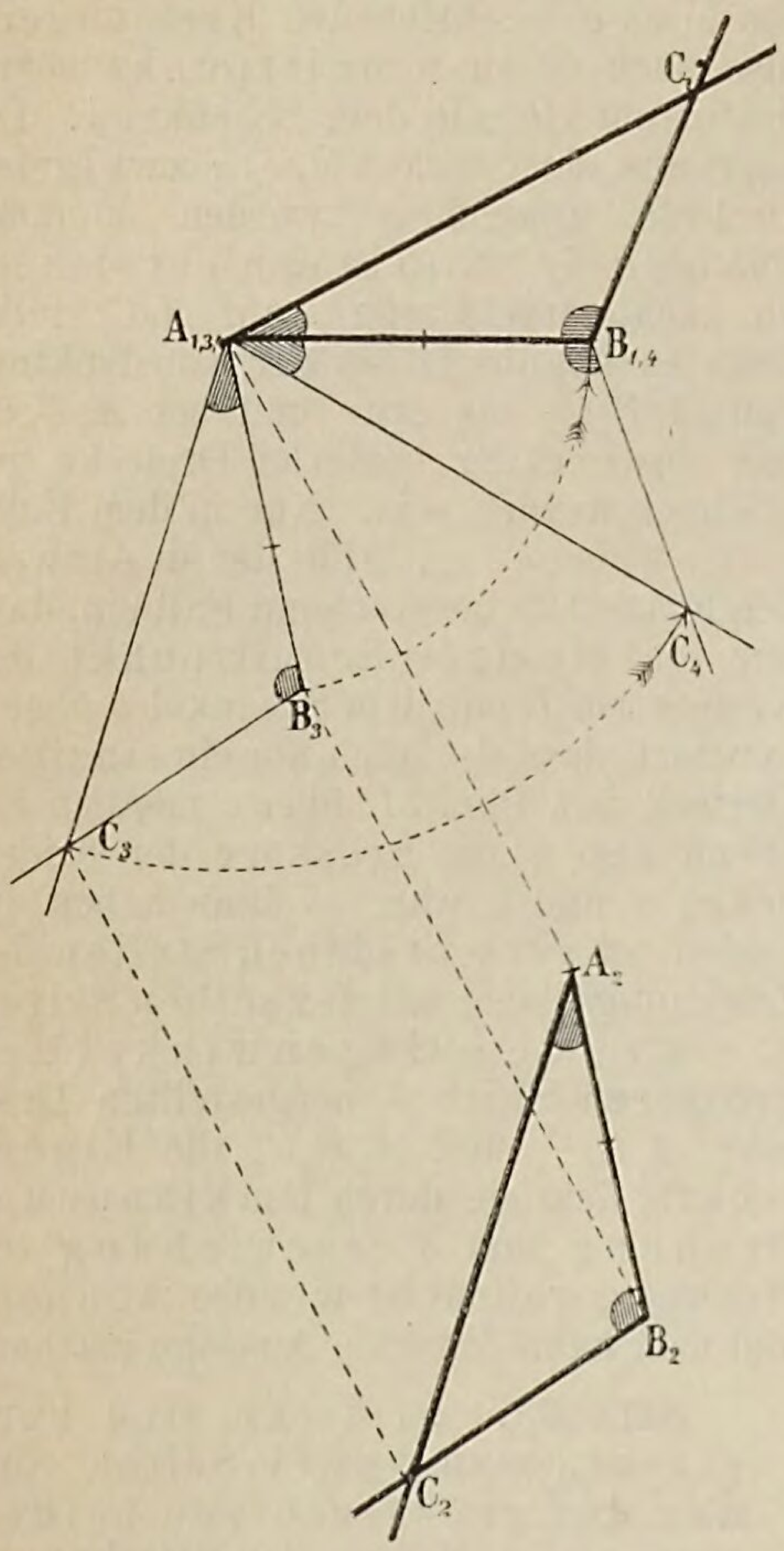
Satz 63. Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der der grösseren von beiden gegenüberliegende Winkel in einem Dreieck so gross sind, als zwei Seiten und der der grösseren von beiden gegenüberliegende Winkel im andern Dreieck (III. Kongruenzsatz).

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 63a. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der Gegenwinkel der grösseren bezüglich gleich sind, so sind auch die dritten Seiten und die übrigen Winkel entsprechend gleich.

Frage 129. Welches Ergebnis liefert der Vergleich der Konstruktionen eines Dreiecks aus derselben Seite und zwei Winkeln (IV.) an verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene.

Figur 99.



Antwort. Ist aus derselben Seite c und zwei Winkeln α und β ein Dreieck konstruiert worden, erst über der Seite $A_1B_1 = c_1$, dann über der Seite $A_2B_2 = c_2$, so kann man mit der einen von beiden Konstruktionsfiguren, z. B. mit A_2B_2, folgende Ortsveränderungen vornehmen:

1) Man **schiebe** die ganze Figur $A_2B_2C_2$ längs der Strecke A_2A_1 als Leitlinie soweit über die Papierebene fort, dass Punkt A_2 auf Punkt A_1 fällt, und bezeichne die dadurch entstandene neue Lage der Figur $A_2B_2C_2$ mit $A_3B_3C_3$.

2) Man **drehe** alsdann die Figur $A_3B_3B_3$ um den mit Figur $A_1B_1C_1$ gemeinschaftlichen Punkt A_1 als Umdrehungsmittelpunkt soweit herum, dass die Richtung der Linie c_3 auf c_1 fällt, und bezeichne die neue Lage der Figur $A_3B_3C_3$ mit $A_4B_4C_4$. Dabei muss auch die Strecke A_4B_4 der Grösse nach auf die Strecke A_1B_1 fallen, weil beide Strecken die gemeinschaftliche Länge c haben. Folglich fällt auch Punkt B_4 auf B_1.

3) Wenn in der neuen Lage der Figur $A_4B_4C_4$ der Punkt C_4 noch nicht auf derselben Seite von A_1B_1 zu liegen kommt wie C_1, so **klappe** man die Figur $A_4B_4C_4$ um die Strecke A_1B_1 als Symmetrieachse um, so dass der Punkt C_4 ebenfalls auf dieselbe Seite von c zu liegen kommt, wie Punkt C_1.

Bei dieser Lage wird der Winkel $B_4A_4C_4$ von der Seite c_4 in gleichem Drehungssinne beschrieben, wie $B_1A_1C_1$ von c_1, und da beide Winkel gleich α sind, so muss Schenkel A_4C_4 der Richtung nach auf A_1C_1 fallen. Ferner wird auch Winkel $A_4B_4C_4$ von von der Seite c_4 im gleichen Sinne beschrieben, wie $A_1B_1C_1$, und da beide Winkel gleich β sind, so muss auch Schenkel B_4C_4 der Richtung nach auf B_1C_1 fallen. Wenn aber Schenkel a_4 auf Schenkel a_1 und Richtung b_4 auf

Erkl. 249. Auch zu diesem Falle, wie zu den vorigen drei, gilt das in Erkl. 241 und 242 gesagte. Und zwar kann jedesmal die Reihenfolge der Ortsveränderungen eine beliebige sein. Während also in nebenstehenden Ausführungen stets in erster Reihe die Verschiebung, dann die Drehung und zuletzt die Umklappung angesetzt wurde, kann auch zuerst die Herbeiführung der Gleichwendigkeit beider Figuren durch die Umklappung erfolgen, und darauf entweder erst die Drehung und dann die Schiebung, oder erst die Verschiebung und dann die Drehung. Oder man kann erst die gleiche Richtung entsprechender Seiten herbeiführen durch Drehung der Seiten c in parallele Lage, und

darauf wieder entweder erst die Verschiebung und dann die Umwendung, oder erst die Umwendung und zuletzt die Verschiebung. Endlich könnte auch, unter Beibehaltung der Verschiebung an erster Stelle, nach derselben statt der im nebenstehenden eingehaltenen Reihenfolge zuerst die Umklappung und zuletzt erst die Umdrehung vorgenommen werden.

Erkl. 250. Wie wichtig besonders für diesen vierten Fall die in Erkl. 245 gemachte Bemerkung ist, kann aus Figur 100 ersehen werden, worin aus derselben Seite c und denselben drei Winkeln 30° 60° 90° drei verschiedene Dreiecke hergestellt sind, welche keineswegs kongruent sind. Denn an der Seite c sind jedesmal zwei andere anliegende Winkel benutzt, so dass derselben auch jeweils ein anderer Winkel gegenüberliegt. Nur wenn in mehrfach konstruierten Dreiecken dieselben Winkel auch dieselbe Lage gegen einander und gegen die gleichen Seiten einnehmen, sind die Dreiecke kongruent — und wenn die Dreiecke kongruent sind, so sind auch wieder nur die entsprechend gelegenen Seiten und Winkel gleich.

Erkl. 251. Es gibt daher dreierlei Dreiecke, welche ausser einer gegebenen Seite auch drei gegebene Winkel haben. Dagegen gibt es nur einerlei, also kongruente Dreiecke, in welchen der gegebenen Seite auch ein bestimmter der drei Winkel gegenüberliegt; denn ob von den beiden anliegenden Winkeln der eine hüben oder drüben anliegt, kann durch Umklappung ausgeglichen werden.

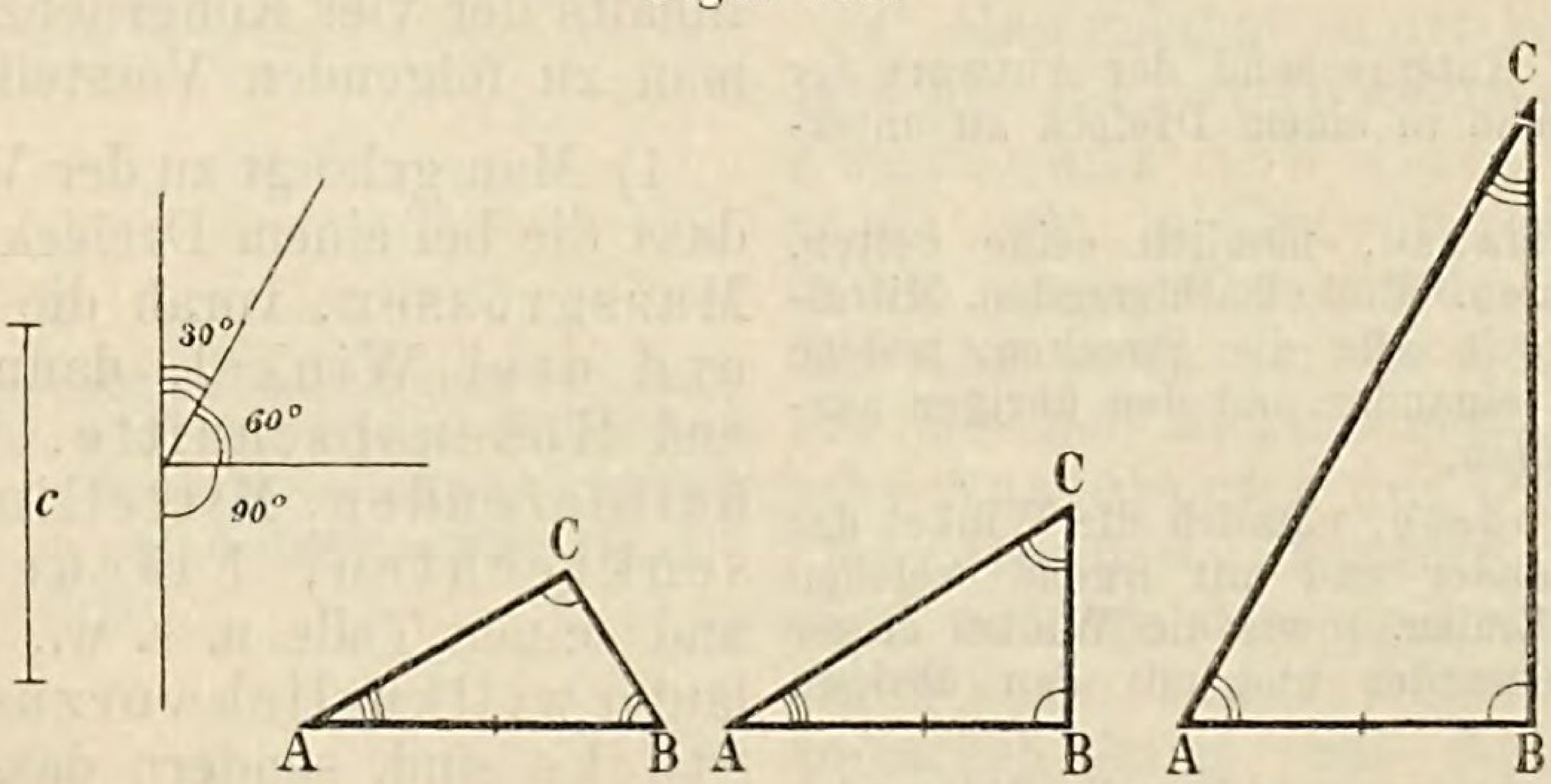
Richtung b_1 fällt, so muss auch der Schnittpunkt der Schenkel a_4 und b_4 auf den Schnittpunkt der Richtungen a_1 und b_1 fallen, also Punkt C_4 auf C_1, sowie die Verbindungsstrecken A_4C_4 und B_4C_4 auch der Grösse nach auf A_1C_1 und B_1C_1, und der Winkel $A_4C_4B_4$ auf Winkel $A_1C_1B_1$. Es haben also die beiden an verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene aus derselben Seite c und den zwei Winkeln α und β hergestellten Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ die Eigenschaft, durch Umklappung, Drehung und Verschiebung zur Deckung zu gelangen: und man kann folgende Aussage machen:

Satz 64. Dreiecke sind kongruent, wenn eine Seite und zwei Winkel in dem einen Dreieck so gross sind, als eine Seite und die beiden gleichliegenden Winkel im andern Dreieck (IV. Kongruenzsatz).

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 64a. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und zwei gleichliegende Winkel bezüglich gleich sind, so sind auch die beiden andern Seiten und der dritte Winkel entsprechend gleich.

Figur 100.



Frage 130. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Antworten der Fragen 121 und 122 für die Kongruenz gleichschenkliger und rechtwinkliger Dreiecke?

Antwort. Da nach den Antworten 121 bis 122 gleichschenklige und

rechtwinklige Dreiecke schon unzweideutig bestimmt werden durch zwei bestimmte Seiten oder eine Seite und einen Winkel in bekannter Lage, so kann man folgende Aussagen machen:

Erkl. 252. Für die Kongruenz gleichseitiger Dreiecke ist nach dem vierten Kongruenzsatz nur die Gleichheit der einzigen Seitenlänge erforderlich, für die Kongruenz rechtwinklig-gleichschenkliger Dreiecke nach demselben Satze nur die Gleichheit einer einzelnen Seitenlänge.

Satz 65. Gleichschenklige Dreiecke sind kongruent, wenn

1) Grundseite und Schenkel,

oder wenn:

2) eine Seite und ein bestimmter Winkel

im einen Dreieck so gross sind, wie die gleichliegenden Stücke des andern.

Erkl. 253. Die Anwendung des dritten Kongruenzsatzes auf das rechtwinklige Dreieck gestaltet sich besonders einfach, da der in allen rechtwinkligen Dreiecken gleichgrosse rechte Winkel stets der Hypotenuse gegenüberliegt, und diese an sich schon die grösste Seite des Dreiecks ist.

Und ebenso:

Satz 66. Rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn

1) zwei Seiten,

oder wenn

2) eine Seite und ein bestimmter spitzer Winkel

im einen Dreieck so gross sind, wie die gleichliegenden Stücke des andern.

Frage 131. Zu welchen Vorstellungen über die bei einem Dreieck vorkommenden Massgrössen gelangt man in Berücksichtigung der vier Kongruenzsätze?

Antwort. In Berücksichtigung des Inhalts der vier Kongruenzsätze gelangt man zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die bei einem Dreieck auftretenden Massgrössen, vorab die drei Seiten und drei Winkel, dann die Höhen und Höhenabschnitte, die Winkelhalbierenden, Mittellinien, Mittelsenkrechten, Fläche des ganzen und seiner Teile u. s. w., keineswegs lauter willkürlich vorzuschreibende Stücke sind, sondern dass ein Dreieck samt all seinen zugehörigen Elementen eindeutig bestimmt wird:

I. durch seine drei Seiten — oder

II. durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel — oder

Erkl. 254. Entsprechend der Antwort der Frage 71 hat man in einem Dreieck zu unterscheiden:

1) Längenmasse, nämlich seine Seiten, Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierenden, Mittelsenkrechten, sowie alle die Strecken, welche durch diese auf einander und den übrigen ausgeschnitten werden,

2) Winkelmasse, nämlich die Winkel der Seiten mit einander und mit irgend welchen der genannten Linien, sowie die Winkel dieser Linien unter einander und mit den übrigen derselben,

3) Flächenmasse, nämlich die Fläche des Dreiecks selber und derjenigen Teildreiecke oder sonstigen Figuren, welche durch irgendwelche der genannten Linien gebildet werden.

Und diese ganze unbegrenzte Reihe verschiedenster Massgrössen ist eindeutig und unter Ausschluss jeglicher Willkürlichkeit festgelegt, sowie eine der nebenstehenden Gruppen von nur drei Stücken gegeben ist.

III. durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der grösseren — oder

IV. durch eine Seite und zwei Winkel in bestimmter Lage zu ihr.

2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass in Dreiecken, die infolge der Uebereinstimmung einer der ebengenannten Gruppen von Stücken miteinander kongruent sind, auch die übrigen Stücke, nämlich Höhen, Höhenabschnitte, Winkelhalbierende, Mittellinien u. s. w., sowie die Winkel zwischen solchen übrigen Stücken entsprechend zur Deckung gelangen, also entsprechend gleich sind.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass eine Konstruktionsaufgabe eines Dreiecks aus irgend welchen andern der genannten „Stücke" desselben (also aus zwei Seiten und einer Höhe, oder aus Winkeln zwischen Höhen und Seiten u. s. w.) dadurch gelöst werden kann, dass man diese Stücke unter sich zu Dreiecken vereinigt, von welchen dann eine der obigen Gruppen von Stücken gegeben ist, und indem man darin erst diese Teildreiecke nach Angabe der Antworten auf die Fragen 117 bis 120 konstruiert und aus ihnen das ganze Dreieck zusammensetzt.

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die Untersuchung über die Kongruenz von Dreiecken nicht mehr, wie in Antwort der Fragen 7 und 8 angegeben wurde, und wie in den Antworten auf die Fragen 126 bis 129 jedesmal wirklich geschah, die wirkliche Ausführung der Ortsveränderungen dieser Figuren nötig haben wird, sondern dass man von diesen Figuren stets einzelne Dreiecksstücke aufsuchen kann, aus deren Uebereinstimmung auf Grund der Kongruenzsätze schon die Kongruenz nachgewiesen werden kann. Diese Dreiecke brauchen daher nicht jedes einzelne mal wirklich durch Umklappung, Drehung und Verschiebung zur Deckung gebracht zu werden, wenn in ihnen sich eine über-

Erkl. 255. Sind zwei Dreiecke kongruent, und sind in ihnen schon die drei Seiten gegeben gewesen, so bezeichne man die Stücke des einen mit den einfachen Buchstaben, die des andern mit den gestrichenen Buchstaben, und erhält dann:

Voraussetzung: $a = a'$
$b = b'$
$c = c'$

Folgerung:

1) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$
2) $h_a = h_a'$, $h_b = h_b'$, $h_c = h_c'$
3) $p_a = p_a'$, $p_b = p_b'$, $p_c = p_c'$
4) $q_a = q_a'$, $q_b = q_b'$, $q_c = q_c'$
5) $\sphericalangle(h_a b) = \sphericalangle(h_a' b')$, $\sphericalangle(h_a c) = \sphericalangle(h_a' c')$
6) $\sphericalangle(h_b a) = \sphericalangle(h_b' a')$, $\sphericalangle(h_b c) = \sphericalangle(h_b' c')$
7) $\sphericalangle(h_c a) = \sphericalangle(h_c' a')$, $\sphericalangle(h_c b) = \sphericalangle(h_c' b')$

und so weiter.

Erkl. 256. Konstruktionsaufgaben von Dreiecken, bei welchen nicht bloss Seiten und Winkel, sondern auch andere Stücke gegeben sind, findet man in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Erkl. 257. Die schriftliche Bezeichnung der Kongruenz geschieht durch das Zeichen $\cong$ (d. h. gleich und ähnlich, siehe Erkl. 84 des ersten Teiles). Es hat grossen Wert und Vorteil, dass die vor und hinter diesem „Kongruenzzeichen“ stehenden Buchstaben die von ihnen bezeichneten Figuren aufs genaueste in der Weise angeben, dass die Punkte und Strecken der Figuren auf beiden Seiten des Kongruenzzeichens in derjenigen entsprechenden Weise aufgeführt werden, wie dieselben in beiden Figuren bezüglich gleich sind. Es ist also keineswegs gleichgültig, ob geschrieben wird (siehe Figur 101):

$$\triangle ABC \cong \triangle EFG$$

oder:

$$\triangle ABC \cong \triangle EGF$$

oder:

$$\triangle ABC \cong \triangle FEG \text{ oder } FG|E \text{ u. s. w.},$$

sondern wenn links die Buchstabenfolge ABC steht, so soll rechts als erster Buchstaben derjenige des Punktes stehen, welcher dem Punkte A entspricht, als zweiter derjenige, welcher B entspricht, als dritter der dem Punkte C entsprechende.

Dann nämlich ist es sehr erleichtert, aus einer angeschriebenen Kongruenz die gleichen Stücke beider Figuren abzulesen, ohne auch nur auf die Figur zu sehen. Es entsprechen sich nämlich dann aufs genaueste diejenigen Stücke, deren bezeichnende Buchstaben auf beiden Seiten der angeschriebenen Formel gleiche Stellung haben. Hat man z. B. die Kongruenz:

$$ABC \cong EFG$$

so entsprechen sich die Punkte:

$$A \cong E,\ B \cong F,\ C \cong G,$$

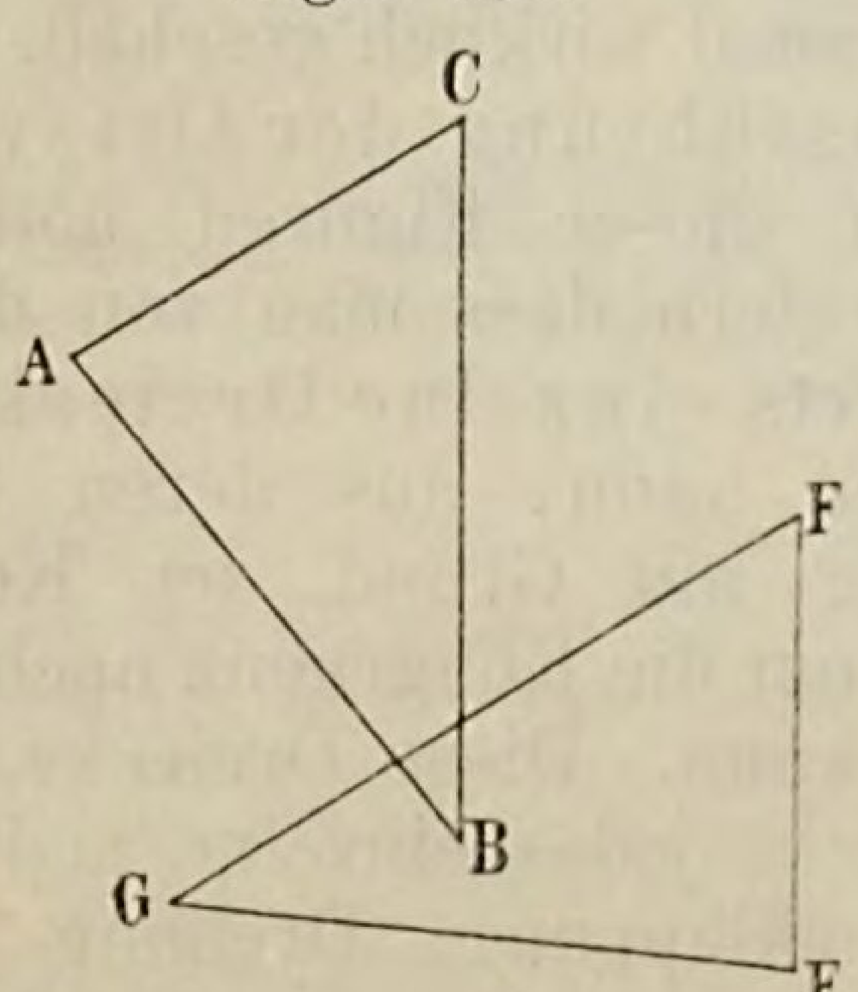
die Strecken:

$$AB \cong EF,\ BC \cong FG,\ AC \cong EG,$$

die Winkel:

$$\sphericalangle ABC \cong EFG,\ \sphericalangle BCA \cong FGE,$$
$$\sphericalangle CAB \cong GEF \text{ u. s. w.}$$

Figur 101.



einstimmende Gruppe solcher Stücke zusammenfinden lässt, deren Gleichheit die Kongruenz des ganzen Dreiecks bedingt.

5) Man gelangt zu der Vorstellung, dass auch die Untersuchung der Gleichheit einzelner Strecken oder Winkel nicht immer durch die wirkliche Ausführung der drei Ortsveränderungen mit denselben geführt zu werden braucht. Man sucht vielmehr diese unbekannten Stücke mit bekannten benachbarten zu Dreiecken zu vereinigen, in welchen eine der vier Gruppen gleicher Stücke vorhanden ist. Lässt sich dann aus diesen Stücken auf Grund eines der Kongruenzsätze die Kongruenz der ganzen Dreiecke erschliessen, so müssen auch die übrigen Stücke der beiden Dreiecke „entsprechend“ gleich sein, d. h. es müssen den schon bekannten gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen und umgekehrt auch solche unbekannten Seiten gleich sein, welche bekannten gleichen Winkeln gegenüberliegen.

6) Man gelangt zu der Vorstellung, dass auch bei andern Figuren, als bloss bei einzelnen Strecken und Winkeln oder bei Dreiecken, also besonders bei Vielecken u. s. w., auf Grund der vier Dreieckskongruenzsätze die wirkliche Ausführung der dreierlei Ortsveränderungen bei der Untersuchung auf Kongruenz entbehrlich wird, wenn man diese Figuren in lauter einzelne Dreiecke zerlegen kann, in deren jedem eine der die Kongruenz bedingenden Gruppen von Stücken als gleichgross gefunden werden kann. Auf Grund der Kongruenz dieser einzelnen Dreiecke lässt sich dann mittels des im vorhergehenden gesagten die Gleichheit sämtlicher einzelnen Strecken und Winkel der Vielecke nachweisen, ohne dass es nötig wäre, die Figuren wirklich von ihrer Stelle fortzubewegen und aufeinander zu legen.

2) Ueber das Viereck.

a) Ueber die Seiten und Winkel des allgemeinen Vierecks.

Frage 132. Wie kann man sich ein Viereck entstanden denken?

Antwort. Man kann sich ein Viereck auf zweierlei Art entstanden denken: entweder als eine Gruppe von vier Punkten, welche durch vier gerade Linien verbunden sind (siehe Figur 102), oder als eine Gruppe von vier geraden Linien, welche einander in vier Punkten durchschneiden (siehe Figur 103).

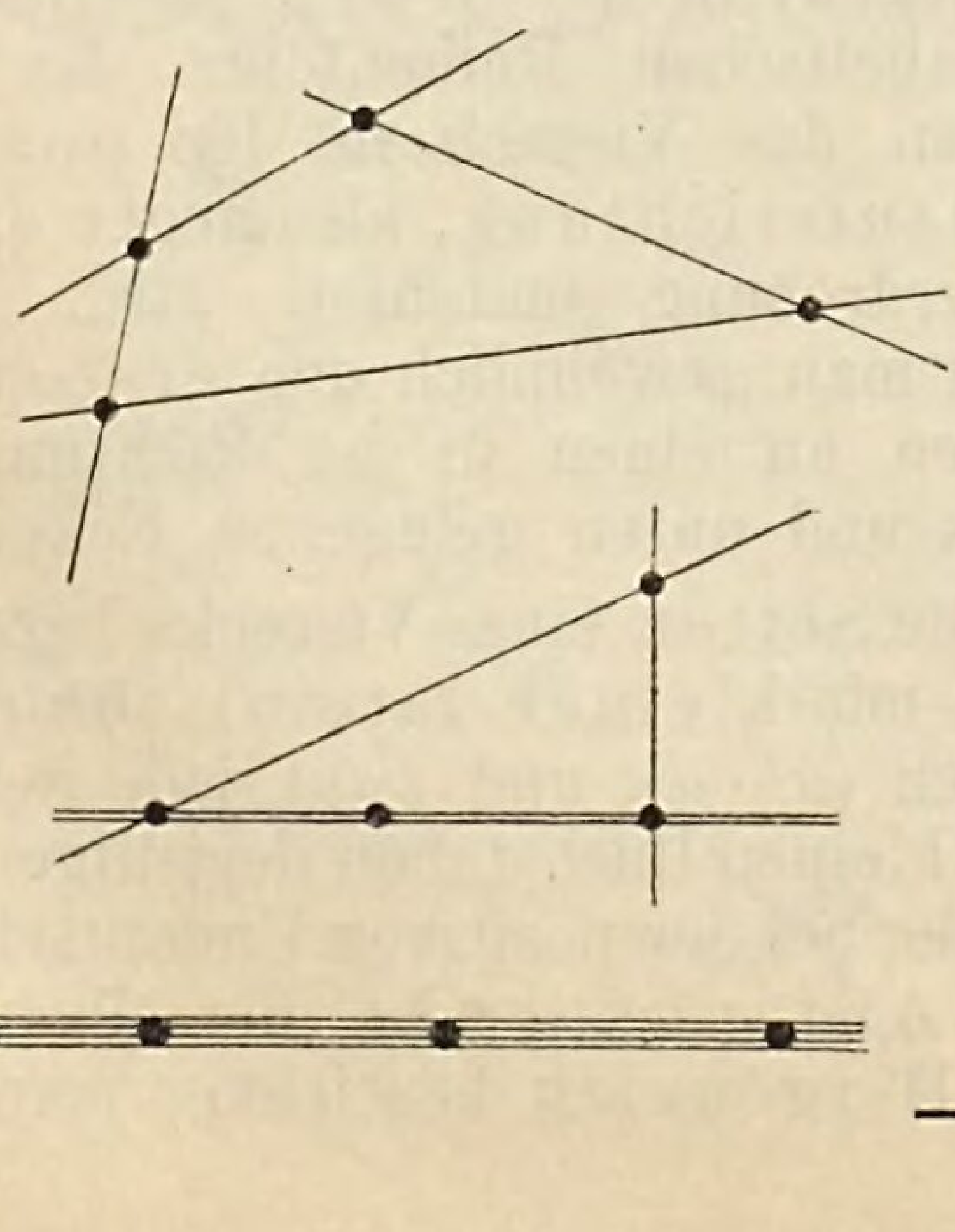
Die nach der ersten Art entstehende Figur heisst insbesondere Viereck, die nach der zweiten Art erzeugte Figur heisst auch Vierseit. Soweit beide Figuren übereinstimmen, wird die Bezeichnung der Figur als Viereck fast ausschliesslich angewendet; diejenige als Vierseit nur dann, wenn die Entstehung der Figur als Liniengebilde (siehe den ersten Abschnitt dieses Teiles) ausdrücklich hervorgehoben werden soll.

Erkl. 258. Die im nebenstehenden betrachtete Figur heisst auch „einfaches Viereck" bezw. „einfaches Vierseit" im Gegensatze zum „vollständigen Viereck" und „vollständigen Vierseit", welche nicht mehr identische Figuren sind. Diese werden in der Geometrie der Lage betrachtet. Man vergleiche den ersten Abschnitt dieses Teiles und diejenigen Teile von Kleyers Encyklopädie, welche über die Geometrie der Lage handeln.

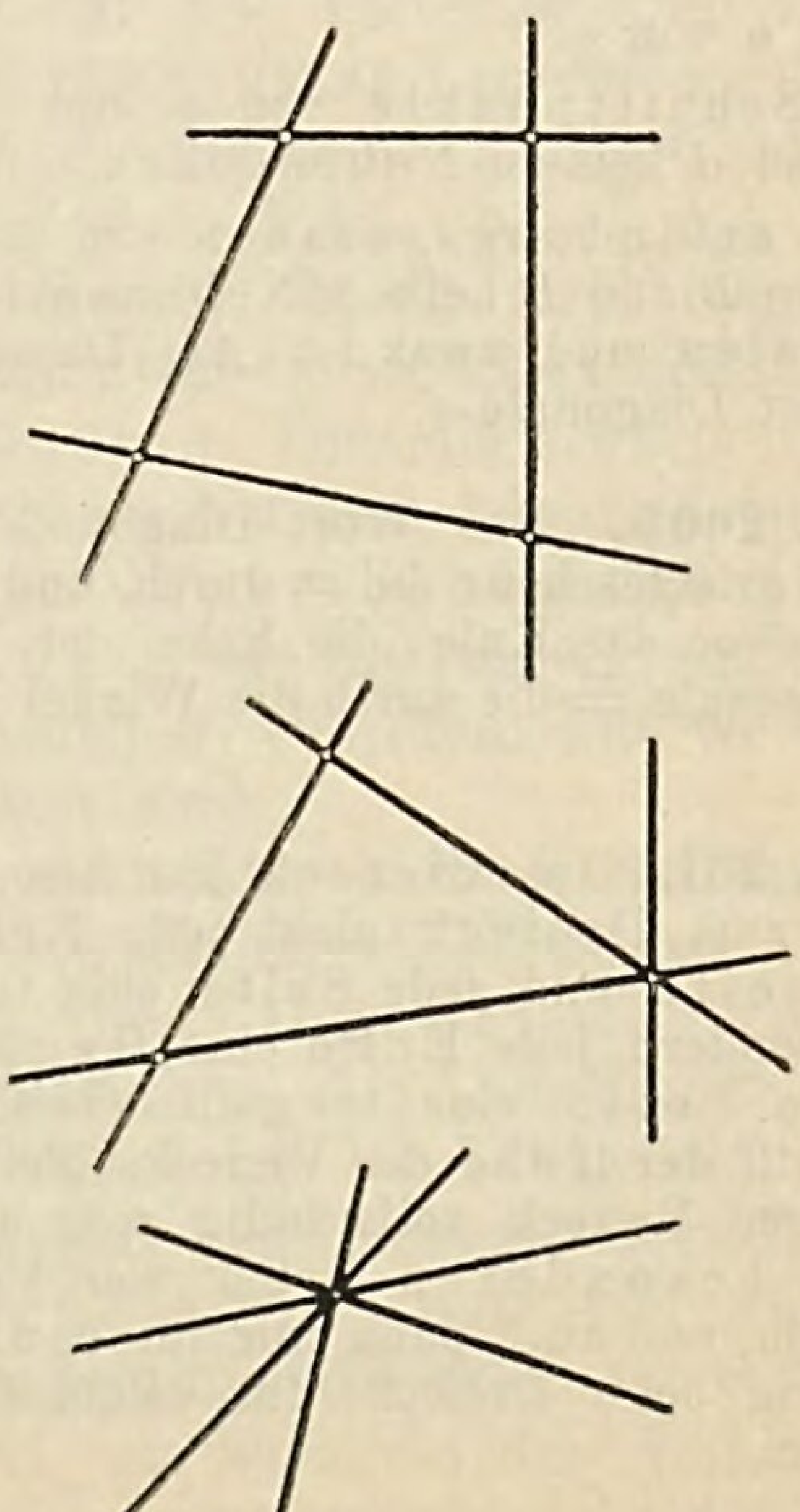
Erkl. 259. Was schon in Erkl. 111 für das Dreieck ausgeführt wurde, gilt ebenso auch für das Viereck, dass nämlich kein Viereck entstehen kann, wenn drei oder gar alle vier Punkte desselben auf einer und derselben Geraden liegen, und dass kein Vierseit entstehen kann, wenn drei oder gar alle vier Geraden desselben durch einen und denselben Punkt gehen (s. Figur 102 und 103).

Erkl. 260. Bei der Zeichnung eines Vierecks sind also nur die beiden ersten Punkte bezw. Geraden vollständig willkürlich; für die Wahl des dritten Punktes besteht schon die Einschränkung, dass er nicht auf der Verbindungsgeraden der beiden ersten liegen darf; und für die Wahl des vierten Punktes ist die Lage auf zwei Geraden der Ebene auszuschliessen. Ebenso ist für die Wahl der dritten Geraden eines Vierseits der Schnittpunkt der beiden ersten und für die vierte jeder der beiden ersten Schnittpunkte auszuschliessen.

Figur 102.



Figur 103.



Frage 133. Welches sind die Elemente eines Vierecks, und wie werden dieselben bezeichnet?

Antwort. Die Elemente eines Vierecks sind seine vier Punkte und seine vier Geraden. Die Punkte heissen die Ecken oder die Eckpunkte des Vierecks, die vier Geraden (als unbegrenzte Linien) heissen die Seiten des Vierecks oder die Vierecksseiten.

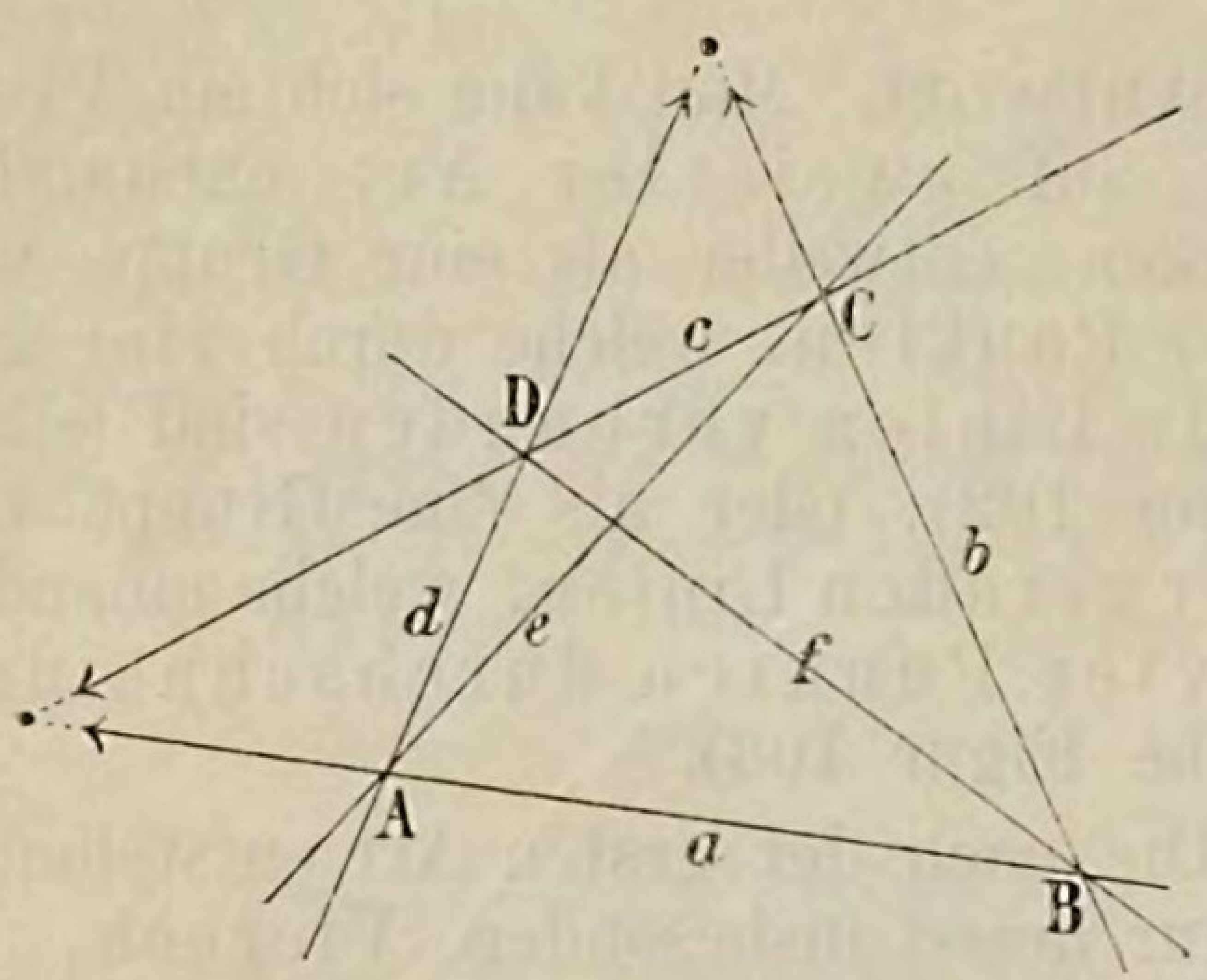
Die beiden Vierecksseiten, welche sich in einer bestimmten Ecke treffen, heissen die dieser Ecke anliegenden oder die anstossenden Seiten; je zwei solche Seiten, welche nicht in einer gemeinsamen Ecke des Vierecks zuzusammenstossen, heissen gegenüberliegende Seiten oder Gegenseiten. Die Schnittpunkte der Verlängerungen je zweier Gegenseiten heissen Nebenecken (des Vierecks).

Je zwei solcher Ecken, welche nicht auf einer gemeinsamen Viereckseite liegen, heissen gegenüberliegende Ecken oder Gegenecken. Die Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken heissen Nebenseiten oder Diagonalen (des Vierseits). In manchen Fällen wird auch irgend eine Seite eines Vierecks als Grundlinie oder Grundseite bezeichnet, manchmal auch zwei Gegenseiten als Grundseiten.

Man bezeichnet die Eckpunkte eines Vierecks mit grossen lateinischen Buchstaben ($ABCD$) und zwar, wenn nicht ausdrücklich Gründe dagegen vorliegen, in der Weise, dass nach der alphabetischen Reihenfolge der Buchstaben das Viereck in der positiven Umlaufsrichtung, also gegen die Uhrzeigerdrehung umlaufen wird. Dabei setzt man gewöhnlich den ersten Buchstaben an einen in der Richtung nach links und unten gelegenen Eckpunkt.

Die Seiten eines Vierecks bezeichnet man mit kleinen lateinischen Buchstaben ($abcd$), und zwar jede Seite mit dem kleinen Buchstaben derjenigen Ecke, welche bei der positiven Umlaufsrichtung der Anfangspunkt derselben wird. Die Diagonalen bezeichnet man eben-

Figur 104.



Erkl. 260a. Das Viereck in Figur 104 wird nach nebenstehendem bezeichnet als:

Viereck $ABCD$

oder:

Vierseit $abcd$.

Seine Ecken heissen:

Ecke A, Ecke B, Ecke C, Ecke D,

seinen Seitenlinien sind:

Seite a, Seite b, Linie c, Linie d.

Ecke A ist Gegenecke der Ecke C, B von D, C von A, D von B.

Seite a ist Gegenseite der Seite c, b von d, c von a, b von d.

Die Schnittpunkte von a und c, sowie von b und d heissen Nebenecken.

Die Verbindungsgeraden von A und C, sowie von B und D heissen Nebenseiten oder Diagonalen und zwar ist AC Diagonale e, BD heisst Diagonale f.

Erkl. 260b. Das Wort Diagonale kommt von dem griechischen: διά = durch, und τὸ γόνυ oder ὁ γῶνος das Knie, die Ecke, der Winkel; also Diagonale = die durch die Winkel gehende Linie.

Erkl. 261. Im Viereck hat also gegensätzlich zum Dreieck nicht jede Ecke eine Gegenseite und jede Seite eine Gegenecke, sondern jede Ecke eine Gegenecke und jede Seite eine Gegenseite. Auch der Begriff der Höhe des Vierecks bleibt beim allgemeinen Viereck vollständig weg und tritt erst bei besonderen Arten von Vierecken wieder ein, und auch dann nur für einzelne, nicht, wie beim Dreieck, für allgemeine Beziehungen.

Erkl. 262. Die im nebenstehenden angegebenen Anordnungen der Buchstaben eines Vierecks sind nicht unbedingte Erfordernisse

der Geometrie an sich; aber sie bieten eine grosse Menge von Erleichterungen für das Aufsuchen entsprechender Stücke und für viele sonstige Fälle, welche eine feststehende Ordnung in den Bezeichnungen als äusserst wünschenswert erscheinen lassen.

falls mit den kleinen Buchstaben (e und f) und zwar als erste die von der ersten Ecke zur dritten gehende, als zweite die von der zweiten zur vierten Ecke.

Das Viereck als Ganzes wird dann bezeichnet entweder durch Zusammenstellung der vier grossen Buchstaben seiner vier Ecken oder der vier kleinen Buchstaben seiner vier Seiten, jeweils in positiver Umlaufsrichtung mit oder ohne Voranstellung des Wortes „Viereck" oder „Vierseit".

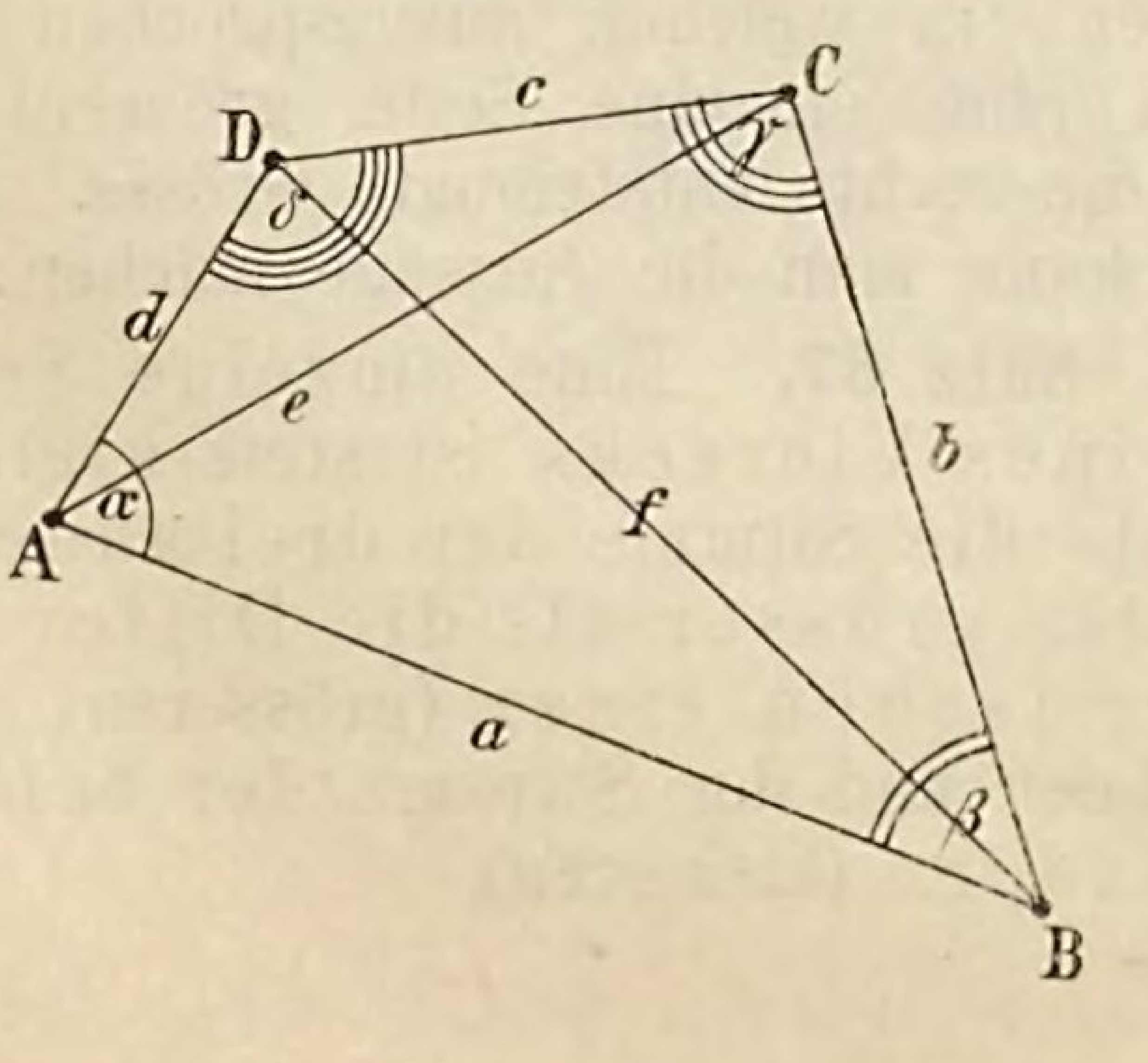
Frage 134. Welche Massgrössen können bei einem Viereck in Betracht kommen, und wie werden diese bezeichnet?

Erkl. 263. Seiten und Winkel eines Vierecks heissen die Bestimmungsstücke des Vierecks; auch für sie bestehen, ähnlich wie nach Erkl. 259 für die Elemente (Punkte und Geraden) des Vierecks, gewisse Beschränkungen, indem nicht alle acht Stücke willkürlich angegeben werden dürfen. Für die Winkel liegt eine Beschränkung schon in dem Lehrsatze von der Winkelsumme von 360°; aber wie durch die Kongruenzsätze für das Dreieck, so lassen sich auch für das Viereck Beziehungen festsetzen zwischen Seiten und Winkeln, auf Grund deren durch fünf willkürlich vorgeschriebene Stücke die Grösse von allen acht Stücken eindeutig festgesetzt ist.

Erkl. 264. An der Figur 105 ist $AB = a$ Gegenseite von $CD = c$, und $BC = b$ Gegenseite von $DA = d$; ferner $\sphericalangle DAB = \alpha$ Gegenwinkel von $\sphericalangle BCD = \gamma$, und $\sphericalangle ABC = \beta$ Gegenwinkel von $\sphericalangle CDA = \delta$.

Es befindet sich also an derselben Ecke des Vierecks vereinigt: Eckpunkt A, Winkel A oder $\sphericalangle \alpha$, und der Anfangspunkt der Seite a.

Figur 105.



Antwort. Bei einem Viereck können dreierlei Massgrössen in Betracht kommen, nämlich:

1) die Längenmasse der auf seinen Geraden durch die Punkte ausgeschnittenen Strecken;

2) die Winkelmasse der von seinen Geraden eingeschlossenen Winkel;

3) die Flächenmasse des von seinen Seiten eingeschlossenen Flächenstückes.

Die auf den Vierecksseiten zwischen je zwei Eckpunkten liegenden Strecken heissen die Seitenstrecken oder kurz Seiten des Vierecks, die auf den Diagonalen durch zwei Gegenecken ausgeschnittenen Strecken heissen selbst Diagonalen. Dieselben werden also mit denselben Namen benannt und daher auch mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie die (unbegrenzte Linien darstellenden) Geraden, auf welchen sie enthalten sind.

Die zwischen je zwei Seitenstrecken des Vierecks eingeschlossenen Winkel heissen die Vieleckswinkel (siehe über dieselben den Abschnitt „Ueber die Winkel der Vielecke" im zweiten Teile dieses Lehrbuches). Dieselben werden bezeichnet entweder durch den grossen lateinischen Buchstaben des Eckpunktes, an welchem der Winkel liegt, oder durch denjenigen kleinen griechischen Buchstaben, dessen gleichbedeutender grosser lateinischer Buch-

stabe die den Scheitel des Winkels bildende Ecke bezeichnet.

Auch bei den Winkeln des Vierecks heissen die beiden die Schenkel eines Winkels bildenden Seiten die anliegenden oder die anstossenden oder die einschliessenden Seiten dieses Winkels; zwei Winkel, die keinen Schenkel gemeinsam haben, heissen Gegenwinkel oder gegenüberliegende Winkel.

Das zwischen den vier Seiten eingeschlossene Flächenstück heisst „Fläche des Vierecks“ (siehe hierüber im fünften Teile dieses Lehrbuches).

Frage 135. Welche Beziehungen lassen sich aufstellen zwischen den Seiten eines Vierecks entsprechend dem Satz 49 für die Dreiecksseiten?

Antwort. Da jede Seite eines Vierecks eine geradlinige Verbindungslinie zweier Ecken, und die übrigen Seiten eine gebrochene Verbindungslinie derselben beiden Ecken bildet, so lässt sich auf Grund des Satzes 50 folgern, dass die Summe dieser drei Seiten grösser sein muss, als die vierte, also:

$$a+b+c>d,\quad b+c+d>a,\quad c+d+a>b,\quad d+a+b>c.$$

Erkl. 265. Durch Subtraktion von je zweien der Seiten erhält man aus den nebenstehend angeschriebenen vier Ungleichungen die folgenden:

$a>d-(b+c)$		$a>b-(c+d)$	$a>c-(d+b)$
$b>d-(a+c)$	$b>a-(c+d)$		$b>c-(a+d)$
$c>d-(a+b)$	$c>a-(b+d)$	$c>b-(a+d)$	
....	$d>a-(b+c)$	$d>b-(a+c)$	$d>c-(a+b)$

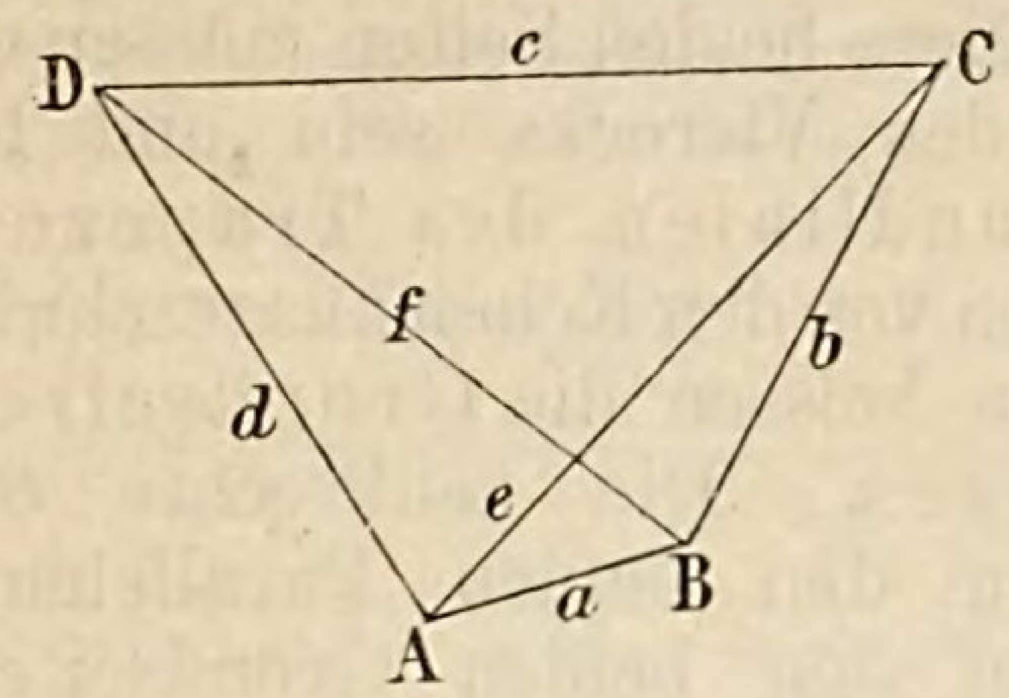
Indem man ferner auf beiden Seiten einer jeden dieser Ungleichungen zwei Seiten subtrahiert, erhält man Ungleichheiten, in welchen ausgesprochen ist, dass eine einzelne Seite grösser sei, als die rechts entstehende Grösse. Daher kann man die Aussage machen:

Satz 67. Eine einzelne Seite eines Vierecks ist stets kleiner als die Summe der drei andern, aber grösser als die Differenz zwischen einer (grösseren) von ihnen und der Summe der beiden andern (kleineren).

Erkl. 266. Sind also willkürlich gegeben als die drei ersten Seiten eines Vierecks die Längen 3, 5, 12, so darf die vierte Seite nur ausgewählt werden zwischen den Zahlen $3+5+12=20$ und $12-(3+5)=4$, muss also über 4 und unter 20 liegen. Oder zu den Seiten 15, 21, 47 müsste eine vierte Seite zwischen 11 und 83 ausgewählt werden. Der Ansatz der Differenz für andere Minuenden als die grösste Seite hat selbstverständlich keinen Sinn, da jede Seite stets grösser als Null ist.

Frage 136. Welche Längenbeziehungen bestehen zwischen den Diagonalen und Seiten eines Vierecks?

Figur 106.



Erkl. 267. Die Summe der vier Seitenstrecken eines Vierecks heisst der Umfang dieses Vierecks, also:

$$u = a + b + c + d.$$

Erkl. 268. Die Anwendung des zweiten Teiles von Satz 49 auf die Dreiecke ABC, BCD, CDA, DAB liefert nichts neues, sondern nur, dass die Diagonalensumme grösser sein muss als die Differenz zwischen der grössten und kleinsten Dreiecksseite.

Von den einzelnen Diagonalen aber lässt sich nach dem ersten Abschnitt der nebenstehenden Antwort die Aussage machen:

Satz 68a. Jede Diagonale eines Vierecks ist kleiner als der halbe Umfang des Vierecks.

Erkl. 269. Da im Viereck die Beziehung einer Seite zu einer Gegenseite oder einem Gegenwinkel, wie im Dreieck, nicht besteht, so lassen sich Untersuchungen nach Art der Antworten auf Frage 72 u. ff. nicht anstellen. Es ergeben sich also keine Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln oder Höhen des allgemeinen Vierecks. Für die besonderen Fälle des Vierecks sind diese Beziehungen an den geeigneten Stellen aufgeführt.

Antwort. 1) Da jede Diagonale das Viereck in zwei Dreiecke zerteilt, nämlich ABC und CDA bezw. ABD und BCD, so lässt sich Satz 49 anwenden auf jede Diagonale und zwei Seiten, also:

$$e < a + b \quad \text{und} \quad e < c + d$$

sowie:

$$f < a + d \quad \text{und} \quad f < b + c.$$

Durch Addition von je zwei nebeneinanderstehenden dieser vier Ungleichheiten entsteht:

$$2e < a + b + c + d$$

und auch

$$2f < 2a + b + c + d,$$

also durch Halbierung:

$$e < \frac{a + b + c + d}{2},$$

$$f < \frac{a + b + c + d}{2};$$

und wieder durch Addition:

$$e + f < a + b + c + d.$$

2) Da ferner jede Seite mit zwei Abschnitten einer Diagonale ein Dreieck bildet, nämlich ABO, BCO, CDO und DAO, so lässt sich Satz 49 auch auf diese Dreiecke anwenden und liefert:

$$AO + OB > a, \quad BO + OC > b$$
$$CO + OD > c, \quad DO + OA > d$$

Durch Addition von je zwei untereinanderstehenden dieser Ungleichungen entsteht:

$$AO + OC + BO + OD > a + c,$$
$$AO + OC + BO + OD > b + d,$$

also:

$$e + f > a + c \quad \text{und} \quad e + f > b + d$$

und durch Addition von diesen beiden oder von allen vier vorigen:

$$2e + 2f > a + b + c + d,$$

also:

$$e + f > \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Also kann man die Aussage machen:

Satz 68. In einem Viereck ist die Summe der Diagonalen:

1) grösser als der halbe und kleiner als der ganze Umfang,

2) grösser als die Summe je zweier Gegenseiten.

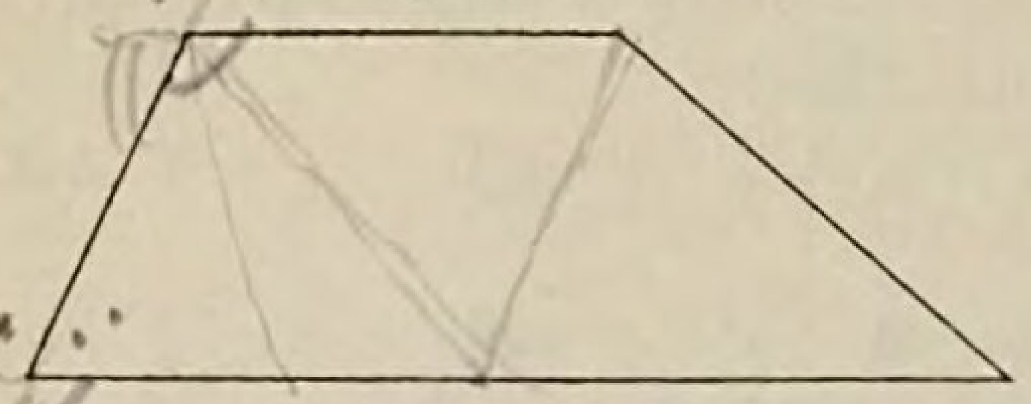
b) Ueber die besonderen Vierecke.

α) Ueber das Trapez und seine Anwendungen.

Frage 137. Was ist ein Trapez?

Antwort. Ein Trapez oder Paralleltrapez ist ein Viereck, von dessen vier Seiten zwei zu einander parallel sind. Diese beiden Seiten müssen Gegenseiten des Vierecks sein und heissen die Grundlinien des Trapezes; die auf ihnen von den Ecken ausgeschnittenen Strecken heissen die Grundseiten des Trapezes. Die senkrechte Strecke zwischen den beiden Parallelen oder zwischen den beiden Grundseiten des Trapezes heisst die Höhe des Trapezes. Das Trapez hat also zwei parallele Seiten, die Grundseiten, und zwei nicht parallele Seiten, welche auch die Schenkel des Trapezes genannt werden.

Figur 107.



Erkl. 270. Im Gegensatz zum Trapez und allen mit besonderen Eigenschaften ausgestatteten „besonderen Vierecken“ heisst das im Vorhergehenden betrachtete Viereck ohne besondere Eigenschaften auch „allgemeines Viereck“ oder Trapezoid. Das im Nebenstehenden beschriebene Trapez selbst wieder im Gegensatz zu dem im folgenden Abschnitt betrachteten besonderen Viereck heisst auch „allgemeines Trapez“.

Frage 138. Welche Aussagen kann man wegen der Parallelität zweier Gegenseiten des Trapezes über seine Winkel machen?

Antwort. Da im Paralleltrapez die nicht parallelen Seiten als Transversalen der parallelen Seiten betrachtet werden können, so sind die an den nicht parallelen Seiten gelegenen Winkel des Trapezes ihrer Lage nach sogenannte entgegengesetzte Winkel oder Ergänzungswinkel an Parallelen, und sind daher supplementär nach Lehrsatz 25 des zweiten Teiles dieses Lehrbuches. Daher kann man aussagen:

Satz 69. In jedem Trapez ist die Summe je zweier an einer der nicht parallelen Seiten liegenden Winkel gleich gross, nämlich gleich 2 Rechten oder 180^0.

Erkl. 271. Das Wort Trapez, griechisch τραπέζιον, kommt von τράπεζα der Tisch, wahrscheinlich wegen der ähnlich gestalteten schiefen Fussgestelle eines Tisches.

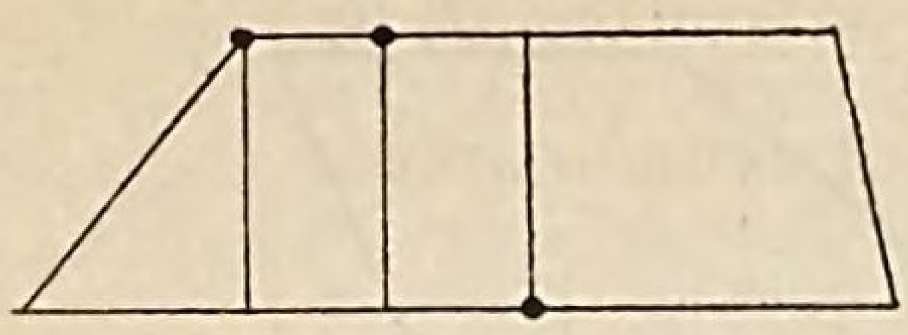
Erkl. 272. Während im allgemeinen Viereck die Winkelsumme von 360^0 sich beliebig auf die vier Winkel verteilen darf, gilt dies beim Trapez nur jeweils von der Verteilung der Hälfte. Die ersten 180^0 müssen an der einen, die andern 180^0 an der andern der nicht parallelen Seiten liegen.

Sind daher im Trapez zwei Winkel an **einer** Grundseite bekannt, so sind dadurch auch die beiden an der andern bestimmt, also sind die vier Winkel des Trapezes durch zwei unabhängige unter ihnen sämtlich bestimmt.

Frage 139. Was folgt aus den Sätzen 52 und 18 für die einzelnen Punkte der parallelen Gegenseiten?

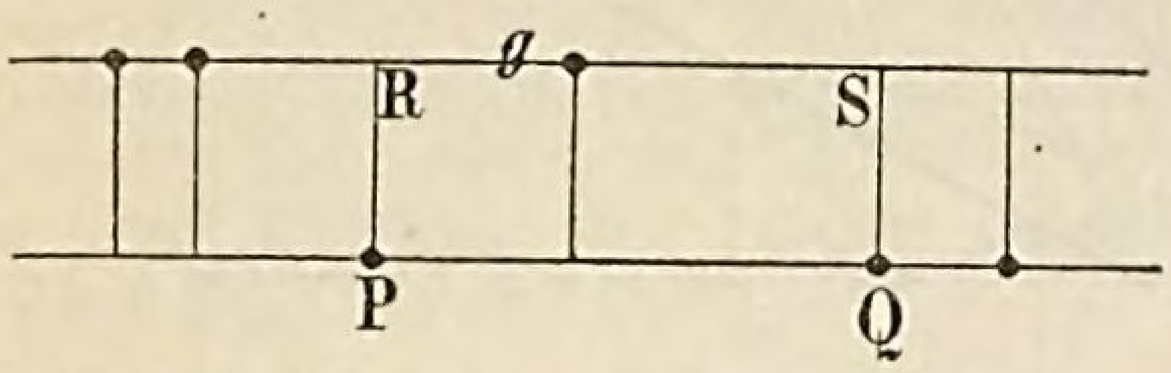
Antwort. Da nach Satz 52 die Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade den Abstand des Punktes von der Geraden angibt, so kann

Figur 108.



Erkl. 273. Da die Abstände jedes Punktes einer Grundseite von der andern Grundseite alle die gleiche Länge haben, wird eben diese Länge als der Abstand der beiden Parallelen selber bezeichnet und deshalb als Höhe des Trapezes benannt.

Figur 109.



Erkl. 274. Die Richtigkeit der in Satz 70b ausgesprochenen Umkehrung des Satzes 70a wird ebenso bewiesen, wie Satz 18 selbst. Wenn nämlich die senkrechten Abstände zweier Punkte P und Q von der Geraden g einander gleich sind, so müssen diese beiden gleichen Strecken nach Satz 16 symmetrische Strecken sein in Bezug auf die Mittelparallele zu den Geraden PR und QS; folglich sind die Punkte P und Q, sowie R und S symmetrische Punkte, und ihre Verbindungsgeraden PQ und RS sind beide sich selbst entsprechende Geraden, also nach Satz 8 beide senkrecht zur Mittelparallelen als Symmetrieachse, daher beide zu einander parallel.

man im Trapez den Abstand eines Punktes einer Grundseite von der andern Grundseite erhalten durch eine Senkrechte von diesem Punkt auf die Gegenseite. Nach Satz 18 sind aber alle senkrechten Strecken zwischen zwei parallelen Geraden gleichlang, also muss jede senkrechte Strecke zwischen den Gegenseiten eines Trapezes gleiche Länge haben; und man erhält den Satz:

Satz 70. Im Trapez ist der Abstand jedes Punktes auf einer der beiden Grundseiten von der andern Grundseite gleichlang, nämlich gleich der Höhe des Trapezes.

Oder allgemeiner ausgesprochen:

Satz 70a. Jeder Punkt auf einer von zwei parallelen Geraden hat dieselbe Entfernung von der andern Parallelen; die Länge dieser gemeinschaftlichen Entfernung heisst der Abstand der beiden Parallelen von einander.

Und umgekehrt kann man sagen:

Satz 70b. Alle Punkte, welche von einer Geraden nach derselben Seite denselben Abstand haben, liegen auf einer in diesem Abstand zur Geraden gezogenen Parallelen.

Frage 140. Welche Folgerung liefert der vorige Satz für die vier Dreiecke, in welche das Trapez durch die Diagonalen zerlegt wird?

Erkl. 275. Von den Fusspunkten der vier Höhen fallen, wie aus Figur 107 bis 111 ersichtlich ist, meistens zwei innerhalb und zwei ausserhalb des Trapezes, bei der Gestalt Figur 110, IV aber alle vier ausserhalb des Trapezes.

Erkl. 276. Eine wichtige Anwendung dieser Gleichheit der Höhen der durch die Diagonalen gebildeten Dreiecke findet statt bei der Bestimmung des Flächeninhalts des Trapezes. Siehe darüber den über Flächen handelnden fünften Teil dieses Lehrbuches.

Antwort. Die vier Dreiecke, welche in dem Trapez durch die Diagonalen gebildet werden, sind die Dreiecke:

ABC, ABD; ACD und BCD.

Wählt man in diesen als Grundseiten die beiden parallelen Geraden, nämlich:

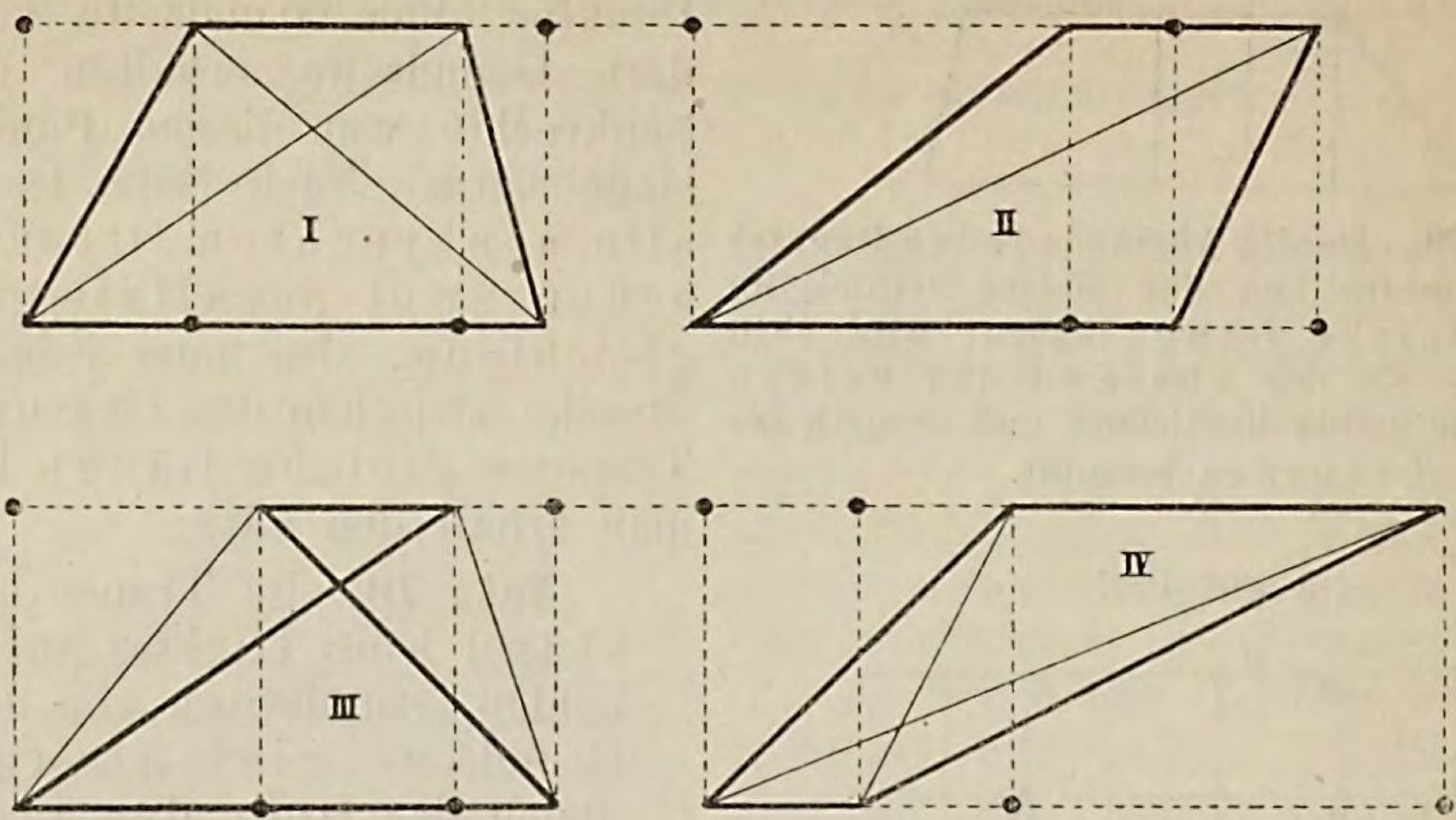
AB, AB; CD, CD,

so ergeben sich als Spitzen die vier Punkte:

C, D; A, B,

und daher als Höhen die senkrechten Abstände eines jeden dieser Punkte von der Gegenseite. Da also nach Satz 18

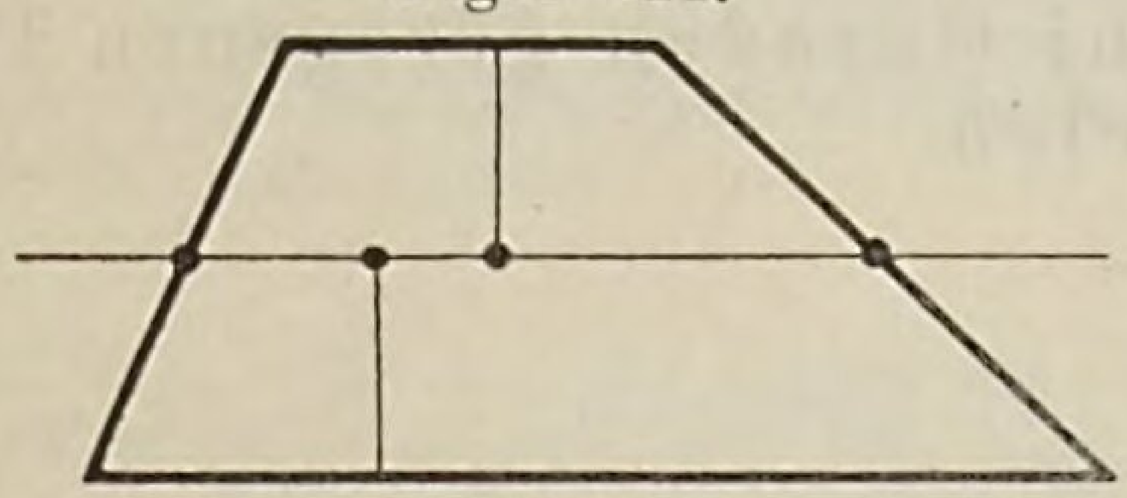
Figur 110.



diese vier Abstände alle gleich sind, so findet man, dass die vier Dreiecke, welche durch die Diagonalen und die Trapezseiten gebildet werden, alle die gleiche Höhe unter sich und mit dem ganzen Trapez haben.

Frage 141. Welche Gerade muss nach den Sätzen 16 und 31 für das Trapez wichtig sein ausser den Seiten und Diagonalen?

Figur 111.



Erkl. 277. Beim Umklappen um die Mittelparallele des Trapezes fallen die Grundlinien als unbegrenzte Geraden aufeinander, nicht aber die Grundseiten als Strecken. Vielmehr wird von diesen die kürzere entweder ganz innerhalb der längeren zu liegen kommen (Figur 110, I und III) oder teilweise dieselbe bedecken, zum andern Teil ausserhalb derselben fallen (Figur 110, II), oder ganz ausserhalb bleiben (Figur 110, IV).

Antwort. Ausser Seiten und Diagonalen ist für das Trapez von Wichtigkeit die Mittelparallele seiner parallelen Seiten. Denn auf Grund der in der Frage 141 genannten Sätze müssen 1) beim Umklappen um diese Mittelparallele die Grundlinien des Trapezes zur Deckung gelangen. Ferner müssen 2) auf der Mittelparallelen die Mittelpunkte der andern Transversalen, also der nicht parallelen Seiten und Diagonalen liegen. Da aus demselben Grunde durch die Mittelparallele auch alle senkrechten Transversalen halbiert werden, so müssen 3) ihre Punkte selbst alle gleichen Abstand von den beiden Grundlinien haben.

Frage 142. Welche Aussagen über das Trapez im besondern und die Mittelparallele zweier Geraden im allgemeinen lassen sich machen auf Grund der Antwort auf Frage 141, sowie der Sätze 16, 31 und 70?

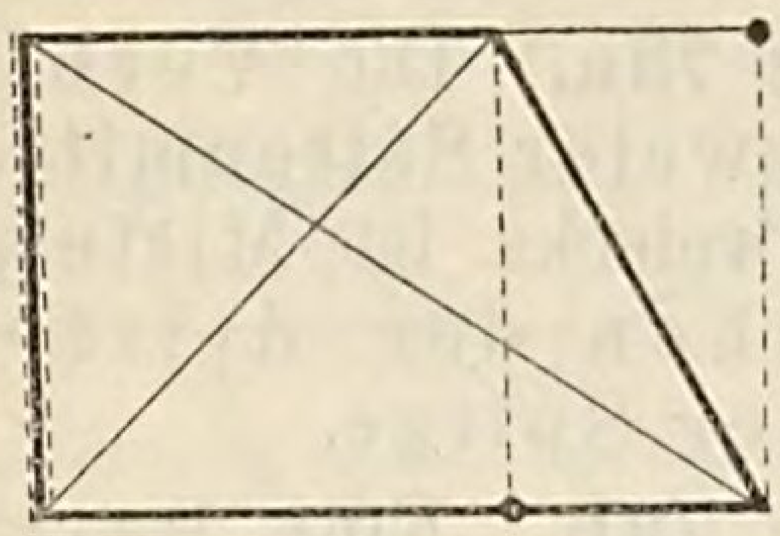
Antwort. Ueber das Trapez lassen sich auf Grund der genannten Ueberlegungen folgende Aussagen machen:

Erkl. 278. Die nebenstehenden Sätze sind die unmittelbaren Uebertragungen der Sätze 31 bis 32 über die zentrische Symmetrie auf das Paralleltrapez, sowie der Sätze 70 über den Abstand zweier Parallelen auf die Mittelparallelen.

Man hat sich dabei wohl zu hüten, den Schnittpunkt der Diagonalen als Symmetriezentrum anzusehen. Denn die Mittelparallele geht keineswegs durch den Diagonalenschnittpunkt, weil dieser nicht der Mittelpunkt der Diagonalen ist.

Erkl. 279. Ist einer der Winkel des Trapezes ein rechter, so muss der an derselben nichtparallelen Seite liegende Winkel nach Satz 69 ebenfalls ein rechter sein. Dann fallen von den vier Höhen in Antwort 140 zwei zusammen mit einer Seite und mit einer der Senkrechten, welche den Abstand der beiden Grundseiten angeben (siehe Figur 112).

Figur 112.



Erkl. 280. Der Abstand der Mittelparallelen zweier Geraden von einer jeden dieser beiden ist wieder derselbe, nämlich die Hälfte des Abstandes beider parallelen Geraden.

Erkl. 281. Der Beweis für die Richtigkeit der Umkehrung im Satze 72a ist genau ebenso zu führen, wie in Erkl. 274 oder 86.

Satz 71. Die Mittelparallele des Trapezes schneidet die beiden nichtparallelen Seiten und die Diagonalen je in ihrem Mittelpunkt.

Satz 71a. Die Verbindungslinie zweier der Mittelpunkte der nichtparallelen Seiten oder der Diagonalen des Trapezes ist die Mittelparallele der Grundlinien.

Satz 71b. Eine Parallele zu den Grundlinien des Trapezes durch die Mitte einer der nichtparallelen Seiten oder Diagonalen trifft auch die andern dieser Strecken im Mittelpunkt und ist Mittelparallele der Grundlinien.

Und über parallele Linien im allgemeinen ergeben sich folgende Anwendungen:

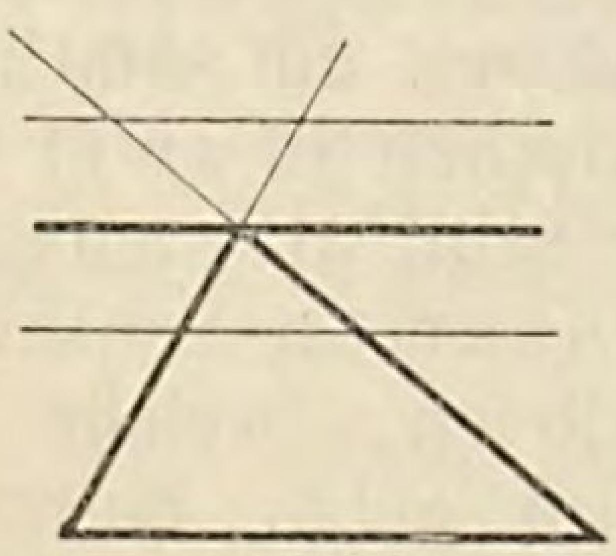
Satz 72. Jeder Punkt auf der Mittelparallelen zweier Parallelen hat von den beiden Parallelen denselben Abstand, nämlich gleich der Hälfte des Abstandes beider Parallelen.

Und mit derselben Umkehrung, wie für Satz 70b:

Satz 72a. Jeder von zwei Parallelen gleichweit entfernte Punkt liegt auf der Mittelparallelen derselben.

Frage 143. Wie kann man sich aus einem Dreieck ein Trapez erzeugt denken?

Figur 113.



Erkl. 282. Statt das Trapez durch Parallelen zu den Seiten eines Dreiecks zu bilden, kann man daher auch sagen, dass das Trapez entstehe, wenn die Schenkel irgend eines Winkels (nämlich des Winkels an der

Antwort. An einem Dreieck wird ein Trapez abgeschnitten oder angesetzt durch jede Parallele zu einer seiner Seiten. Man kann daher das Dreieck selber als eine Grenzfigur eines Trapezes ansehen, wenn man durch seine Spitze eine Parallele zur Grundseite zieht. Dann sind die beiden andern Seiten die „nicht parallelen“ und die Schnitpunkte derselben auf der zweiten Grundlinie sind vollständig zusammengerückt: die Länge der oberen Grundseite ist gleich Null geworden. Lässt man dann diese obere Grundlinie noch weiter nach oben rücken in den Scheitel-

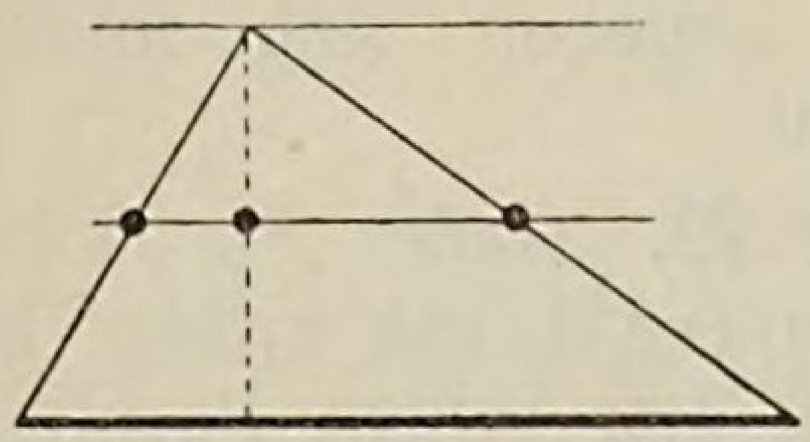
Spitze des Dreiecks) geschnitten werden von zwei Parallelen (nämlich der Grundseite des Dreiecks und einer Parallelen zu ihr).

raum des Dreieckswinkels, so erhält man die Gestalt des überschlagenen Trapezes (siehe Figur 110, III).

Frage 144. Welche Anwendung auf das Dreieck gestatten die Sätze 71 über das Trapez auf Grund der Anschauung in der vorigen Antwort?

Erkl. 283. Wie man durch einen Punkt eine Parallele zu einer Geraden ziehen kann im gleichen Abstand wie dieser Punkt, so kann man auch eine Mittelparallele zwischen einem Punkt und einer Geraden ziehen, nämlich eine Parallele zu dieser Geraden in der halben Entfernung als diejenige des Punktes beträgt.

Figur 114.



Erkl. 284. Statt des Mittelpunktes der beiden Dreiecksseiten kann nach Satz 31 ebensowohl der Mittelpunkt jeder andern durch die Dreiecksspitze gehenden Transversalen gesetzt werden, also insbesondere Mitte der Höhe, aber auch der Mittellinie oder Winkelhalbierenden.

Erkl. 285. Eine Erweiterung erfährt nebenstehender Satz 73 noch durch den Satz 76 in Antwort der Frage 147.

Antwort. Wird das Dreieck in der Art der vorhergehenden Antwort angesehen als ein Trapez, dessen eine (obere) Grundseite zum Punkte, nämlich zur Dreiecksspitze zusammengeschrumpft ist, so ergeben die Sätze 71 folgende Aussagen über das Dreieck:

Satz 73. Die Mittelparallele zwischen Spitze und Grundseite eines Dreiecks trifft beide anderen Seiten im Mittelpunkte.

Satz 73a. Die Verbindungslinie zweier Seitenmittelpunkte eines Dreiecks ist Mittelparallele zwischen der dritten Seite und der Spitze.

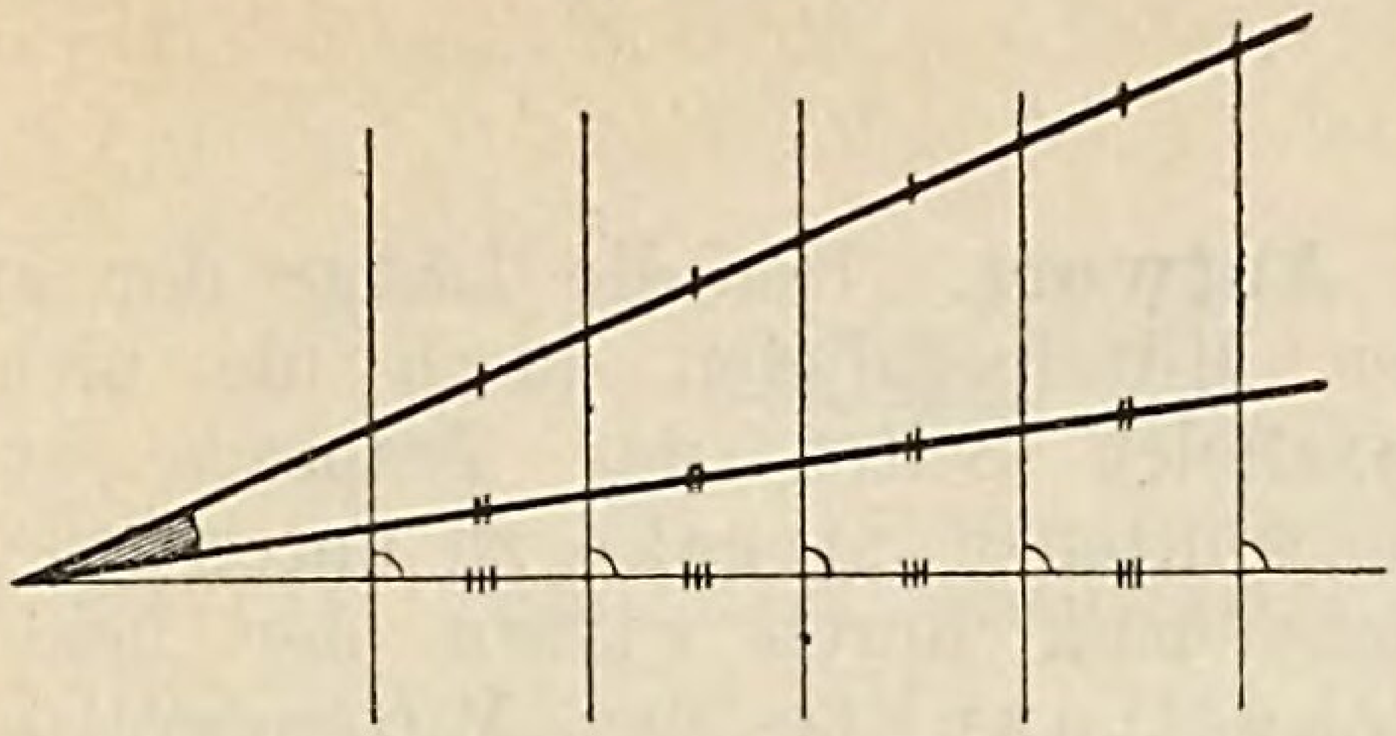
Satz 73b. Eine Parallele zu einer Dreiecksseite durch die Mitte einer zweiten Seite halbiert auch die dritte Seite und ist Mittelparallele zwischen der ersten Seite und ihrer Gegenecke.

Frage 145. Welche Figuren erhält man, wenn die Schenkel eines Winkels nach Erkl. 282 von mehreren Parallelen in gleichen Abständen durchschnitten werden?

Erkl. 286. Um überhaupt mehrere Parallelen in gleichen Abständen zu erhalten, benutzt man meist eine gemeinsame Senkrechte, trägt auf dieser mehrere gleichlange Strecken ab, und zieht durch die Teilpunkte lauter senkrechte Geraden zur ursprünglichen. Diese sind dann alle parallel und haben lauter gleichgrosse senkrechte Abstände zwischen sich.

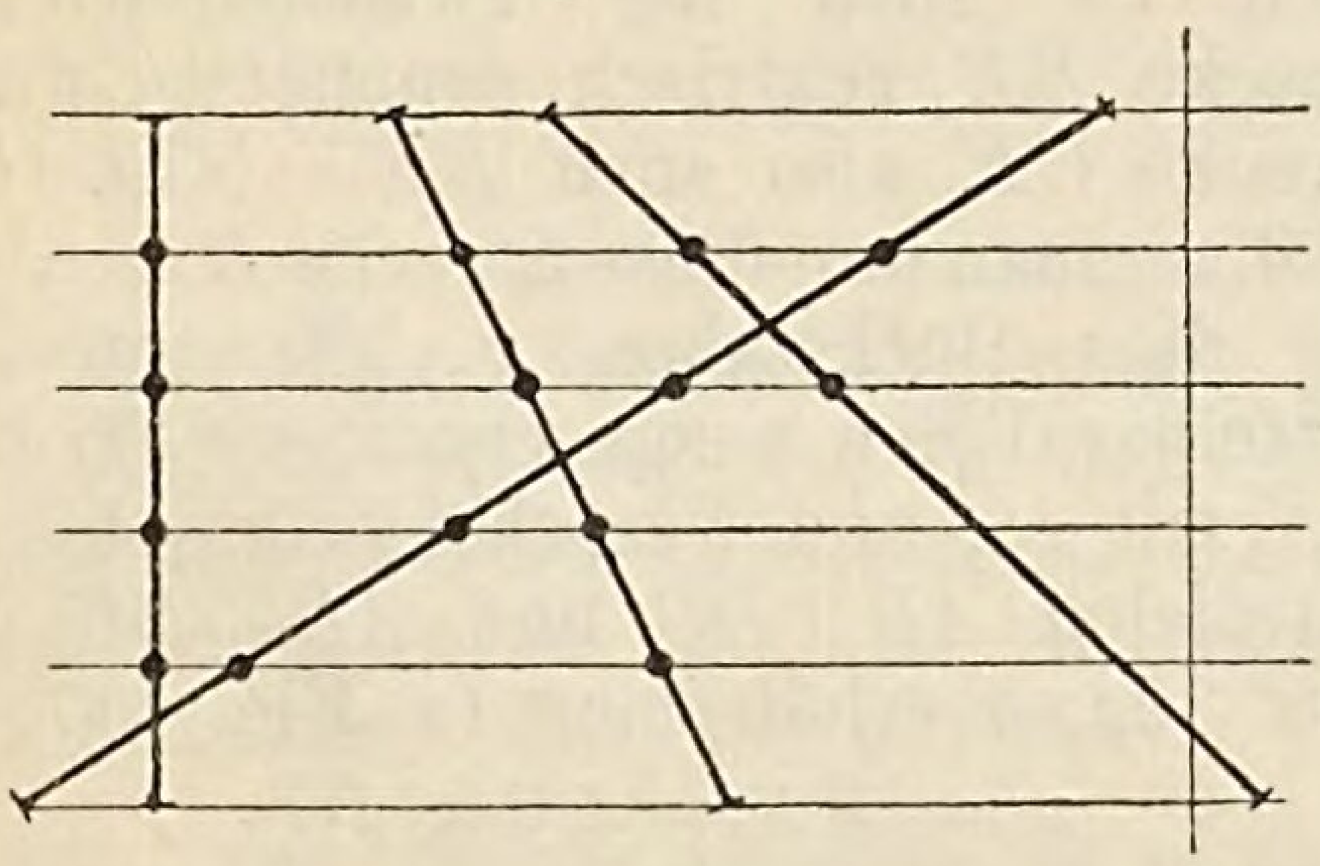
Antwort. Wenn die die Schenkel eines Winkels durchschneidenden Parallelen gleiche Abstände haben sollen, so müssen die sämtlichen Senkrechten zwischen je zwei Parallelen gleichlang sein, also müssen auch auf der gemeinsamen Senkrechten aller dieser Parallelen, welche durch den Winkelscheitel geht, lauter gleiche Stücke ausgeschnitten werden. Alsdann kann man aber jede der Parallelen als Mittelparallele ansehen zwischen der zunächst vorhergehenden und der zunächst folgenden Parallelen,

Figur 115.



Erkl. 287. Durch eine sehr einfache Anwendung der Sätze 32 und 53 lässt sich zeigen, dass auf der senkrechten Transversalen aller Parallelen die ausgeschnittenen Teilstrecken die kürzesten werden, dass aber dieselben desto länger werden, je schiefer die Transversale gelegt wird, also je kleiner ihr Winkel mit (einer, also mit jeglicher von) den Parallelen gemacht wird.

Figur 116.



und erhält deshalb nicht nur auf der senkrechten, sondern auch auf jeder andern schiefen Transversalen, als auf den nichtparallelen Seiten eines Trapezes, gleichgrosse Stücke ausgeschnitten: als Hälften der zwischen der nächst vorhergehenden und der nächstfolgenden Parallelen auf der Transversalen enthaltenen Strecken. Insbesondere gilt dies daher auch vom andern Winkelschenkel und jeder Geraden durch den Winkelscheitel; und man erhält den Satz:

Satz 74. Wenn durch mehrere Parallelen auf einer Geraden gleichlange Stücke ausgeschnitten werden, so sind auch die auf jeder andern Transversalen ausgeschnittenen Strecken sämtlich je untereinander gleich.

Frage 146. Welche praktische Anwendung für die Teilung einer gegebenen Strecke in gleiche Teile gestattet der vorige Satz 74?

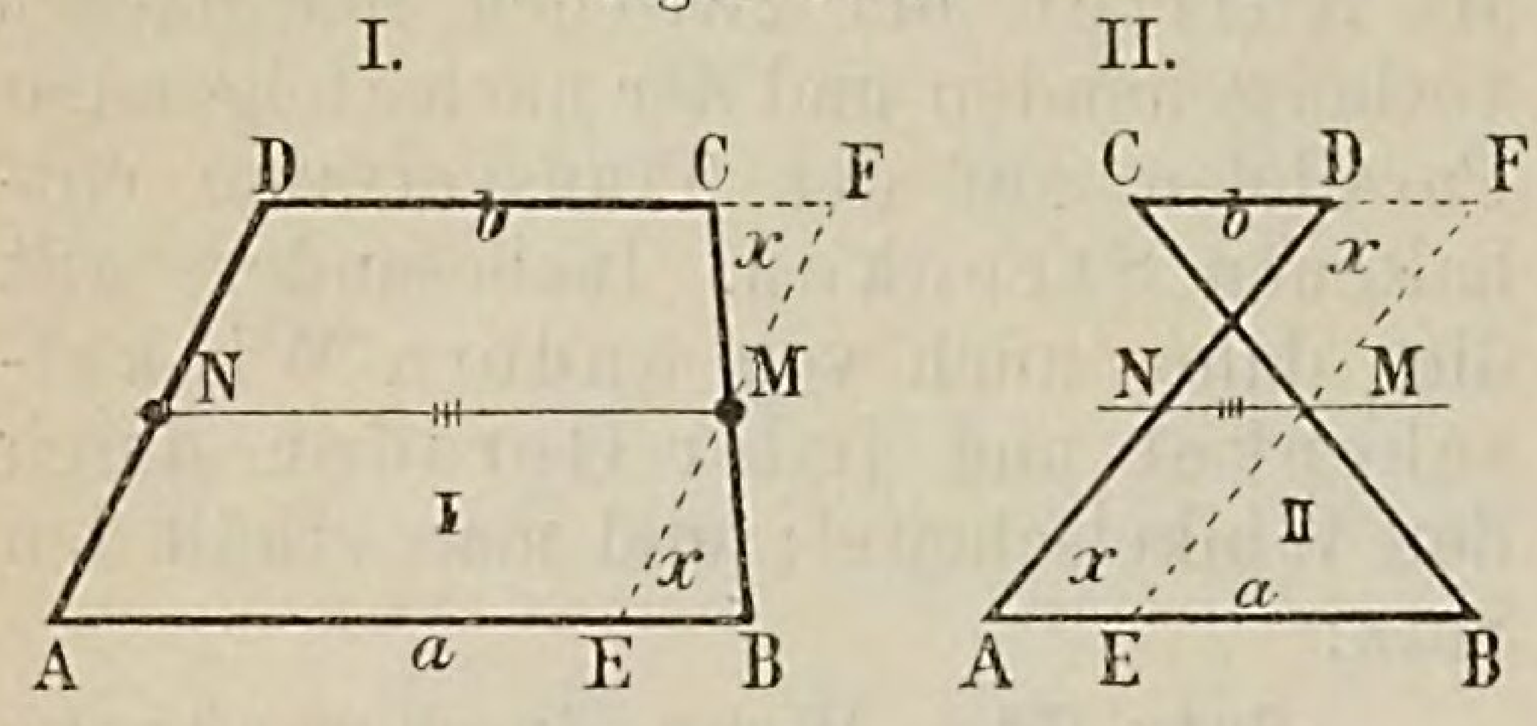
Erkl. 288. Eine Anzahl von beliebig vielen Parallelen in gleichem Abstand liefert jedes mit Linien durchzogene Blatt Schreibpapier, oder ein sogenanntes „Linienblatt“. Um also eine gegebene Länge in n gleiche Teile zu teilen, nehme man dieselbe in den Zirkel, setze in einer Parallelen ein, schneide mit der andern Zirkelspitze die n-te benachbarte und verbinde die beiden Endpunkte. Dann ist jeder Schnittpunkt mit einer der Linien ein Teilpunkt der Strecke in n gleiche Teile.

Erkl. 289. Eine äusserst wichtige Anwendung des Satzes 74 nebst einer unwesentlichen Abänderung der eben behandelten Aufgabe findet statt im sechsten Teile dieses Lehrbuches bei der Lehre von der Aehnlichkeit.

Antwort. Um eine beliebig gegebene Strecke in eine vorgeschriebene Anzahl von n gleichen Teilen zu zerschneiden, zeichnet man etwa nach Angabe der Erkl. 286 oder nach Satz 74 selbst eine Anzahl von $n+1$ Parallelen, welche auf irgend einer Transversalen die verlangte Anzahl von n gleichen Teilen ausschneiden, und legt dann die gegebene Strecke so über diese Parallelen hin, dass ihr einer Endpunkt auf der ersten, ihr anderer auf der letzten Parallelen liegt. Dann ist diese Strecke selbst eine Transversale, auf der ebenfalls n gleiche Stücke ausgeschnitten werden, also hat jedes Stück die Länge von $\frac{1}{n}$ der gegebenen ganzen Strecke.

Frage 147. Wie lange ist die Strecke, welche auf der Mittelparallelen des Trapezes durch die nicht parallelen Seiten ausgeschnitten wird?

Figur 117.



Erkl. 290. Ist das Trapez ein überschlagenes, so kann man es sich nach Antwort der Frage 143 in der Weise aus dem Dreieck entstanden denken, dass die Parallele zur Grundseite in den Scheitelraum des Winkels an der Spitze gerückt ist. Nach Figur 117, II ist auch dann MN Mittelparallele zu AB und CD, also wieder $ME = MF$, $MB = MC$,

$$CF = EB = x,$$

$$m = MN = AE = AB - EB = a - x,$$

aber jetzt anderseits:

$$m = MN = DF = CF - CD = x - b;$$

also durch Addition:

$$2m = a - b,\; m = \frac{a-b}{2}.$$

Beim überschlagenen Trapez ist also die Strecke auf der Mittelparallelen gleich der halben Differenz der parallelen Seiten, oder wenn die Seite b negativ angesetzt wird, wieder halbe Summe.

Erkl. 291. Der Ausdruck $m = \frac{a+b}{2}$ macht seine verschiedenen Werte in stetigem Uebergang durch. Lässt man nämlich die das Trapez erzeugende Parallele zur Grundseite des Dreiecks allmählich zur Spitze aufrücken und durch sie hindurch in den Scheitelraum, so beobachtet man, wie Eckpunkt C des Trapezes dem Punkte D erst immer näher rückt, in der Dreiecksspitze mit ihm zusammenfällt, und im Scheitelraum nach der entgegengesetzten Seite über ihn hinausrückt, so dass die Verbindungsstrecke b der Punkte CD erst positiv ist, abnimmt bis zu 0, dann ins Negative eintritt, und stets nach abwärts weiterwächst. Dementsprechend wird im Ausdrucke $m = \frac{a+b}{2}$ das Glied b erst positiv sein, also $m = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} > \frac{a}{2}$, sodann wird b gleich 0, also $m = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$; und endlich wird b sogar negativ, also $m = \frac{a-b}{2} < \frac{a}{2}$.

Antwort. Um die Länge der auf der Mittelparallelen durch die nichtparallelen Seiten des Trapezes ausgeschnittenen Strecke zu untersuchen, ziehe man durch einen der beiden Schnittpunkte der Mittelparallelen mit einer Seite eine Parallele zur andern nichtparallelen Seite. Dann werden auch auf dieser Transversalen durch den Schnittpunkt gleiche Hälften gebildet, so dass nach Satz 23 sowohl die Punkte B und C, als auch die Schnittpunkte E und F der Parallelen zu AD in Bezug auf den Punkt M zentrisch symmetrisch sind. Demnach ist auch die zwischenliegende Strecke BE zentrisch symmetrisch zur Strecke CF, also auch $BE = CF$. Bezeichnet man nun diese Strecke $BE = CF$ mit dem Buchstaben x, die auf der Mittelparallelen ausgeschnittene Strecke MN mit m, und berücksichtigt für die Parallelen $AB \parallel DC$ und $AD \parallel EF$ den Satz 32, so erhält man (s. Fig. 117, I):

$$m = MN = AE = DF.$$

Nun ist aber:

$$AE = AB - EB = a - x$$

und

$$DF = DC + CF = b + x,$$

folglich:

$$m = a - x$$
$$m = b + x.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen entsteht:

$$2m = a + b - x + x = a + b,$$

also:

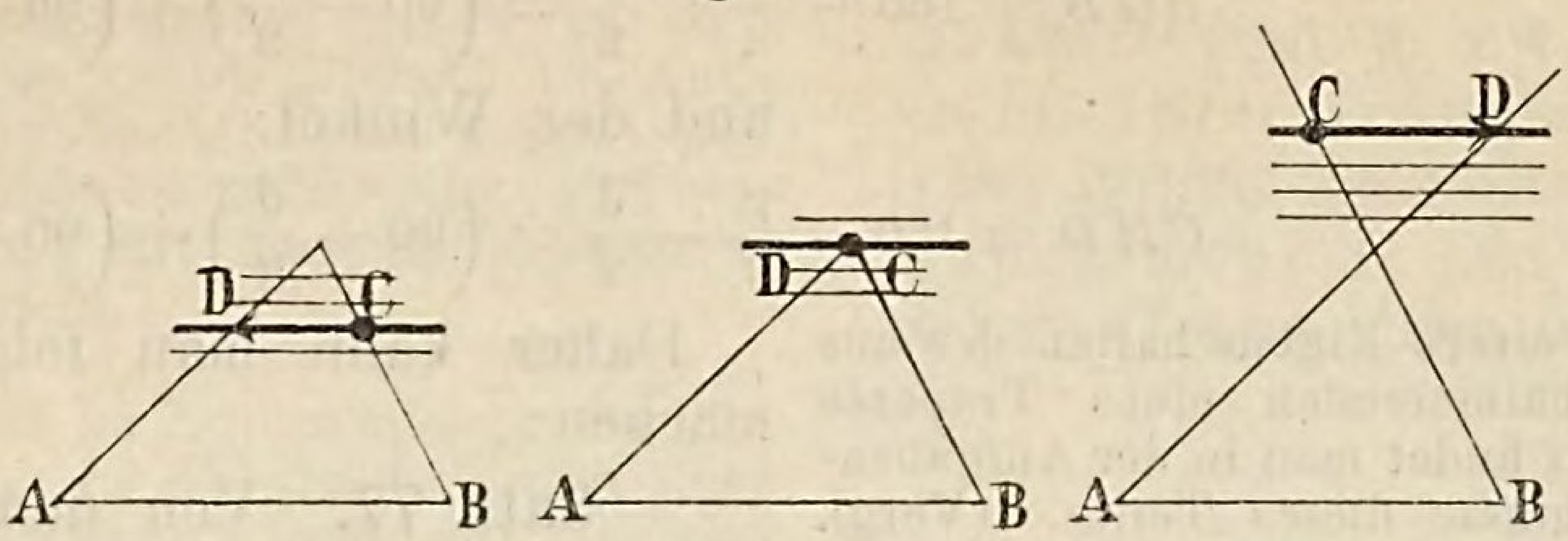
$$m = \frac{a+b}{2},$$

oder in Worten:

Satz 75. Die auf der Mittelparallelen des Trapezes durch die nichtparallelen Seiten ausgeschnittene Strecke ist gleich der halben Summe der beiden Grundseiten.

Dass dieser Satz auch für die überschlagene Form des Trapezes gilt, wenn man die kürzere Seite negativ ansetzt wegen ihrer gegen vorher entgegen-

Figur 118.



Den Uebergang fürs Dreieck kann man also an beide Gebiete anschliessen mit Schreibung des Doppelzeichens $m = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$.

Erkl. 292. Dieser Satz 76 ist eine Erweiterung zum Satz 73 in Antwort der Frage 144 und ist stets mit jenem zusammenzufassen.

gesetzten Richtung, ist aus Erkl. 290 zu ersehen.

Für das als Grenzfigur des Trapezes zu betrachtende Dreieck wird die an der Dreiecksspitze liegende Trapezseite Null, so dass derselbe Satz fürs Dreieck lautet:

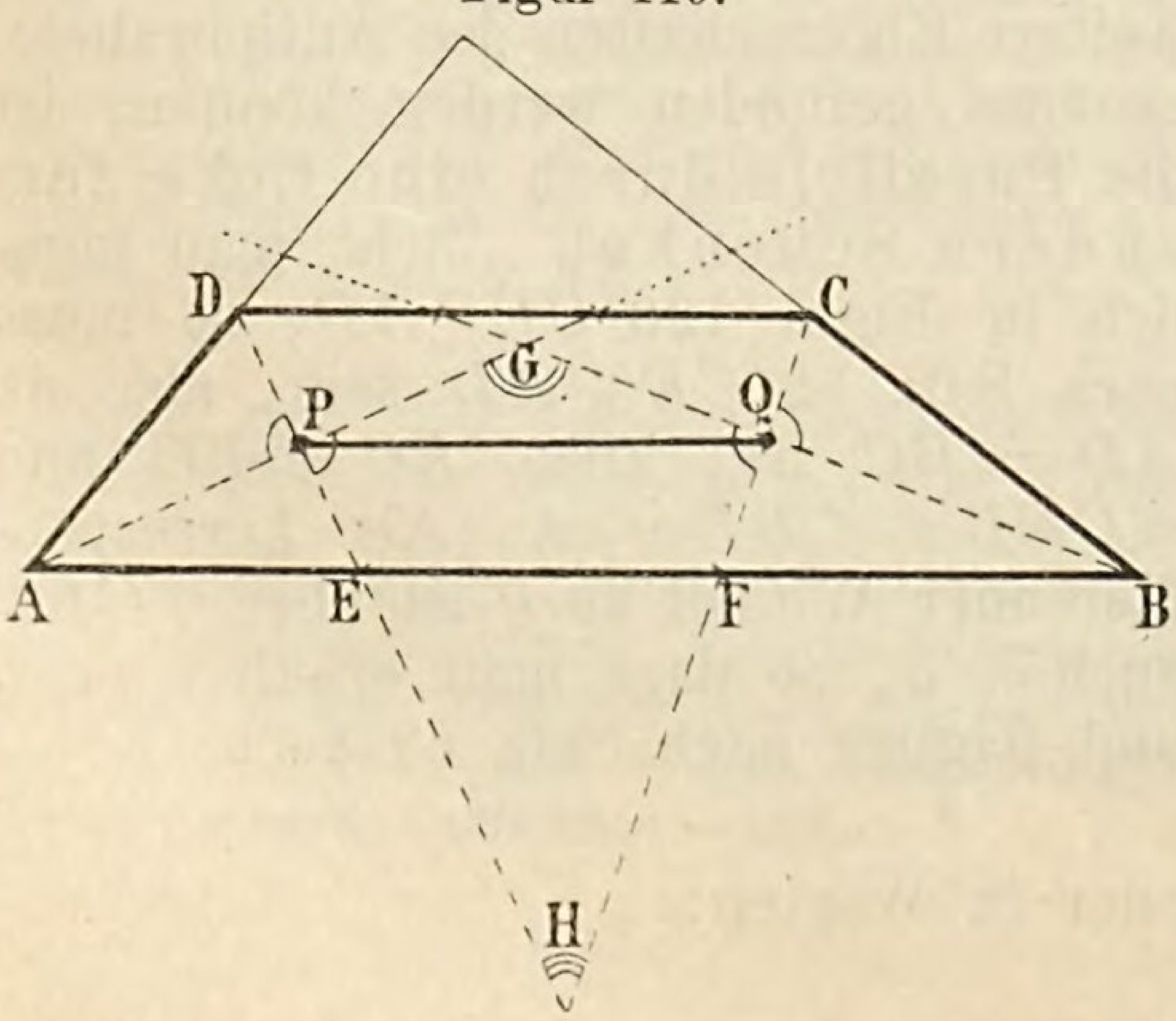
Satz 76. Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist gleich der Hälfte der dritten Seite und (nach Satz 73 auch) parallel der dritten Seite.

Frage 148. Welche Ergebnisse liefert die Anwendung der in den Aufgaben 135 und 136 des zweiten Teiles enthaltenen Sätze auf die Winkelhalbierenden des Trapezes?

Erkl. 293. In den Aufgaben 135 und 136 des zweiten Teiles dieses Lehrbuches werden die beiden Sätze bewiesen:

> Die Winkelhalbierenden entgegengesetzter Winkel an einer durch zwei Parallelen durchschnittenen Transversalen stehen senkrecht aufeinander; und die Winkelhalbierende eines Winkels an einer durch zwei Parallelen gehenden Transversalen bildet mit der zweiten Parallelen den gleichen Winkel wie mit der ersten.

Figur 119.



Antwort. Zieht man in einem Trapez die vier Halbierungslinien der Innenwinkel α, β, γ, δ, so folgt aus den nebenstehend erwähnten Sätzen, sowie aus Satz 69 zunächst, dass im $\triangle APD$ der

$$\sphericalangle APD = 180^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2} = 180^0 - 90^0 = 90^0,$$

und im $\triangle BQC$ der

$$\sphericalangle BQC = 180^0 - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^0 - 90^0 = 90^0.$$

Ferner ergibt sich im

$$\triangle APE \text{ der } \sphericalangle AEP = 90 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\delta}{2},$$

also $AE = AD$, und im

$$\triangle BQF \text{ der } \sphericalangle BFQ = 90 - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2},$$

also $BF = BC$. Es sind also sowohl ADE wie BCF gleichschenklige Dreiecke, und in diesen AP und BQ die Winkelhalbierenden an der Spitze und Senkrechten zur Grundseite, also P und Q die Mittelpunkte von DE bezw. CF, folglich PQ Mittelparallele. Ferner ist der Winkel:

$$AGB = 180 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \left(90 - \frac{\beta}{2}\right) + \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma + \delta}{2},$$

und der Winkel:

$$CHD = 180 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} = \left(90 - \frac{\delta}{2}\right) + \left(90 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Daher kann man folgende Aussage machen:

Satz 77. Von den zwischen den Parallelen liegenden Strecken der Winkelhalbierenden an einer der Schenkelseiten des Trapezes ist jede die Mittelsenkrechte der andern; der Schnittpunkt liegt auf der Mittelparallelen. — Der Schnittwinkel der Winkelhalbierenden an einer Grundseite ist die halbe Summe der Winkel an der andern Grundseite.

Erkl. 294. Weitere Eigenschaften des aus den vier Winkelhalbierenden eines Trapezes gebildeten Vierseits findet man in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles. (Vergl. auch die Antwort der Frage 189.)

β) Ueber die achsig-symmetrischen Vierecke.

β^1) Ueber das Antiparallelogramm.

Frage 149. Was ist ein Antiparallelogramm?

Antwort. Ein Antiparallelogramm oder ein gerades Trapez oder ein gleichschenkliges Trapez ist ein solches Trapez, in welchem die beiden nichtparallelen Gegenseiten, die sogenannten Schenkel, einander gleich, aber nicht parallel sind.

Die Bezeichnung der Grundseite und Höhe ist dieselbe wie beim allgemeinen Paralleltrapez (siehe Antwort auf Frage 137).

Erkl. 295. Der Name Antiparallelogramm rührt daher, dass in dieser Figur je zwei Gegenseiten zu den beiden andern Gegenseiten antiparallel sind (siehe Erkl. 297), und bedeutet „gegensätzlich“ zur parallelen Lage (von anti = ἀντί = gegen).

Erkl. 296. Würden die Schenkel auch zu einander parallel, so entstünde statt des Antiparallelogramms ein Parallelogramm [siehe Abschnitt C 2, b γ].

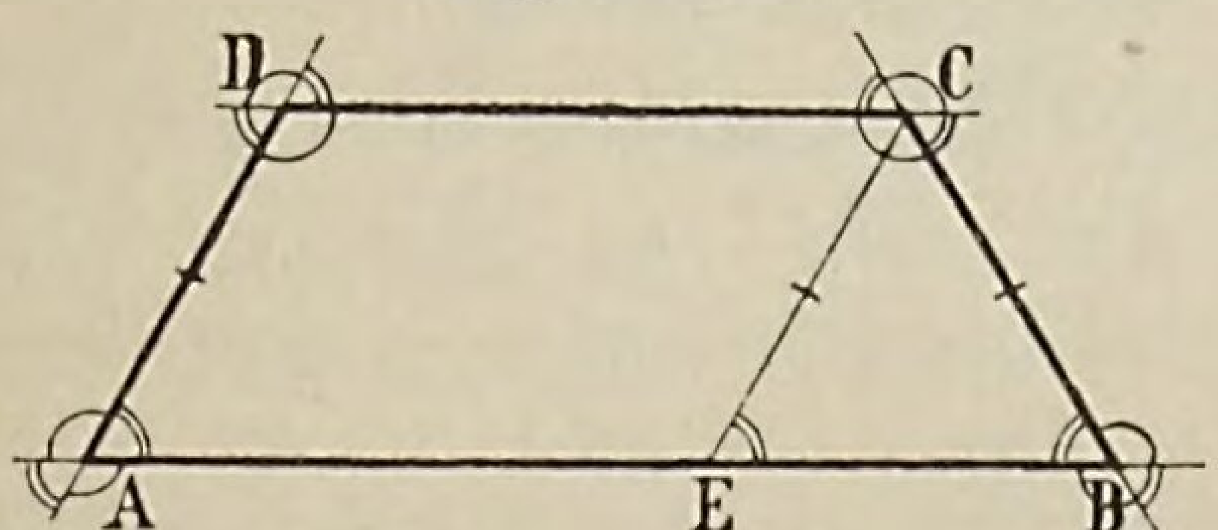
Frage 150. Welche Linie ist für die Untersuchung der Winkel des Antiparallelogramms zu benutzen?

Antwort. Die Linie, durch welche weitere Eigenschaften des Antiparallelogramms gefunden werden können, ist die Parallele durch eine Ecke zum andern Schenkel. Zieht man nämlich in Figur 120 $CE \parallel AD$, so muss nach Satz 32 $CE \# AD$ sein, also da $AD = BC$ ist, auch $EC = BC$ und $\sphericalangle CEB = CBE = \beta$. Als korrespondierender Winkel zu α ist aber $\sphericalangle CEB$ auch $= \alpha$, so dass man erhält $\alpha = \beta$, und folglich nach Satz 69 auch:

$$\delta = 180 - \alpha = 180 - \beta = \gamma$$

oder in Worten:

Figur 120.



Erkl. 297. Zwei Gerade wie AD und CB heissen mit einander antiparallel zu zwei andern Geraden AB und CD, wenn der Winkel zwischen einer der beiden ersten

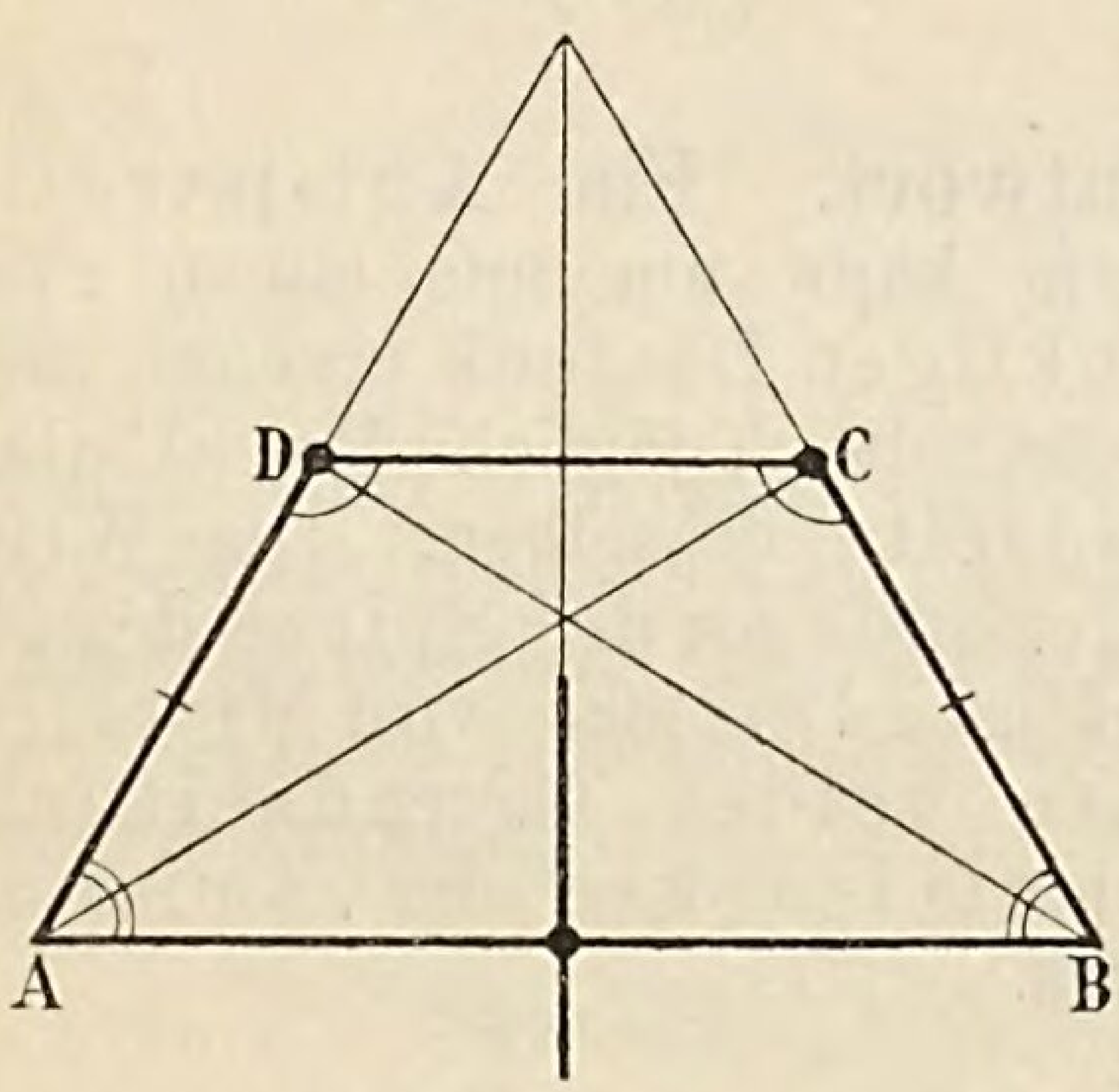
und einer der beiden zweiten Linien in umgekehrtem Drehungssinne gleich ist dem Winkel der beiden andern Linien. Im Antiparallelogramm, wo die vier Linien nur zweierlei verschiedene Winkelgrössen aufweisen, sind also je zwei Gegenseiten mit einander antiparallel zu den beiden andern.

Erkl. 298. Ist im Antiparallelogramm ein Winkel gegeben, so sind dadurch auch seine beiden benachbarten bestimmt; also sind im Antiparallelogramm alle vier Winkel durch einen einzigen unabhängigen unter ihnen bestimmt.

Satz 78. Im Antiparallelogramm sind je zwei Winkel an derselben Grundseite gleich, je zwei Winkel am gleichen Schenkel supplementär, und je zwei Gegenwinkel supplementär.

Frage 151. Welche Eigenschaften des Antiparallelogramms ergeben sich, wenn man die Endpunkte einer Grundseite durch Umklappung zur Deckung bringt?

Figur 121.



Erkl. 299. Für die Diagonalen des Antiparallelogramms tritt der Fall ein, dass die Verbindungsstrecken auch zweier solchen Punkte symmetrisch gleich sind, von denen der eine diesseits, der andere jenseits der Achse liegt. Denn da beim Umklappen der ganzen Ebene Punkt A von diesseits nach jenseits auf B, und Punkt C von jenseits nach diesseits auf Punkt D zu liegen kommt, so muss auch die Gerade von A nach C wieder erscheinen als Gerade von B nach D, also wird Strecke AC symmetrisch gleich BD.

Erkl. 300. Das Antiparallelogramm heisst als Ganzes eine achsig-symmetrische Figur, weil beim Umklappen um die Symmetrieachse jeder Punkt desselben wieder nur auf einen Punkt desselben Antiparallelogramms und jede Gerade desselben auch wieder nur auf eine Gerade desselben Antiparallelogramms zu liegen kommt.

Antwort. Um zwei Punkte, etwa A und B, durch Umklappung zur Deckung zu bringen, muss man als Symmetrieachse die Mittelsenkrechte dieser Grundseite AB wählen. Dann kommen zur Deckung die Punkte A und B, die gleichen Winkel α und β, also auch die Schenkel AD und BC, und zwar nicht nur ihrer Richtung nach, sondern wegen ihrer gleichen Länge auch der Grösse nach. Also sind auch die Punkte C und D symmetrisch, CD wird eine sich selbst symmetrische Strecke, und wird daher von der Symmetrieachse senkrecht halbiert.

Daher lassen sich auf die Punkte, Seiten und Diagonalen des Antiparallelogramms alle Sätze über symmetrische Punkte und Geraden, ihre Verbindungsgeraden und Schnittpunkte anwenden, und man erhält folgende Aussagen:

Satz 79. Im Antiparallelogramm ist:

1) die Mittelsenkrechte der einen Grundseite zugleich Mittelsenkrechte der andern, oder

2) die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundseiten Mittelsenkrechte beider Grundseiten, oder

3) die Senkrechte auf eine Grundseite vom Mittelpunkt der zweiten zugleich Mittelsenkrechte beider Grundseiten.

Satz 79a. Das Antiparallelogramm ist eine achsig-symmetrische Figur in Bezug auf die gemeinsame Mittelsenkrechte der parallelen Gegenseiten als Symmetrieachse.

Satz 79b. Die Diagonalen des Antiparallelogramms sind gleichlang, bilden mit beiden Grundseiten je gleiche Winkel und schneiden einander auf der Symmetrieachse.

Satz 79c. Die Symmetrieachse des Antiparallelogramms halbiert den Winkel der nichtparallelen Seiten, sowie der Diagonalen und schneidet auf beiden symmetrisch gleichlange Strecken aus.

Erkl. 301. Da die Schenkel des Antiparallelogramms bezw. deren Verlängerungen sich auf der Achse treffen, und diese die Mittelsenkrechte des gemeinsamen Schenkels der gleichgrossen Winkel an jenen Schenkeln ist, so bildet jede der beiden Grundseiten mit den beiden Schenkeln als ganzen Linien ein gleichschenkliges Dreieck. Diese beiden gleichschenkligen Dreiecke haben dieselbe Spitze, denselben Winkel an der Spitze, dieselben Winkel an der Grundseite, dieselbe Symmetrieachse, und parallele Grundseiten.

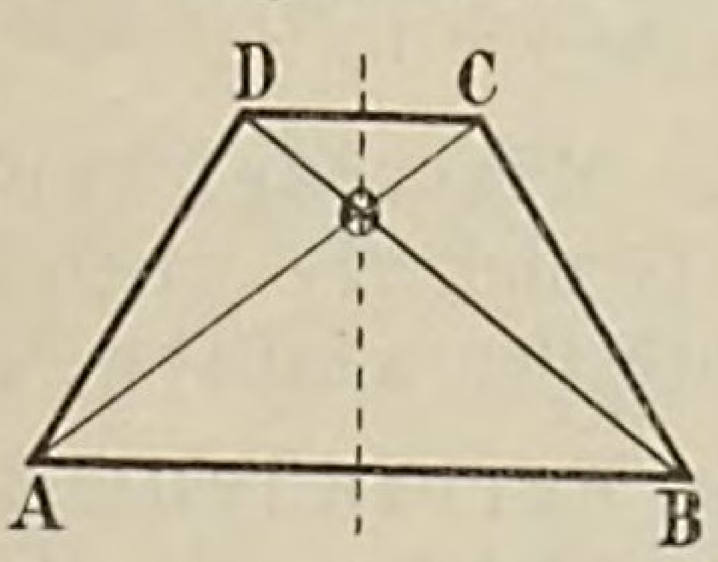
Frage 152. Wie kann man aus einem Dreieck ein Antiparallelogramm erzeugen?

Antwort. Ein Antiparallelogramm kann nur aus einem gleichschenkligen Dreieck erzeugt werden, und zwar durch jegliche Parallele zur Grundseite desselben. Die Winkelhalbierende an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks wird Mittelsenkrechte beider Grundseiten und Symmetrieachse des Antiparallelogramms.

Erkl. 302. Diese Erzeugungsweise des Antiparallelogramms erklärt die Aehnlichkeit der Sätze 79 mit denen über das gleichschenklige Dreieck. Sie wird am leichtesten ausgeführt, indem man einen beliebigen Winkel zeichnet und auf seinen Schenkeln zweimal zwei gleiche Strecken abträgt.

Frage 153. Von welcher Art sind die Dreiecke, welche im Antiparallelogramm durch die Diagonalen gebildet werden?

Figur 122.



Antwort. Im Antiparallelogramm $ABCD$, Figur 122, bildet:

1) jede Diagonale als Ganze zwei Dreiecke mit je einer Grundseite und einem Schenkel, von welchen je zwei symmetrisch, also gegenwendig kongruent sind, nämlich:

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC$$

und

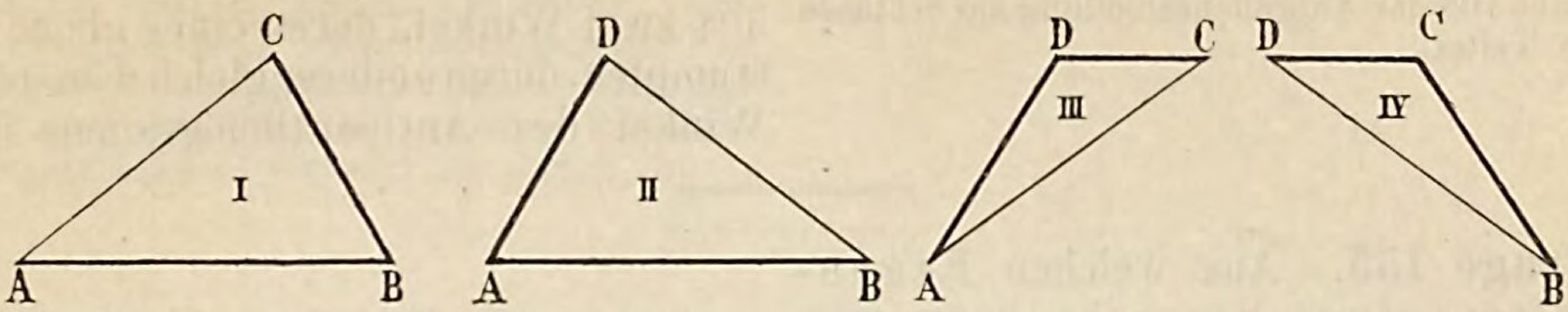
$$\triangle ADC \cong \triangle BCD.$$

2) Die Abschnitte jeder Diagonale bilden je ein Dreieck mit einer Seite des Antiparallelogramms, von denen zwei (mit den Schenkeln gebildete) wieder symmetrisch, also gegenwendig kongruent sind, nämlich:

$$\triangle AOD \cong \triangle BOC.$$

Erkl. 303. Es ist nützlich, sich gegenwendig kongruente Dreiecke, wie die Dreiecke ABD und BAC, sowie ADC und BCD besonders aus der Figur herauszuzeichnen, um dieselben für sich allein und losgetrennt von der durch gemeinschaftliche Stücke möglicherweise erzeugten Unklarheit zu betrachten

Figur 123.

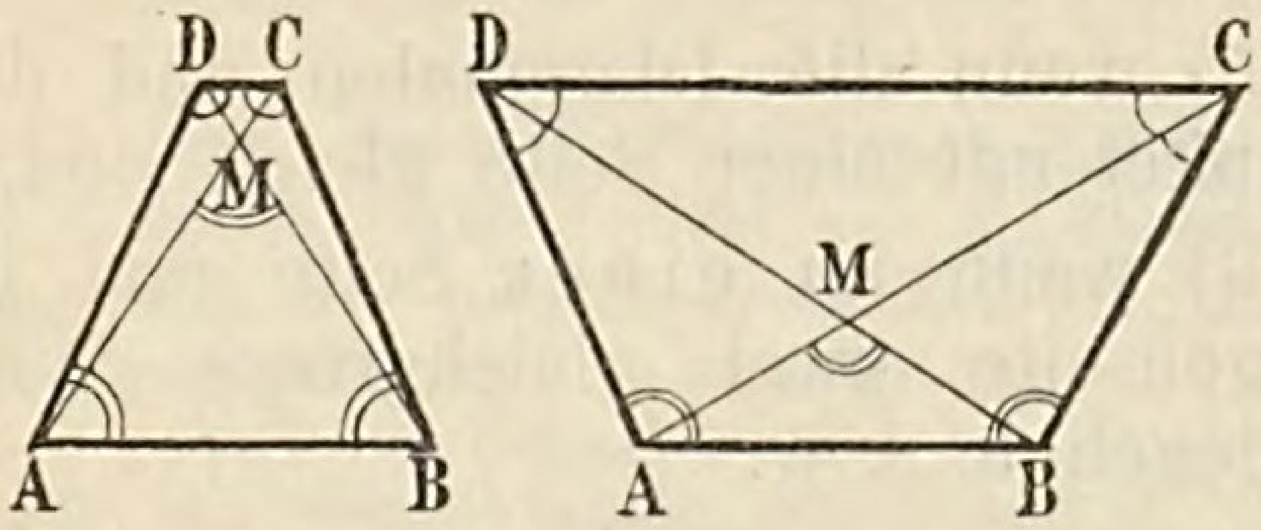


(siehe Figur 123). Zu beachten ist dabei auch, dass die gemeinschaftliche Seite AB bezw. CD das einemal als AB, das anderemal als BA, bezw. einmal als CD, das anderemal als DC auftreten muss, wenn die Kongruenz der Dreiecke richtig angeschrieben werden soll.

Die beiden mit den Grundseiten gebildeten Dreiecke dagegen sind sich selbst entsprechend symmetrisch und daher gleichschenklig mit je einer Grundseite des Antiparallelogramms als Dreiecksgrundseite. Da ausserdem die Winkel an der Spitze O in beiden Dreiecken als Scheitelwinkel gleich sind, so haben die beiden Dreiecke AOB und COD nicht nur an der eigenen Grundseite je zwei gleiche Winkel, sondern beide Dreiecke haben überhaupt dieselben Dreieckswinkel an der Basis und denselben Scheitelwinkel. Von der Symmetrieachse werden diese beiden Dreiecke in symmetrisch rechtwinklige Dreiecke halbiert.

Frage 154. Welche besonderen Eigenschaften erhält ein Antiparallelogramm, in welchem eine der Grundseiten gleiche Länge hat, wie die beiden Schenkel?

Figur 124.



Erkl. 304. Da

$$\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = \frac{\gamma}{2} = \frac{\delta}{2}$$

ist, so wird:

$$\sphericalangle CMD = 180 - \frac{\gamma + \delta}{2} = 180 - \gamma$$
$$= 180 - \delta = \alpha = \beta;$$

und

$$\sphericalangle CMB = 180 - CMD = 180 - \alpha$$
$$= 180 - \beta = \gamma = \delta.$$

Die Halbierung der Winkel an der ungleichen Seite durch die beiden Diagonalen ist besonders förderlich für die Aufgabe, ein Antiparallelogramm mit drei gleichen Seiten von einem

Antwort. Ist in dem Antiparallelogramm $ABCD$, Figur 124, die Grundseite:

$$AB = \text{den Schenkeln} = AD = BC,$$

so werden von den vier Dreiecken dieser gleichen Seiten mit den Diagonalen die beiden gleichschenklig, welche die gleiche Seite AB zur Schenkelseite haben. Es ist also $\sphericalangle ADB = ABD$ und $= BCA = BAC$.

Als innere Wechselwinkel sind ausserdem $\sphericalangle ABD = BDC$ und $= BAC = ACD$. Also sind in den Punkten C und D die von den Diagonalen mit Grundseite und Schenkel gebildeten Winkel einander gleich, nämlich $\sphericalangle ADB = BDC$ und $= BCA = ACD$. Es fallen daher bei dem Antiparallelogramm mit drei gleichen Seiten die Diagonalen an der vierten Grundseite mit den Winkelhalbierenden zusammen; und sie schneiden einander nach Satz 79b auf der Symmetrieachse und

Dreieck abzuschneiden (siehe hierüber Aufgabe 105 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles).

bilden mit einander nach Satz 77 und Erkl. 304 zwei Winkel, deren einer gleich dem stumpfen, deren anderer gleich dem spitzen Winkel des Antiparallelogramms ist.

Frage 155. Aus welchen Eigenschaften eines Vierecks kann man erschliessen, dass dasselbe ein Antiparallelogramm sein müsse?

Erkl. 305. Zum Beweise etwa der vierten der nebenstehenden Behauptungen beachte man das Entstehen je zweier aus drei Seiten kongruenten Dreiecke, nämlich aus den gleichen Diagonalen, Gegenseiten und einer gemeinsamen dritten Seite. Im fünften Falle klappe man um die Symmetrieachse, d. h. um die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke zweier Punkte AB, in welchen gleiche Seiten und Diagonalen zusammenstossen, um. Dann ist Punkt C die Spitze eines Dreiecks mit Seiten BC und AC, und D die Spitze eines Dreiecks mit Seiten $AD = BC$ und $BD = AC$. Da Dreiecke mit drei gleichen Seiten kongruent sind, so müssen beim Umklappen die Dreiecke ABC und BAD zur Deckung kommen, also auch die Punkte C und D und die Seiten AD und BC — folglich ist das Viereck ein Antiparallelogramm.

Erkl. 306. Im letzten der nebenstehenden Fälle klappe man wieder um die Symmetrieachse der Scheitel zweier gleichen Winkel α und β um. Dann werden auch die Schenkel AD und BC der Richtung nach symmetrische Geraden. Da aber auch $\delta = \gamma$, so muss

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4\,\mathrm{R} = 2\,(\alpha + \delta)$$

sein, also $\alpha + \delta = 2\,\mathrm{R}$, und die entgegengesetzten Winkel α und δ supplementär. Demnach muss die Verbindungsgerade ihrer Scheitel zu $AB \parallel$ parallel sein, ist also zur Achse senkrecht und schneidet C und D als symmetrische Punkte aus.

Antwort. Wenn von einem Viereck nicht die bei der Erklärung des Antiparallelogramms in Antwort der Frage 149 ausgesprochenen Eigenschaften bekannt sind, so kann man doch aus dem Vorhandensein der in den Sätzen 79 aufgeführten Eigenschaften erschliessen, dass dasselbe ein Antiparallelogramm sei. Denn durch Umklappen um eine passend gewählte Symmetrieachse lässt sich beweisen, das jedes Viereck die Eigenschaften eines Antiparallelogramms hat:

1) wenn die Mittelsenkrechte einer Seite zugleich Mittelsenkrechte der Gegenseite ist,

2) wenn die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Gegenseiten auf beiden senkrecht steht,

3) wenn die Senkrechte von einer Seitenmitte auf die Gegenseite die letztere halbiert und auf der ersteren senkrecht steht,

4) wenn die Diagonalen und zwei Gegenseiten gleich sind,

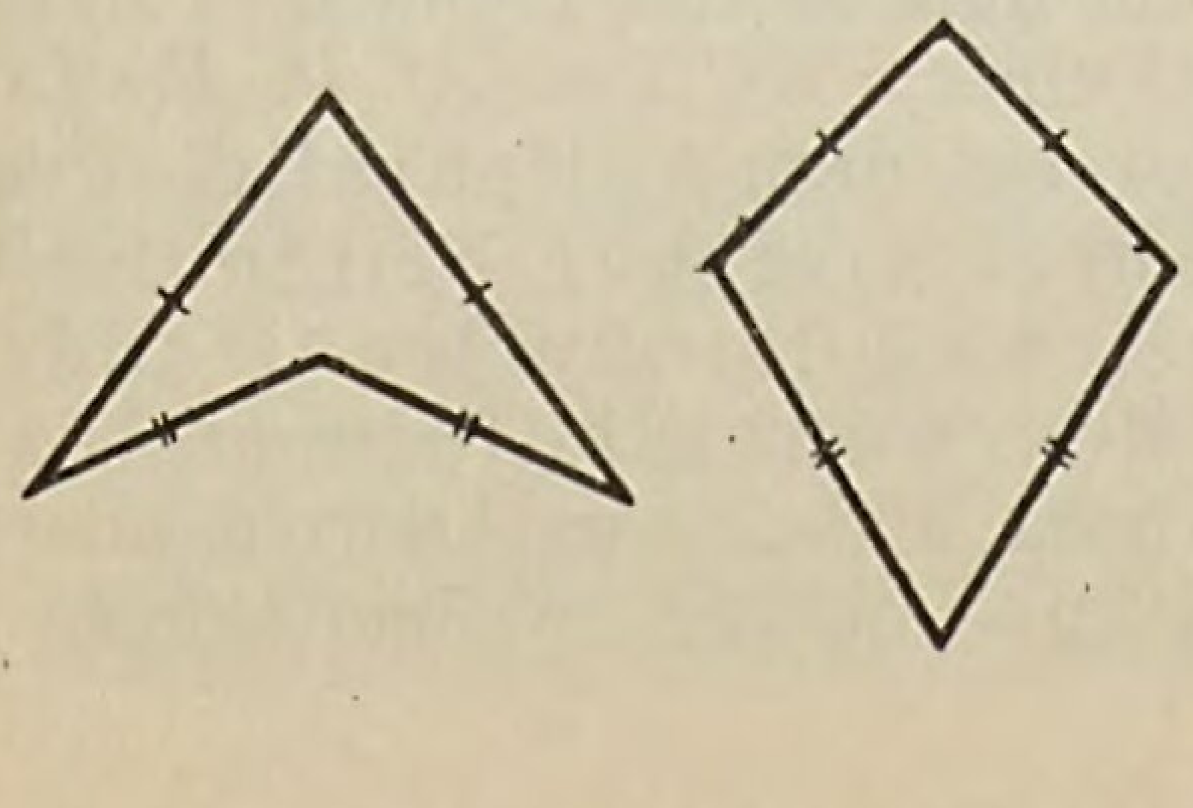
5) wenn die Diagonalen und deren Winkel mit einer Seite gleich sind,

6) wenn an einer Seite und ihrer Gegenseite zwei gleichgrosse Winkel anliegen u. s. w.

β^2) Ueber das Deltoid.

Frage 156. Was ist ein Deltoid?

Figur 125.

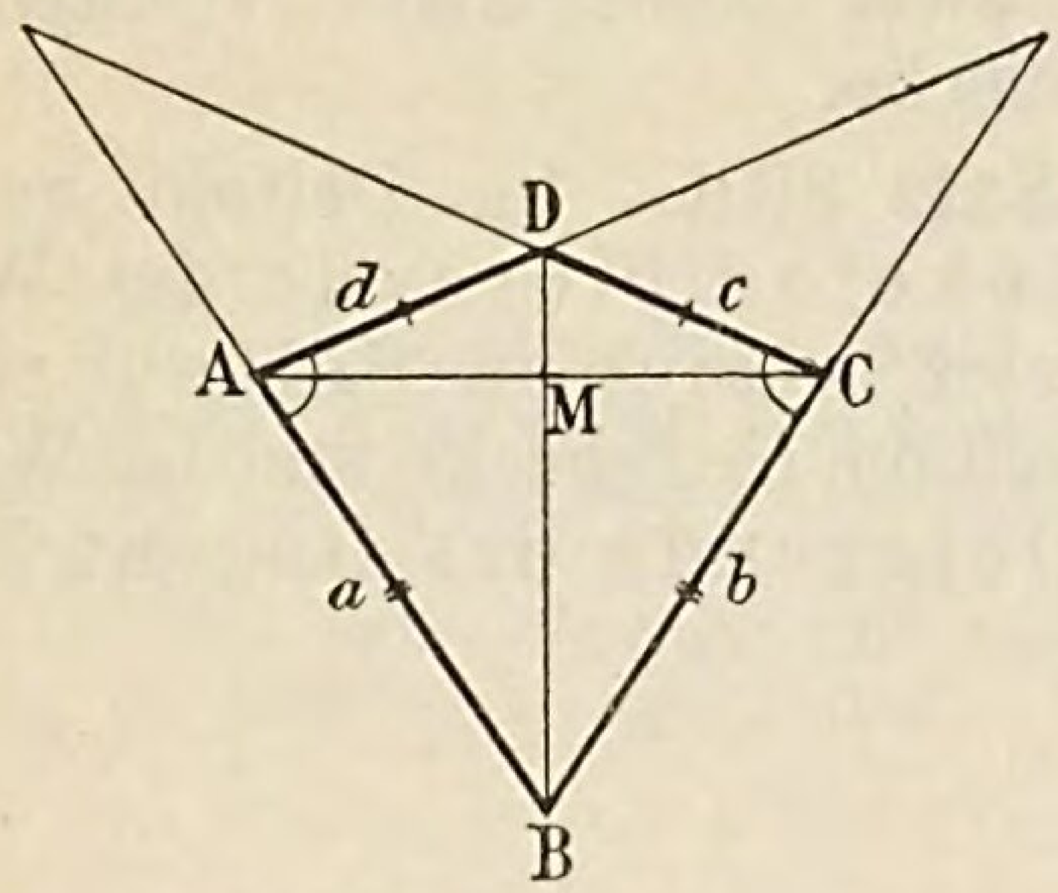


Antwort. Ein Deltoid oder ein doppelt-gleichschenkliges Viereck ist ein Viereck, in welchem an einer Ecke und ihrer Gegenecke zwei gleichgrosse Seiten zusammenstossen, also ein solches Viereck, in welchem zwei aneinanderstossende Seiten gleich und auch die beiden andern Seiten einander gleich sind.

Erkl. 307. Wenn man das Antiparallelogramm als Viereck und das Deltoid als Vierseit entstehen lässt, so ist nebenstehende Entstehungsweise des Deltoids genau dualistisch der letzten der Entstehungsweisen des Antiparallelogramms in Antwort der Frage 155.

Frage 157. Welche Eigenschaften des Deltoids ergeben sich sofort aus seiner Entstehungsweise?

Figur 126.



Erkl. 308. Zwei Dreiecke, welche über derselben Grundseite mit den entsprechend gleichen beiden andern Seiten konstruiert sind, müssen nach dem I. Kongruenzsatz zur Deckung gebracht werden können. Zur Deckung der Dreiecke ABD und CBD bedarf es bloss der Umklappung um BD, denn da die Dreiecke gleiche Seiten haben, so müssen den gleichen Seiten AB und CB die gleichen Winkel ADB und CDB gegenüberliegen. So fällt beim Umklappen ADB auf CDB, DA auf DC, A auf C, AB auf CB.

Erkl. 309. Da beim Umklappen die Seiten a und b, sowie c und d nicht nur als Strecken, sondern auch der unbegrenzten Richtung nach zur Deckung gelangen, so müssen auch die von a mit c gebildeten Schnittwinkel zur Deckung gelangen mit den Winkeln von b und d. Die symmetrischen Schnittpunkte, welche die Scheitel der Winkel sind, werden „Nebenecken" des Deltoids, ebenso wie die symmetrischen Verbindungsgeraden im Antiparallelogramm, nämlich der Diagonalen als „Nebenseiten" zu bezeichnen wären.

Erkl. 310. Wegen Satz 80b sind im Deltoid durch zwei unabhängige seiner Winkel alle vier Winkel desselben bestimmt.

Antwort. Da im Deltoid $ABCD$ die an einer Ecke B und ihrer Gegenecke D zusammentreffenden Seiten gleich sind, also $AB = CB$ und $AD = CD$, so müssen die von diesen Seiten mit der Diagonale AC gebildeten Dreiecke gleichschenklig sein. Dagegen müssen die mit der Diagonale BD als gemeinschaftlicher Seite gebildeten schiefwinkligen Dreiecke ABD und CBD wegen ihrer drei entsprechend gleichen Seiten $AB = CB$, $BD = BD$, $DA = DC$ kongruent symmetrisch sein zu BD als Achse, also sind A und C symmetrische Punkte, und es ist CM die Höhe des einen Dreiecks von A auf BD, und gleich AM, der Höhe des andern von C auf BD; AC wird senkrecht halbiert von BD.

Es ist also in den kongruenten Dreiecken $ABD \cong CBD$ auch $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$, sowie $\sphericalangle ADM = CDM$ und $\sphericalangle ABM = CBM$, d. h. bei D und B sind die Viereckswinkel durch BD halbiert.

Daher kann man über das Deltoid folgende Aussagen machen:

Satz 80. Das Deltoid wird durch die Diagonale derjenigen Ecken, in welchen ungleiche Seiten zusammenstossen, in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt; durch die Diagonale derjenigen Ecken, in welchen gleiche Seiten zusammenstossen, in zwei kongruente schiefwinklige Dreiecke.

Satz 80a. Das Deltoid ist eine achsig-symmetrische Figur in Bezug auf die Verbindungsdiagonale der Ecken, in welchen gleiche Seiten zusammenstossen.

Satz 80b. Im Deltoid sind die beiden Winkel, welche von je zwei

Erkl. 311. Wird die dualistische Nebeneinanderstellung des Antiparallelogramms und des Deltoids nach Erkl. 307 näher ausgeführt, so erhält man nach Nebenstehendem:

Das Antiparallelogramm $ABCD$, als Viereck,	Das Deltoid $ABCD$, als Vierseit,

bestimmt durch die beiden Paare achsig-symmetrischer

Punkte A und B, C und D, hat gleiche Verbindungsstrecken der nicht symmetrischen Punkte $BC = AD$ sowie auf den „Nebenseiten“ $AC = BD$; und zwei Paare gleicher Winkel $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$ anliegend an den symmetrischen Seiten.	Geraden a und b, c und d, hat gleiche Schnittwinkel der nicht symmetrischen Geraden $(bc) = (ad)$ sowie an den „Nebenecken“ $\sphericalangle (ac) = (bd)$; und zwei Paare gleicher Seiten $a = b$, $c = d$ zusammentreffend an den symmetrischen Ecken.

ungleichen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich.

Satz 80 c. Die Diagonale des Deltoids, welche die Ecken der gleichen Seiten verbindet, ist Mittelsenkrechte der andern Diagonale und halbiert die beiden Winkel des Deltoids, durch welche sie geht; sie zerlegt somit jedes der gleichschenkligen Dreiecke, in welche das Deltoid durch die andere Diagonale zerlegt wird, in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.

Satz 80 d. Im Deltoid geht die Winkelhalbierende des Winkels zweier gleichen Seiten zugleich durch die Gegenecke und ist Winkelhalbierende des Gegenwinkels.

Frage 158. Wie kann man mittels des Dreiecks ein Deltoid erzeugen?

Erkl. 312. Nach der ersten Erzeugungsweise entsteht ein Deltoid, wenn man zwei Winkelscheite von der in Erkl. 199 erwähnten Art mit der Hypotenuse in nebenstehender Weise aneinander legt.

Erkl. 312 a. Haben die beiden ungleichwendig kongruenten Dreiecke an der gemeinschaftlichen Seite einen stumpfen Winkel — oder werden die beiden gleichschenkligen Dreiecke nach derselben Seite ihrer gemeinschaftlichen Grundseite gelegt, so entsteht das Deltoid mit einspringendem Winkel, für welches die oben abgeleiteten Sätze 80 sämtlich Gültigkeit behalten mit einer geringen Abänderung der Ausdrucksweise. Es wird nämlich nicht das Deltoid in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt, sondern die Diagonale der Ecken ungleicher Seiten liegt ausserhalb des Vierecks und bildet mit den gleichen Seiten jene beiden gleichschenkligen Dreiecke. Der einspringende Winkel ist überstumpf, wird aber ebenso halbiert durch die zweite Diagonale, wie seine Ergänzungswinkel zu 360°.

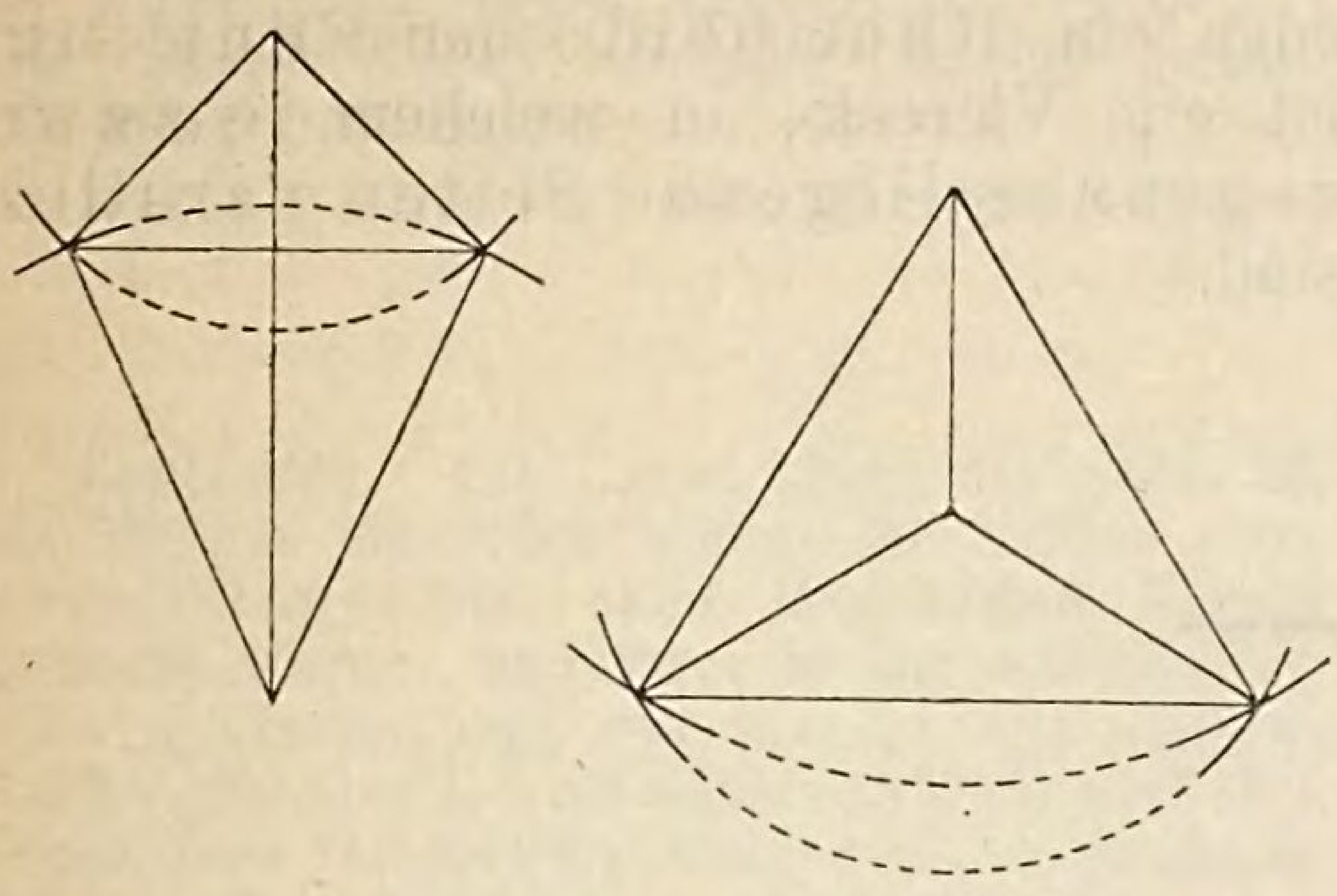
Antwort. Mittels des Dreiecks kann man auf zweierlei Weise ein Deltoid erzeugen:

1) Man legt von zwei ungleichwendig kongruenten Dreiecken die entsprechenden Eckpunkte zweier entsprechenden Seiten aufeinander, so dass der dritte Eckpunkt auf verschiedenen Seiten liegt. Dann werden in Bezug auf diese gemeinschaftliche Seite als Symmetrieachse die übrigen Seiten der beiden Dreiecke zu achsig-symmetrischen Geraden und bilden ein Vierseit mit paarweise symmetrischen Seiten, also ein Deltoid.

2) Man lege von zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gleicher Grundseite diese Grundseiten aufeinander, so dass die Spitzen auf verschiedener (oder auf gleicher) Seite liegen. Dann bilden die übrigen Seiten der beiden Dreiecke ein Vierseit mit paarweise gleichen Seiten. Die Mittelsenkrechte der gemeinschaftlichen Grundseite muss durch die beiden Spitzen gehen, ist also Symmetrieachse des Vierseits, und das ganze ein Deltoid.

Frage 159. Welche Kreislinien sind beim Deltoid von Wichtigkeit?

Figur 127.



Erkl. 313. Diese Kreislinien beim Deltoid finden besonders Anwendung zur Konstruktion des Deltoids sowie zur Konstruktion von Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten. Man sehe hierüber die Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Antwort. Beim Deltoid muss eine Kreislinie, deren Mittelpunkt eine Ecke gleicher Seiten ist, wenn sie durch eine der Ecken ungleicher Seiten geht, auch durch die andere dieser Ecken gehen, denn diese beiden haben denselben Abstand von jeder Ecke der andern Art. Es müssen sich also beim Deltoid zwei Kreisbogen zeichnen lassen mit den Mittelpunkten B und D, welche beide sowohl durch A als durch C gehen, d. h. welche sich in A und C schneiden.

Frage 160. Aus welchen Eigenschaften eines Vierecks kann man erschliessen, dass dasselbe ein Deltoid sein müsse?

Erkl. 314. Zum Beweise etwa der vierten der nebenstehenden Behauptungen klappe man das eine Dreieck um diejenige Diagonale um, welche durch die ungleichen Winkel geht. Dann muss das Dreieck das anderseitige Dreieck decken. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so müsste die Gegenecke im Innenraum oder im Scheitelraum dieses neuen Dreiecks liegen, doch jedenfalls wegen der senkrechten Diagonalen auf der Verlängerung der ersten. Da aber nach Satz 51 der Winkel jedes Punktes im Innern grösser, jedes Punktes im Scheitelraume aber kleiner wäre, als der Dreieckswinkel, so muss die anderseitige Ecke mit dem symmetrischen Punkte zur ersten Ecke identisch sein.

Erkl. 315. Im fünften Falle klappe man um die Winkelhalbierende der gleichen Seiten an der dritten Ecke um, im letzten um die Diagonale.

Antwort. Wenn von einem Viereck nicht die in der Erklärung des Deltoids in Antwort der Frage 156 ausgesprochenen Eigenschaften bekannt sind, so kann man doch aus dem Vorhandensein der in den Sätzen 80 aufgeführten Eigenschaften erschliessen, dass dasselbe ein Deltoid sei. Denn durch Umklappen um eine passend gewählte Symmetrieachse lässt sich beweisen, dass jedes Viereck die Eigenschaften eines Deltoids hat, 1) wenn die Winkelhalbierende eines Winkels zugleich Winkelhalbierende des Gegenwinkels ist, 2) wenn die Verbindungslinie zweier Gegenecken beide Gegenwinkel halbiert, 3) wenn die eine Diagonale die Mittelsenkrechte der andern ist, 4) wenn zwei Gegenwinkel gleich und die Diagonalen senkrecht sind, 5) wenn zwei Gegenwinkel und die Seiten an einer dritten Ecke gleich sind, 6) wenn eine Diagonale einen Winkel halbiert und die beiden übrigen Gegenwinkel gleich gross sind, u. s. w.

γ) Ueber das zentrisch-symmetrische Viereck oder das Parallelogramm.

Frage 161. Was ist ein Parallelogramm?

Erkl. 316. Das Wort Rhomboid kommt vom griechischen ῥομβοειδής, d. h. dem Rhombus — ähnlich sehend, weil das Parallelogramm als eine verallgemeinerte Gestalt des Rhombus oder der Raute [siehe Abschnitt γ, 2)] angesehen werden kann (daher auch Rautling = Rauten — ähnlich). Parallelogramm von parallel und γράμμα, die Linie, Zeichnung.

Antwort. Ein Parallelogramm oder ein Rhomboid oder Rautling ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Frage 162. Welche Ergebnisse für die Winkel und Seiten des Parallelogramms liefern die Sätze über Winkel an Parallelen, sowie Satz 32 und Erkl. 88?

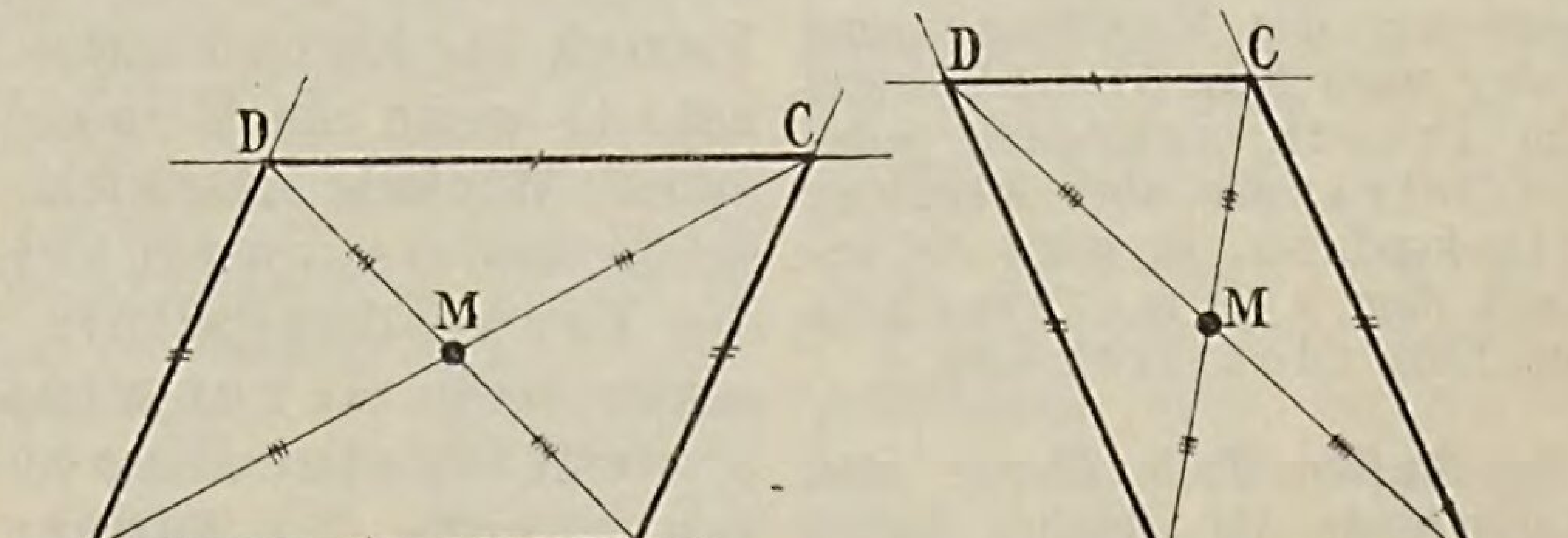
Erkl. 317. Winkel an der gleichen Seite eines Parallelogramms oder auch eines sonstigen Vielecks werden auch als benachbarte Winkel bezeichnet.

Erkl. 318. Für das Wort Parallelogramm hat man oft auch eine Abkürzung der Schreibweise, nämlich die Buchstaben gr nach einem Parallelitätszeichen, also || gr = Parallelogramm.

Antwort. Da die Winkel an der gleichen Parallelogrammseite ihrer Lage nach Ergänzungswinkel an einer Transversalen zweier Parallelen sind, so müssen sie supplementär sein; da ferner die Schenkel je zweier Gegenwinkel parallel sind, und da die Gegenseiten parallel sind zwischen den andern ebenfalls parallelen Seiten, so kann man die Aussage machen:

Satz 81. Im Parallelogramm sind Winkel an der gleichen Seite supplementär, je zwei Gegenwinkel und Gegenseiten sind einander gleich.

Figur 128.



Frage 163. Welche weiteren Eigenschaften des Parallelogramms ergeben sich nach seiner Erklärung aus der Anwendung des Satzes 28?

Erkl. 319. Die in nebenstehender Antwort enthaltenen Angaben, dass AB und CD, sowie

Antwort. Da nach Satz 28 der Mittelpunkt jeder Transversalen zweier Parallelen als Symmetriezentrum der von den Parallelen samt der Transversalen gebildeten Figur angenommen

AD und *CD* zentrisch-symmetrische Strecken, *ABC* und *CDA*, sowie *DAB* und *BCD* zentrisch-symmetrische Winkel sind, bilden eine Wiederholung der Angaben der vorigen Antwort und des Satzes 81 und 32. Letzterer wurde an seiner Stelle (siehe Antwort der Frage 57) auf dieselbe Weise bewiesen, wie in nebenstehender Ueberlegung.

Erkl. 320. Die Entwicklung der Sätze 28 bis 32 war eigentlich schon eine Lehre vom Parallelogramm, ohne dass dessen Namen genannt wurde, und zwar in der Ausdehnung bezw. Beschränkung, wie dieselbe teils aus dem Vorhergehenden sich als selbstverständliche Folge ergab, teils für die darauffolgende Untersuchung der Parallelverschiebung erforderlich war.

Erkl. 321. Da die benachbarten Winkel im Parallelogramm supplementär sind, so muss ein einziger die Grösse für jeden folgenden entscheiden. Also ist durch einen einzigen Winkel des Parallelogramms die Grösse aller vier Winkel eindeutig bestimmt.

Erkl. 322. Bei der Umdrehung der ganzen Figur des Parallelogramms samt Diagonalen entstehen keine neuen Punkte und Geraden, sondern jeder Punkt und jede Gerade erhält eine Lage, die zuvor von einem andern Punkte oder einer andern Geraden derselben Figur eingenommen worden war.

Erkl. 323. Der Schnittpunkt der Diagonalen als Symmetriezentrum aller Punkte, Geraden, Strecken und Winkel der ganzen Figur wird auch Mittelpunkt des Parallelogramms genannt.

Erkl. 324. Die Richtigkeit der in Satz 83 ausprochenen Behauptung folgt aus Satz 31, wornach die Mittelparallele sämtliche Transversalen halbiert. Solche Transversalen sind aber sowohl die Gegenseiten, als auch die Diagonalen des Parallelogramms.

werden kann, so kann man hiefür beim Parallelogramm den Mittelpunkt *M* einer Diagonale wählen, denn jede dieser beiden ist Transversale sowohl für das eine, als für das andere Paar der parallelen Gegenseiten. Wird alsdann um diesen Punkt *M* herumgedreht um den Drehungsbetrag von 180°, also von der gesamten Figur eine halbe Umdrehung ausgeführt, so fällt zunächst Strecke *MA* auf *MC*, also Punkt *A* auf *C*; ferner *AB* auf die Parallele *CD* und *CB* auf die Parallele *AD*, also auch der Schnittpunkt *B* der Geraden *AB* und *CB* auf den Schnittpunkt *D* der Geraden *CD* und *AD*. Demnach sind:

zentrisch-symmetrische Punkte:

M sich selbst, *A* und *C*, *B* und *D*;

zentrisch-symmetrische Strecken:

AC sich selbst, *BD* sich selbst, *AB* und *CD*, *BC* und *DA*;

zentrisch-symmetrische Winkel:

BAD und *DCB*, *ABC* und *CDA*, sowie deren durch die Diagonalen gebildete Teilwinkel und Wechselwinkel;

zentrisch-symmetrische, also gleichwendig kongruente Dreiecke:

ABD und *CDB*, *ABC* und *CDA*, *AMB* und *CMD*, *AMD* und *CMB*.

Daher ist Punkt *M* nicht nur Mittelpunkt der Strecke *AC*, sondern auch der selbstentprechenden Strecke *CD*, also Schnittpunkt der Diagonalen, sowie Symmetriezentrum der ganzen Figur samt jeder durch Punkt *M* gehenden Transversalen (Zentralen). Man erhält also folgende Aussagen:

Satz 82. Das Parallelogramm ist eine zentrisch-symmetrische Figur in Bezug auf den Schnittpunkt der Diagonalen als Symmetriezentrum.

Satz 82a. Die Diagonalen des Parallelogramms halbieren einander gegenseitig im Symmetriezentrum.

Satz 82b. Jede Diagonale eines Parallelogramms teilt dasselbe in zwei gleichwendig kongruente Drei-

ecke; die vier Diagonalenhälften teilen das Parallelogramm in zwei Paare gleichwendig kongruenter Dreiecke.

Satz 83. Die Mittelparallele zweier Gegenseiten des Parallelogramms geht durch die beiden Mittelpunkte der andern Gegenseiten, sowie durch den Schnittpunkt der Diagonalen — oder:

Satz 83a. Die Verbindungslinie der Seitenmitten zweier Gegenseiten des Parallelogramms ist Mittelparallele und halbiert auch beide Diagonalen in ihrem Schnittpunkt — oder:

Satz 83b. Die Parallele durch eine Seitenmitte zu den beiden andern Gegenseiten halbiert auch die vierte Seite und die Diagonalen.

Satz 83c. Jede durch den Mittelpunkt des Parallelogramms gehende und von Gegenseiten (oder ihren Verlängerungen) begrenzte Strecke wird in jenem Punkte halbiert und teilt das Parallelogramm in zwei nach allen ihren Stücken zentrisch-symmetrische Figuren.

Erkl. 325. Da sowohl die Strecken gleich sind, welche auf einer Zentralen vom Mittelpunkt zu den Schnittpunkten der Gegenseiten reichen, als auch jene bis zu den Schnittpunkten der Verlängerungen der andern Gegenseiten, so müssen auch die Differenzen dieser Strecken gleich sein, und man kann den Satz aussprechen:

Satz 83d. Zieht man durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms eine Transversale, so sind die Abschnitte derselben, welche

1) zwischen dem Diagonalen-Schnittpunkte und den Gegenseiten des Parallelogramms liegen, oder welche

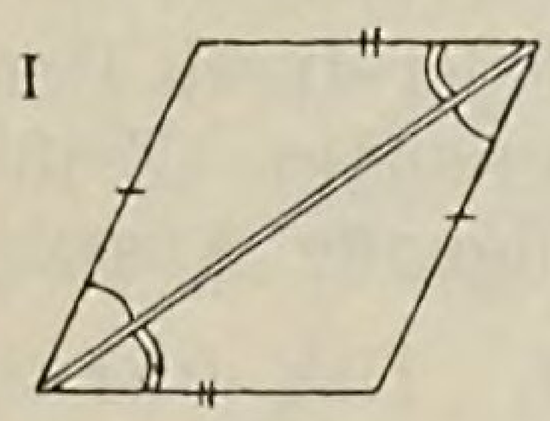
2) zwischen dem Diagonalen-Schnittpunkte und den Verlängerungen zweier Gegenseiten liegen, oder welche

3) zwischen dem einen Paar Gegenseiten und den Verlängerungen des anderen Paares Gegenseiten liegen — einander gleich.

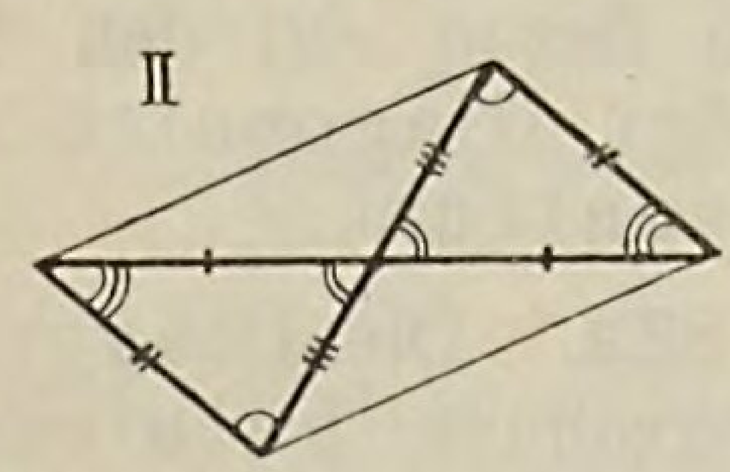
Frage 164. Wie kann ein Parallelogramm mittels des Dreiecks erzeugt werden?

Figur 129.

I



II



Erkl. 326. Auf jede der nebenstehend angegebenen Weisen kann ein Parallelogramm in doppelter Ausführung erzeugt werden, je nachdem zuerst die eine oder die andere Diagonale als gemeinsame Seite gewählt wird, oder je nachdem im zweiten Falle das eine oder

Antwort. Mittels des Dreiecks kann ein Parallelogramm auf zweierlei Weise erzeugt werden:

1) Man lege von zwei gleichwendig kongruenten Dreiecken die nicht entsprechenden Endpunkte zweier entsprechenden Seiten so aufeinander, dass der dritte Eckpunkt auf verschiedenen Seiten liegt. Dann haben die der gemeinschaftlichen Seite anliegenden entsprechend gleichen Winkel die Lage von inneren Wechselwinkeln, also bilden ihre anderen Schenkel zwei Paare paralleler Gegenseiten, und dadurch ein Parallelogramm.

2) Man lege zwei gleichwendig kongruente Dreiecke mit einem ihrer entsprechenden Eckpunkte so aneinander, dass von zwei entsprechend gleichen Seiten die eine die Verlängerung

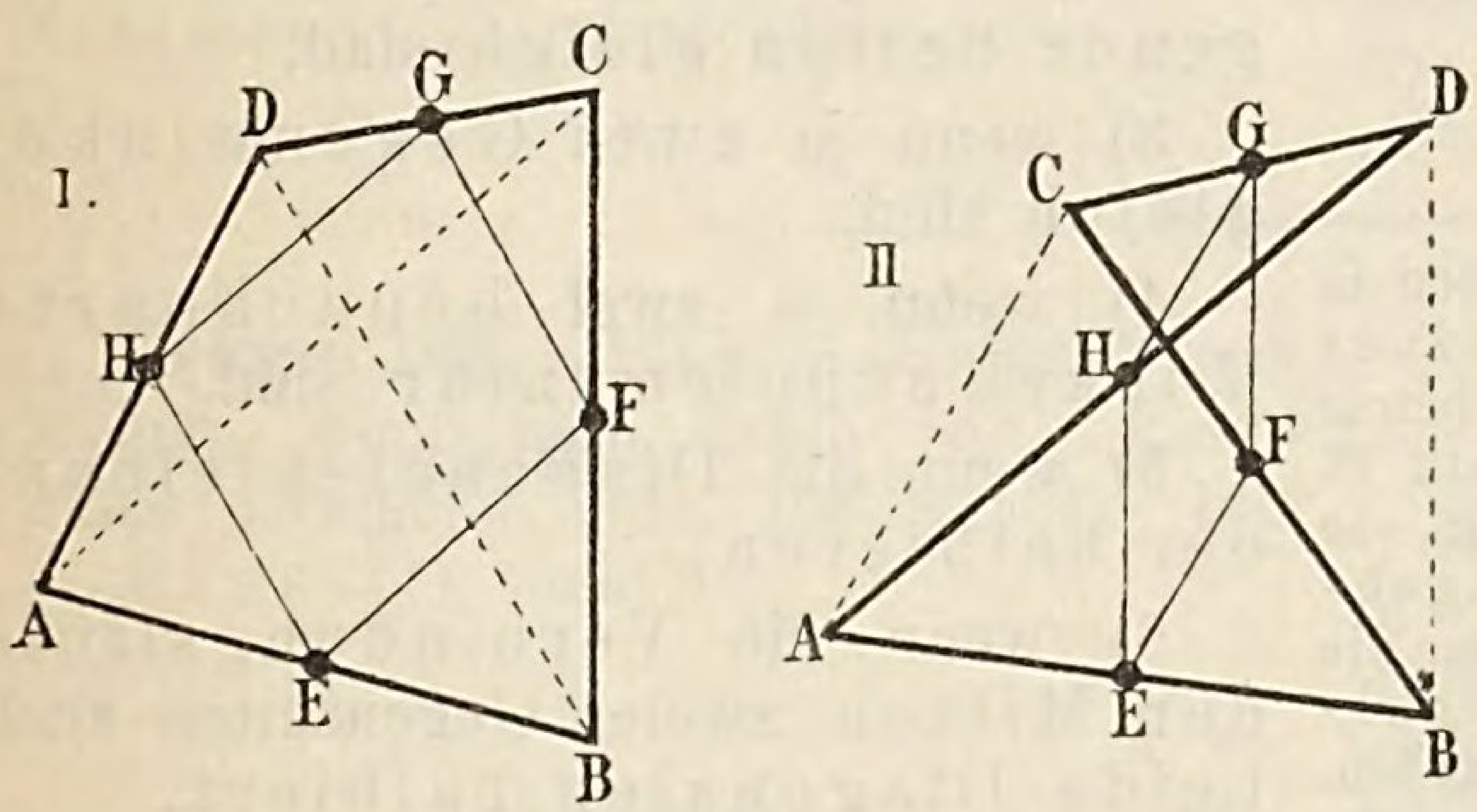
das andere Paar der vier kongruenten Dreiecke nach Satz 82b zur Erzeugung benutzt wird.

Erkl. 326 a. Die Erzeugungsweise der Vierecke aus dem Dreieck, wie dieselbe in nebenstehender Antwort und ebenso später in den Antworten der Fragen 172, 178 und 184, sowie schon oben in den Antworten 158, 152 und 143 angegeben wurde, präge man sich dadurch ein, dass man mittels Papier und Scheere die angegebenen Dreiecke ausschneidet und durch deren Zusammenlegung die gewünschten Vierecke erzeugt.

der andern bildet. Dann müssen die in gleichem Drehungssinne an jenem Eckpunkte liegenden gleichen Winkel Scheitelwinkel werden, und die Endpunkte ihrer Schenkel bilden vier zentrisch-symmetrische Punkte, also ein Parallelogramm.

Frage 165. Wie kann ein Parallelogramm mittels eines beliebigen Vierecks erzeugt werden?

Figur 130.



Antwort. Mittels eines beliebigen Vierecks kann man ein Parallelogramm erzeugen, indem man die Mittelpunkte je zweier anstossenden Seiten verbindet.

Zieht man nämlich in dem beliebigen Viereck $ABCD$ die Diagonalen, so bildet die erste Diagonale AC zwei Dreiecke ACD und ACB, in welchen die Seitenmitten verbunden sind; und ebenso die zweite Diagonale BD zwei Dreiecke ABD und CBD, in welchen ebenfalls die Mittelpunkte der beiden andern Seiten verbunden sind. Nach Satz 76 muss also sowohl EF als GH parallel sein zu AC und gleich der Hälfte dieser Strecke, folglich auch $EF \,\#\, GH = \frac{AC}{2}$; und nach demselben Satze muss zu BD sowohl EH als FG parallel sein, folglich auch $EH \,\#\, FG = \frac{BD}{2}$. Daher sind in dem Viereck $EFGH$ je zwei Gegenseiten parallel und das ganze ist ein Parallelogramm; also erhält man

Satz 84. Die Seitenmitten jedes beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm, in welchem jede Seite einer der beiden Diagonalen des Vierecks parallel und deren Hälfte gleich ist.

Erkl. 327. Der Satz 84 gilt auch für die Seitenmitten eines überschlagenen Vierecks, wobei bloss die Diagonalen ausserhalb des Vierecks liegen; denn auch in Figur 130 II ist in den Dreiecken ACB und ACD:

$$EF \parallel GH \parallel AC$$

und in den Dreiecken BDA und BDC:

$$EH \parallel FG \parallel BD,$$

also $EFGH$ ein Parallelogramm. Die besonderen Eigenschaften dieses Parallelogramms in verschiedenen Arten von Vierecken findet man in der Antwort auf Frage 190 sowie in mehreren Aufgaben der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Frage 166. Aus welchen Eigenschaften eines Vierecks kann man erschliessen, dass dasselbe ein Parallelogramm sein müsse?

Antwort. Wenn ein Viereck nicht schon die in der Erklärung des Parallelogramms in Antwort der Frage 161 ausgesprochenen Eigenschaften besitzt, so kann man doch aus dem Vorhandensein der in den Sätzen 81 bis 83 aufgeführten Eigenschaften erschliessen, dass dasselbe ein Parallelogramm sei. Denn durch eine halbe Umdrehung um ein passend gewähltes Symmetriezentrum lässt sich beweisen, dass jedes Viereck die Eigenschaften eines Parallelogramms hat,

1) wenn eine Seite ihrer Gegenseite gleich und parallel ist,

2) wenn je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind,

3) wenn je zwei Gegenwinkel gleich sind,

4) wenn je zwei benachbarte Winkel supplementär sind,

5) wenn die Diagonalen einander halbieren,

6) wenn die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten auch beide Diagonalen halbiert,

7) wenn zwei Gegenseiten gleich sind und die benachbarten Winkel an einer andern Seite supplementär sind, — u. s. w.

Erkl. 328. Der Beweis für die Richtigkeit der nebenstehenden Behauptungen wird im ersten Falle direkt durch halbe Umdrehung um den Mittelpunkt der einen Diagonale geführt. Im zweiten Falle entstehen beiderseits einer Diagonale aus drei gleichen Seiten kongruente Dreiecke, die durch halbe Umdrehung um die Mitte der gemeinschaftlichen Seite zur Deckung kommen. Im dritten Falle muss wegen $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ und $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$ auch $\alpha + \beta = 2R$ sein, also sind wegen je zweier supplementären entgegengesetzten Winkel auch je zwei Gegenseiten parallel, was im ersten Falle schon direkt erschlossen wird.

Erkl. 329. Im sechsten Falle müssen in dem Dreieck einer Diagonale und einer Seite jeweils die dritte Seite der gegebenen Verbindungslinie parallel und nach Satz 76 doppelt so gross werden als ihr Abschnitt, so dass man parallele und gleiche Gegenseiten erhält. Im letzten Falle müssen die Schenkel der supplementären Winkel parallele und gleiche Gegenseiten ergeben. Also sind beide Fälle auf den ersten zurückgeführt.

Frage 167. In welcher Beziehung steht das Parallelogramm zum Trapez, Antiparallelogramm und Deltoid?

Antwort. Das Parallelogramm ist ein besonderes Trapez, in welchem nämlich die Winkel an einer Grundseite supplementär werden, so dass die beiden gewöhnlich nicht parallelen Schenkel parallel und gleich sind. Daher gelten für das Parallelogramm sämtliche für das Trapez angestellten Ueberlegungen ohne alle Einschränkung.

Dagegen kann weder aus dem Antiparallelogramm noch aus dem Deltoid ein allgemeines Parallelogramm erzeugt werden. Denn im Antiparallelogramm müssen zweimal an einer Seite

Erkl. 330. Dass die auf der Mittelparallelen der Grundseiten ausgeschnittene Strecke gleich der halben Summe der Grundseite ist, bleibt fürs Parallelogramm als selbstverständlich richtig, denn da $m = a = b$, ist auch $m = \frac{a+b}{2}$.

Erkl. 331. Da das Parallelogramm als ein Trapez angesehen werden kann, so kann jedes seiner Gegenseitenpaare als die Grundseiten gelten, ihre senkrechten Abstände als Höhen.

Erkl. 332. Die Erzeugung des Parallelogramms als Punktgebilde oder Liniengebilde führt auf die gleiche Figur. Denn man erhält

in dem Viereck der beiden zentrisch-symmetr. Punktepaare A, C und B, D auch die zentrisch-symmetrischen Verbindungslinien a, c und b, d sowie auf diesen die symmetrisch gleichen Gegenseiten a, c und b, d mit den symmetrisch gleichen Gegenwinkeln α, γ und β, δ.	in dem Vierseit der beiden zentrisch-symmetr. Geradenpaare a, c und b, d auch die zentrisch-symmetrischen Schnittpunkte A, C und B, D sowie an diesen die symmetrisch gleichen Gegenwinkel α, β und γ, δ mit den symmetrisch gleichen Gegenseiten a, c und b, d.

Daher gibt es zweierlei achsig-symmetrische Vierecke (Viereck: Antiparallelogramm und Vierseit: Deltoid), aber nur ein zentrisch-symmetrisches, weil zentrisch-symmetrisches Viereck und zentrisch-symmetrisches Vierseit identisch werden.

gleiche Winkel sein; sollen also diese auch supplementär sein, wie für das Parallelogramm erforderlich ist, so müssten sie rechte Winkel werden, und man erhielte den besonderen Fall des rechtwinkligen Parallelogramms. Im Deltoid aber müssen zweimal an einer Ecke gleiche Seiten zusammenstossen; sollen also Gegenseiten gleich sein, wie für das Parallelogramm erforderlich ist, so müssten alle vier Seiten gleich werden, und man erhielte den besondern Fall des gleichseitigen Parallelogramms.

Daher besitzen sowohl Antiparallelogramm als Deltoid Eigenschaften, welche für das Parallelogramm nicht Geltung behalten, denn Antiparallelogramm und Deltoid besitzen eine Symmetrieachse, das Parallelogramm aber ein Symmetriezentrum.

Frage 168. Welche Figuren entstehen, wenn man durch jede Ecke eines Dreiecks eine Parallele zur Gegenseite zieht?

Antwort. Wenn durch die Ecken A, B, C eines Dreiecks Parallele zu den Gegenseiten gezogen werden, so bilden je zwei Seiten des Dreiecks mit zweien dieser Parallelen ein Parallelogramm. Und man erhält

1) AB sowohl gleich DC, als auch gleich CE; also $DE = 2 \cdot AB$;

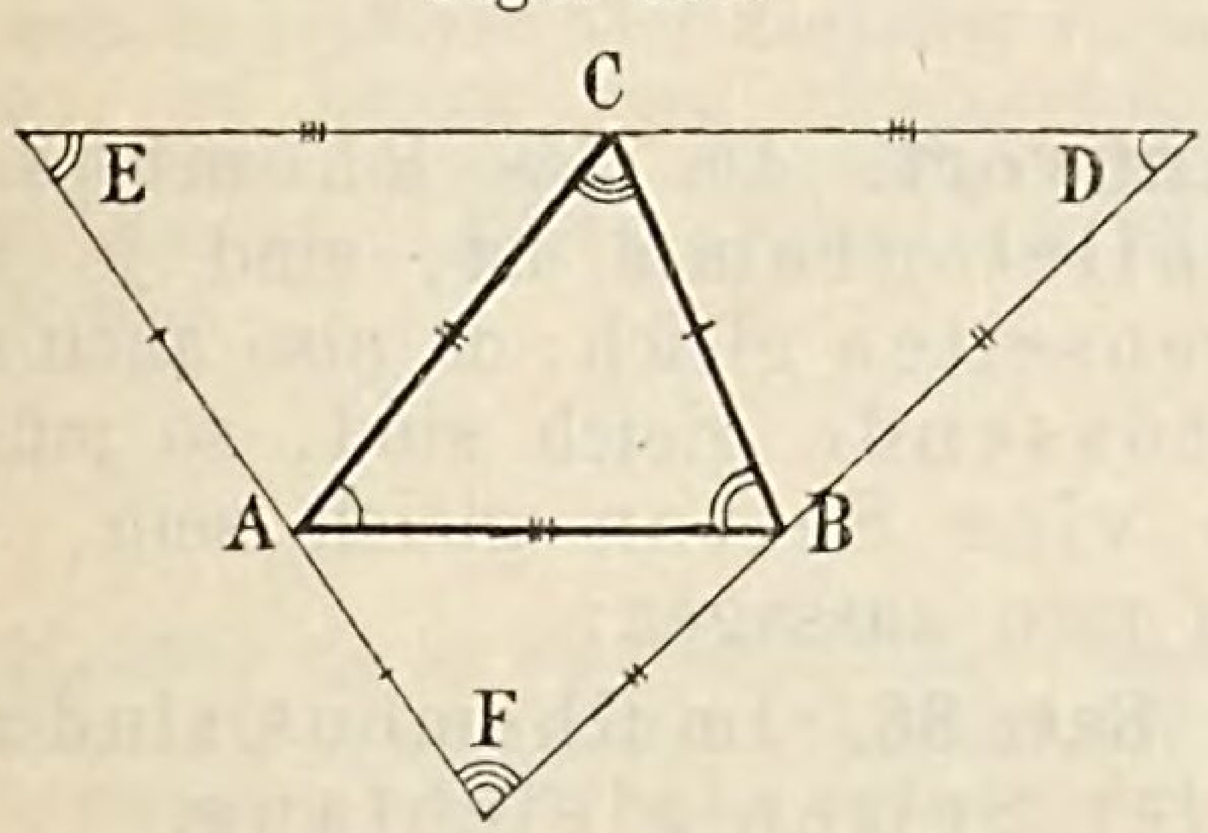
2) BC sowohl gleich EA, als auch gleich AF; also $EF = 2 \cdot BC$;

3) CA sowohl gleich FB, als auch gleich BD; also $FD = 2 \cdot AC$.

Daher sind in dem neuen Dreieck DEF die vorherigen Eckpunkte A, B, C die Mittelpunkte der Seiten, und ABC wird das Dreieck der Seitenmitten des Dreiecks DEF. Nach Satz 81 und 61 erhält man daher $\sphericalangle \alpha = CAB = BDC$, $\sphericalangle \beta = ABC = CEA$, $\sphericalangle \gamma = BCA = AFB$ und ferner $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ und $\cong CEA$ und $\cong BAF$; also in Worten:

Satz 85. Die Verbindungsgeraden der Seitenmitten eines Dreiecks teilen dasselbe in vier kongruente Dreiecke und bilden

Figur 131.



Erkl. 333. Errichtet man in dem Dreieck ABC die Höhenlinien, so ist die Senkrechte von A auf BC auch senkrecht in A auf EF, da $EF \parallel BC$: nach Satz 31 des zweiten Teils. Ebenso ist wegen der Parallelen $AC \parallel FD$ die Höhe von B auf AC auch senkrecht in B auf FD, sowie wegen der Parallelen $AB \parallel ED$ die Höhe von C auf AB auch senkrecht in C auf DE. Da aber A, B, C die Seitenmitten von EF, FD, DE sind, so sind die Höhen des Dreiecks ABC zugleich Mittelsenkrechte der Seiten des Dreiecks DEF. Umgekehrt kann

man also das, was von diesen Linien in ihrer Eigenschaft als Mittelsenkrechten von EFD gilt, auch übertragen auf die Höhenlinien des Dreiecks ABC. Man sehe hierüber den Abschnitt über die „besonderen Punkte“ im Dreieck im nächsten Teile dieses Lehrbuches.

selbst ein Dreieck mit den gleichen Winkeln und halb so grossen Seiten und viertels Inhalt wie das ursprüngliche.

Und umgekehrt:

Satz 85a. Die Parallelen zu den Seiten eines Dreiecks durch deren Gegenecken bilden ein Dreieck mit den gleichen Winkeln und doppelt so grossen Seiten und vierfachem Inhalt wie das ursprüngliche.

δ) Ueber die achsig und zentrisch-symmetrischen Vierecke.

δ¹) Ueber das Rhombus.

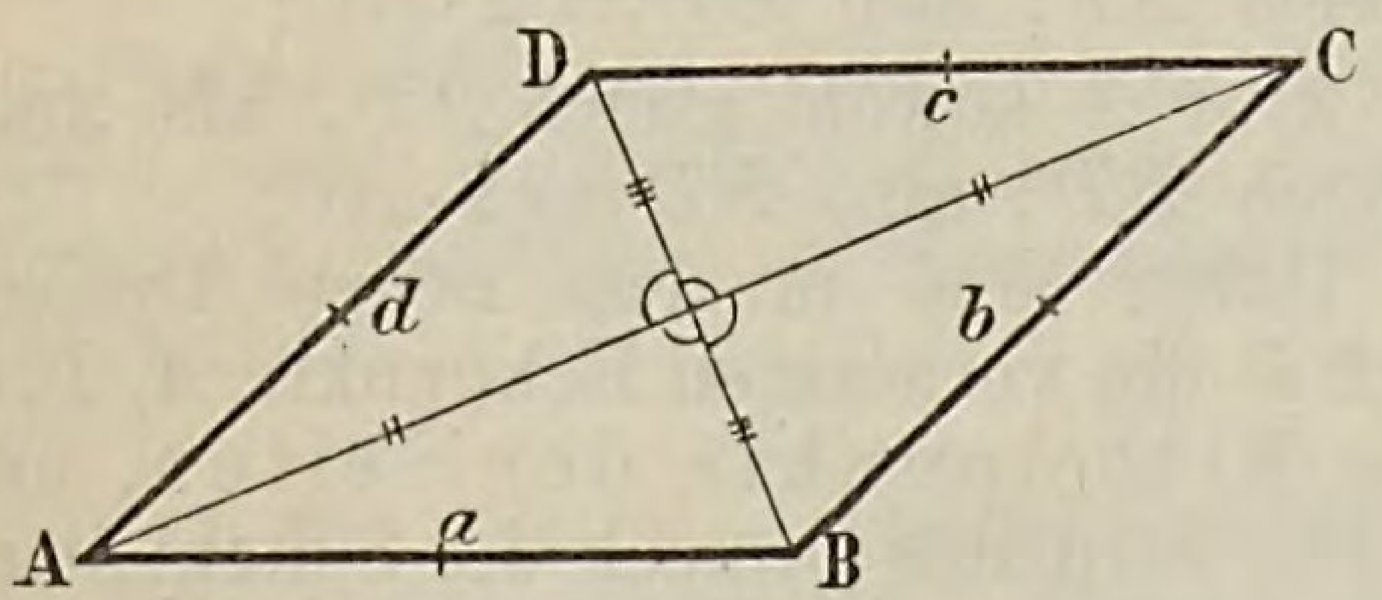
Frage 169. Was ist ein Rhombus?

Erkl. 334. Man sagt sowohl „das Rhombus“ als „der Rhombus“. Das Wort kommt vom griechischen ῥόμβος = Kreisel, Kegel, Figur zweier mit der Grundfläche aufeinander gesetzten Kegel.

Antwort. Ein Rhombus oder eine Raute ist ein solches Parallelogramm, in welchem zwei aneinanderstossende Seiten einander gleich sind, und heisst daher auch gleichschenkliges Parallelogramm.

Frage 170. Welche Eigenschaften des Rhombus ergeben sich aus der in voriger Antwort 169 gegebenen Erklärung desselben?

Figur 132.



Erkl. 335. In Figur 132 hat man:

1) weil dieselbe ein Parallelogramm ist $a = c$ und $b = d$;
kommt dazu noch 2) $a = b$,
so muss auch $a = b = c = d$ sein.

Erkl. 336. Da das Rhombus ein Parallelogramm ist, so sind auch in ihm durch einen Winkel alle vier eindeutig bestimmt.

Antwort. Da das Rhombus ein Parallelogramm ist, sind je zwei Gegenseiten gleich; da also auch zwei anstossende gleich sind, so müssen alle vier Seiten gleich sein, also kann man aussagen:

Satz 86. Im Rhombus sind alle vier Seiten gleichlang.

Frage 171. Welcher Art sind die von den Diagonalen im Rhombus gebildeten Dreiecke?

Antwort. Da alle vier Seiten des Rhombus gleichlang sind, so wird das Rhombus durch jede Diagonale in zwei gleichschenklige und nach Satz 82b kongruente Dreiecke geteilt, deren gemeinschaftliche Grundseite die Diagonale ist; da ferner nach Satz 82a jede Diagonale den Mittelpunkt der andern als einer Grundseite mit einer Ecke als Spitze eines dieser gleichschenkligen Dreiecke verbindet, so muss jede Diagonale die andere senkrecht halbieren und auch den Winkel an der Spitze halbieren. Da aber in jedem dieser gleichschenkligen Dreiecke diese Diagonale auch Symmetrieachse ist, so muss auch für das aus der Gesamtheit beider bestehende Rhombus jede Diagonale Symmetrieachse sein, so dass das Rhombus nicht nur bei der halben Umdrehung um den Mittelpunkt, sondern auch beim Umklappen um jede der beiden Diagonalen seine gleiche Lage wieder erlangt. Man erhält also ausser den auch für das Rhombus vollständig geltenden Sätzen 81 bis 83 des Parallelogramms noch folgende besonderen Sätze:

Satz 87. Jede Diagonale des Rhombus teilt dasselbe in zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke; die vier Diagonalenhälften teilen das Rhombus in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke, wovon je ein Paar gleichwendig, ein Paar ungleichwendig kongruent ist.

Satz 87a. Im Rhombus ist jede Diagonale die Mittelsenkrechte der andern und halbiert ihre beiden Winkel; die beiden Höhen des Rhombus sind gleichlang.

Satz 87b. Das Rhombus ist:

1) zentrisch-symmetrisch in Bezug auf den Diagonalenschnittpunkt als Symmetriezentrum;

2) achsig-symmetrisch in Bezug auf jede der beiden zu einander senkrechten Diagonalen und Symmetrieachsen.

Erkl. 337. Von den vier kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, in welche das Rhombus durch die Diagonalenhälften zerteilt wird, ist jedes von zwei mit ihm ungleichwendigen eingeschlossen, stösst also mit dem gleichwendigen nur an der Spitze, nämlich dem Scheitel des rechten Winkels zusammen. Es ist diese Zusammenstellung dadurch bedingt, dass je zwei benachbarte durch Umklappung zur Deckung gelangen, also ungleichwendig kongruent sein müssen; dass dagegen je zwei nur mit der Spitze zusammenstossende durch die halbe Umdrehung zur Deckung gelangen, also gleichwendig kongruent sein müssen. Zu bemerken ist besonders, dass wegen der Kongruenz alle vier Dreiecke auch gleiche Höhe haben (siehe Antwort 2 der Frage 131).

Erkl. 338. Die zwei kongruenten Dreiecke, in welche jede Diagonale das Rhombus teilt, kommen sowohl durch Umklappung, als durch Drehung zur Deckung, müssten also sowohl ungleich- als gleichwendig kongruent sein. Dies ist nur dadurch ermöglicht, dass diese Dreiecke eben gleichschenklig sind; denn zählt man in positiver oder negativer Umlaufsrichtung, so kommt beim gleichschenkligen Dreieck jedesmal dieselbe Grössenfolge zustande, weil die zweite und dritte Seite bezw. Winkel gleich sind.

Erkl. 339. Es ist ein wesentlicher Umstand, dass die beiden Symmetrieachsen des Rhombus zu einander senkrecht stehen; denn es wird später (siehe Frage 211 und 212) gezeigt werden, dass wenn überhaupt eine Figur zwei und nur zwei Symmetrieachsen besitzt, um welche umgewendet sie ihre vorherige Lage deckt, — dass dann notwendigerweise diese beide Symmetrieachsen einen rechten Winkel bilden müssen.

Frage 172. Wie kann ein Rhombus mittels des Dreiecks erzeugt werden?

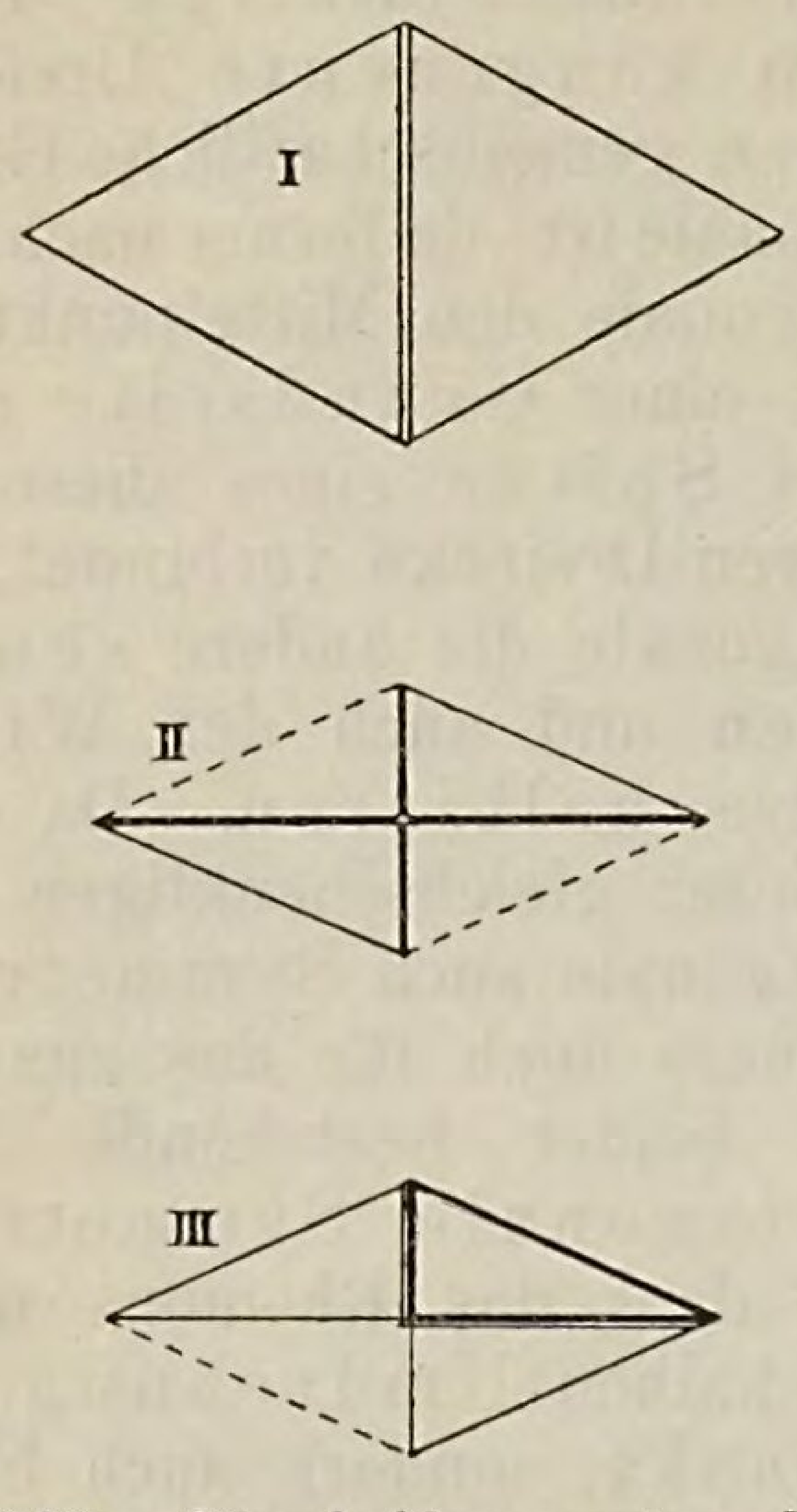
Antwort. Mittels des Dreiecks kann ein Rhombus auf dreierlei Arten erzeugt werden:

1) Man lege zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke mit den Grundseiten so aufeinander, dass die dritten Eckpunkte auf verschiedene Seiten fallen. Dann bilden die Schenkel beider Dreiecke ein Viereck mit vier gleichen Seiten, also ein Rhombus.

2) Man lege zwei gleichwendig kongruente rechtwinklige Dreiecke mit dem Scheitel des rechten Winkels so aufeinander, dass von je zwei entsprechenden Seiten die eine die Verlängerung der andern bildet. Dann bilden die Endpunkte dieser Seiten ein Viereck, von dem jede Diagonale Mittelsenkrechte der andern ist, also ein Rhombus.

3) Man lege an ein rechtwinkliges Dreieck beiderseits ein ungleichwendig kongruentes mit den entsprechenden Endpunkten der gleichen Kathete an. Dann bilden die vier Eckpunkte wieder ein Viereck, in dem jede Diagonale die Mittelsenkrechte der andern ist, also ein Rhombus.

Figur 133.



Erkl. 340. Die beiden ersten der nebenstehenden Entstehungsweisen stimmen mit der Entstehung des Parallelogramms überein, die letzte kommt neu hinzu, da das Rhombus auch achsig-, nicht bloss zentrisch-symmetrisch ist. Dabei ist die erste Ausführung noch auf zweifache, jede andere auf vierfache Art möglich, je nach demjenigen Dreieck, welches als Ausgangsfigur benutzt wird.

Frage 173. Aus welchen Eigenschaften eines Vierecks kann man erschliessen, dass dasselbe ein Rhombus sei?

Antwort. Wenn ein Viereck nicht schon die in Erklärung des Rhombus in Antwort der Frage 169 ausgesprochenen Eigenschaften besitzt, so kann man doch aus dem Vorhandensein der in den Sätzen 86 und 87 aufgeführten Eigenschaften erschliessen, dass dasselbe ein Rhombus sei. Denn entweder durch halbe Umdrehung um ein passend gewähltes Symmetriezentrum oder durch Umklappung um eine passende Achse lässt sich beweisen, dass jedes Viereck die Eigenschaften eines Rhombus besitzt,

1) wenn alle vier Seiten gleich sind,

2) wenn zwei Gegenseiten parallel sind und eine Diagonale zwei Gegenwinkel halbiert,

Erkl. 341. Zum Beweise der ersten der nebenstehenden Behauptungen bemerke man, dass durch jede Diagonale beiderseits kongruente gleichschenklige Dreiecke gebildet werden, die durch Umdrehung und Umwendung zur Deckung kommen. Im zweiten Falle müssen wegen der zwei parallelen Gegenseiten zwei halbe Winkel an der Diagonale als Wechselwinkel gleich sein, also entstehen wieder beiderseits der gemeinsamen Diagonale wegen gleicher Winkel kongruente gleichschenklige Dreiecke. Im dritten Fall ist unmittelbar Umwendung um jede Diagonale und Umdrehung um ihren Schnittpunkt möglich.

Erkl. 342. Im vierten Falle muss die zweite Diagonale wieder gemeinsame Grundseite zweier gleichschenkligen Dreiecke werden, die gleiche Höhe haben, also kongruent sind. Im fünften und sechsten Falle klappe man das Dreieck einerseits einer Diagonale um diese um, dann gibt es jedesmal anderseits nur ein einziges mit gleichem Gegenwinkel, nämlich das achsig-symmetrische, so dass das Viereck die beiden Diagonalen zu Symmetrieachsen haben muss. Der letzte Fall liefert wegen der supplementären entgegengesetzten Winkel die parallelen Gegenseiten, wie im zweiten Falle.

3) wenn jede Diagonale die Mittelsenkrechte der andern ist,

4) wenn eine Diagonale einen Winkel halbiert und selber von der andern senkrecht halbiert wird,

5) wenn je zwei Gegenwinkel gleich sind und eine Diagonale die andere senkrecht trifft,

6) wenn jede Diagonale ihre beiden Viereckswinkel halbiert,

7) wenn eine Diagonale einen Winkel halbiert und die benachbarten Winkel supplementär sind — u. s. w.

Frage 174. In welcher Beziehung steht das Rhombus zu den bisher betrachteten Vierecken?

Antwort. Das Rhombus ist ein besonderes Trapez, in welchen nämlich nicht nur, wie beim Parallelogramm, die Schenkel unter sich parallel und gleich, sondern auch die Grundseiten gleich sind. Daher behalten auch für das Rhombus sämtliche Sätze über das Trapez ihre Gültigkeit.

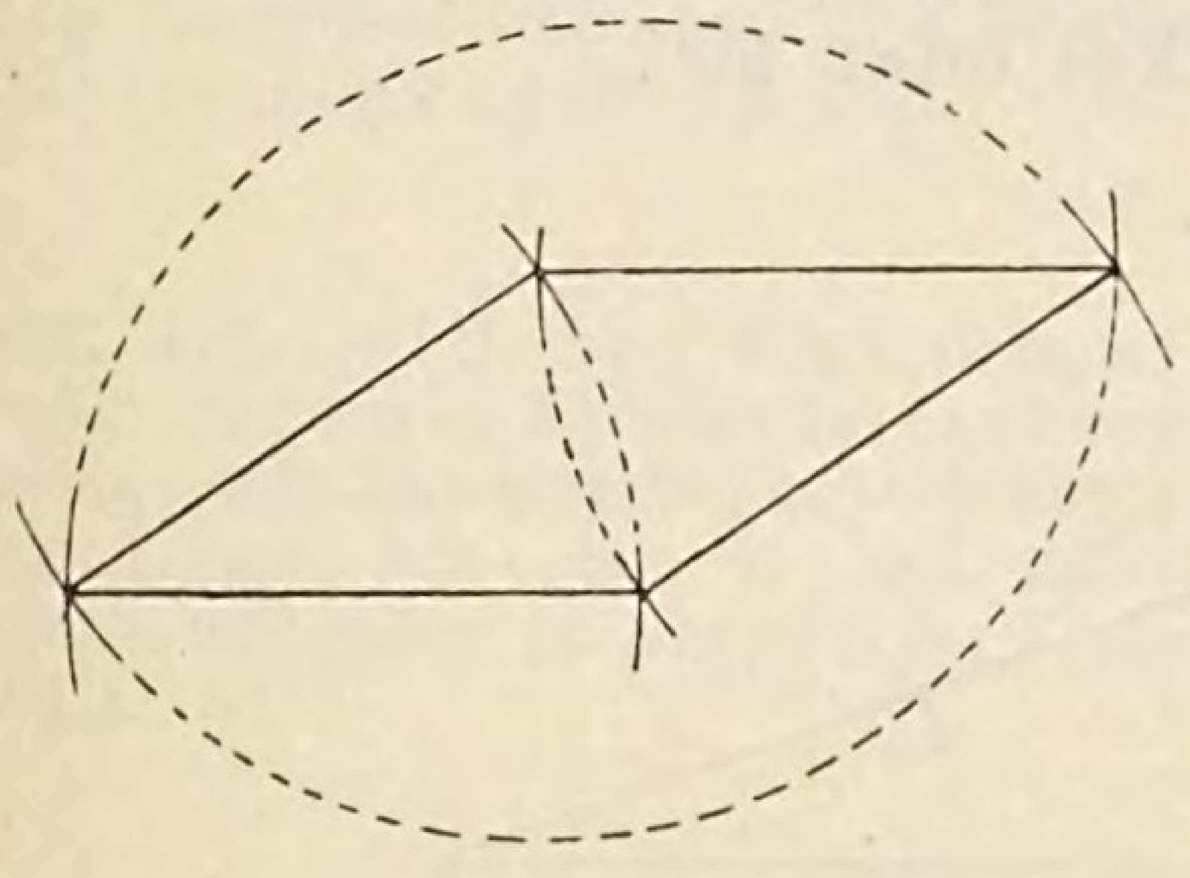
Aus dem Antiparallelogramm dagegen lässt sich ein allgemeines Rhombus nicht herstellen, da in demselben nur bei rechten Winkeln auch an den Grundseiten zwei benachbarte Winkel supplementär werden können.

Aus dem Deltoid aber entsteht ein Rhombus, wenn nicht nur die an den ungleichen Winkeln, sondern auch die an gleichen Winkeln anstossenden Seiten gleichlang werden. Denn dann werden alle vier Seiten gleich, und man erhält das Rhombus als besonderen Fall des Deltoids, so dass also alle Sätze über das Deltoid auch für das Rhombus ihre Gültigkeit behalten.

Das Parallelogramm aber wird zu einem Rhombus entweder, wie schon in dessen Erklärung ausgesprochen, indem zwei an derselben Ecke anliegende Seiten gleich werden, oder wenn die Diagonalen die Gegenwinkel halbieren, oder wenn die Diagonalen senkrecht werden. Daher können weder das Trapez, noch das Deltoid, noch das Parallelogramm, wohl aber das Antiparallelo-

Erkl. 343. Wie beim Deltoid, so sind auch beim Rhombus Kreislinien zu zeichnen, die jeweils in einer Ecke ihren Mittelpunkt haben, die Länge der gemeinsamen Rhombusseite als Radius haben, und einander zu je zweien in den benachbarten Eckpunkten schneiden (vergl. Erkl. 313).

Figur 134.



Erkl. 344. Auch im Rhombus können je zwei Gegenseiten als Grundseiten gelten; ihr Abstand als Höhe ist beidemale derselbe. (Vergl. Erkl. 337 am Schluss und Satz 87a.)

Erkl. 345. Entsprechend seinem Anschluss an das Deltoid kann das Rhombus erzeugt werden als achsig-symmetrisches Liniengebilde zweier Paare von gleichlangen achsig-symmetrischen Strecken durch zwei symmetrische Punkte (nicht aber ebenso als achsig-symmetrisches Punktgebilde, weil zwei seiner Ecken selbst auf der Symmetrieachse liegen müssen, also als selbstentsprechende Punkte keine neuen erzeugen).

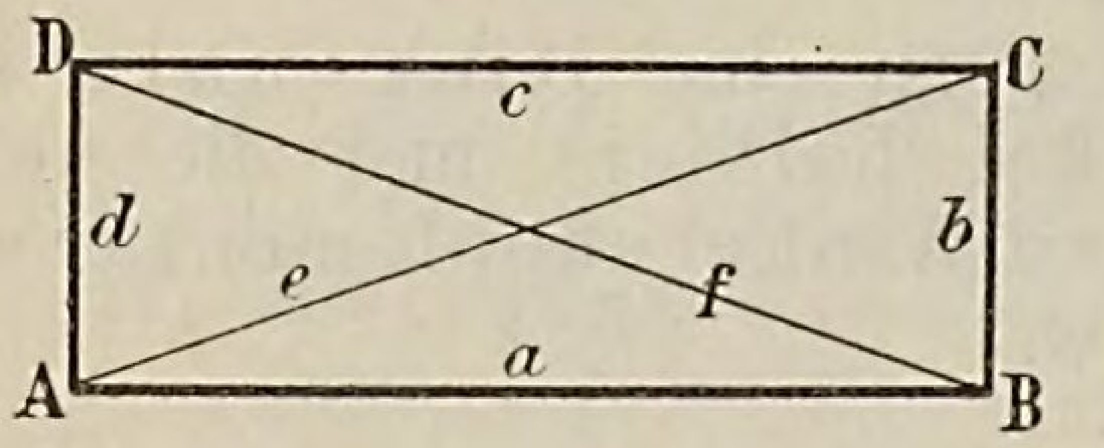
Erkl. 346. Dass die nebenstehenden Abänderungen des || grs jeweils ein Rhombus erzeugen, ist aus den entsprechenden Fällen der vorigen Frage 173 zu entnehmen.

gramm Eigenschaften besitzen, welche im Rhombus nicht ebenfalls Gültigkeit haben.

δ^2) Ueber das Rechteck.

Frage 175. Was ist ein Rechteck?

Figur 135.



Antwort. Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, in welchem zwei aneinanderstossende Seiten einen rechten Winkel bilden, und heisst daher auch rechtwinkliges Parallelogramm.

Frage 176. Welche Eigenschaften des Rechtecks ergeben sich aus der in voriger Antwort der Frage 175 gegebenen Erklärung desselben?

Erkl. 347. In Figur 135 hat man:
1) weil dieselbe ein || gr ist $\sphericalangle \alpha = \gamma$
und $\sphericalangle \beta = \delta$;
kommt dazu noch 2) $\sphericalangle \alpha = 90^0$,
so muss auch:

$$\gamma = 90,\ \beta + \delta = 360 - 180 = 180,$$

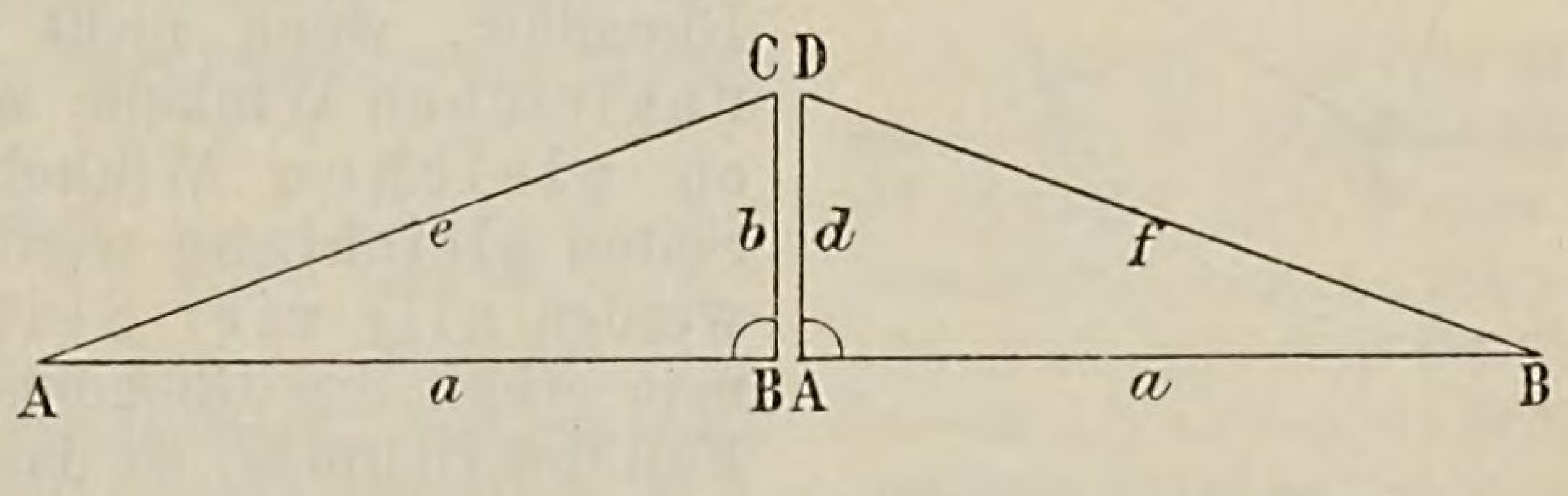
also:

$$\beta = \frac{180}{2} = 90^0 \text{ und } \delta = \frac{180}{2} = 90^0 \text{ sein.}$$

Antwort. Da das Rechteck ein Parallelogramm ist, so sind je zwei Gegenwinkel gleich und je zwei benachbarte supplementär; da also ein Winkel ein rechter ist, so müssen alle vier Winkel rechte sein, und man kann aussagen:

Satz 88. Im Rechteck sind alle vier Winkel gleich, nämlich rechte Winkel oder 90^0.

Figur 136.



Frage 177. Welcher Art sind die von den Diagonalen im Rechteck gebildeten Dreiecke?

Erkl. 348. In Figur 136 sind zwei dieser Dreiecke einzeln herausgezeichnet, welche von je einer Diagonale mit zwei Seiten gebildet werden, nämlich a, d, f und a, b, e. In denselben ist:
1) $\sphericalangle(ad) = \sphericalangle(ab) = 90^0$
2) $a = a$
3) $d = b$,
also $\triangle adf \cong abe$, so dass auch $e = f$.

Antwort. Da jeder Winkel des Rechtecks 90^0 beträgt, so sind die von je einer Diagonalen als Hypotenuse mit je zwei Seiten gebildeten Dreiecke rechtwinklige. Da ferner je zwei Gegenseiten des Rechtecks gleich sein müssen, so muss jede Kathete eines solchen rechtwinkligen Dreiecks einer Kathete eines andern derselben gleich sein. Demnach sind in diesen Dreiecken der

Erkl. 349. Von diesen grossen kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, in welche das Rechteck durch je eine Diagonale zerlegt wird, sind je zwei Paar von derselben Diagonale gebildete zentrisch-symmetrische gleichwendig kongruent, je zwei Paar von verschiedenen Diagonalen gebildete ungleichwendig kongruent.

Erkl. 350. Je ein Basiswinkel des einen der vier kleinen Dreiecke bildet mit dem anstossenden Winkel des benachbarten Dreiecks einen der vier rechten Winkel, sie sind also miteinander komplementär; je ein Winkel an der Spitze bildet mit dem anstossenden Winkel des benacbarten Dreiecks einen der gestreckten Winkel an einer Diagonale, also sind diese supplementär.

Erkl. 351. Da die Winkelhalbierenden zweier Scheitelwinkel nach Satz 9 des zweiten Teiles eine Gerade bilden, so muss die Winkelhalbierende eines Diagonalenwinkels in den beiden gleickschenkligen Dreiecken Mittelsenkrechte der Grundseite, also Mittelsenkrechte zweier Gegenseiten sein.

Erkl. 352. Die kongruenten gleichschenkligen Dreieckspaare, welche im Rechteck gebildet werden, müssen bei halber Umdrehung und bei Umklappung zur Deckung gelangen, müssen also sowohl gleich- als ungleichwendig kongruent sein; und dies ist eben nur bei gleichschenkligen der Fall.

Erkl. 353. Auch hier folgt daraus, dass zwei und nur zwei Symmetrieachsen vorhanden sind, mit Notwendigkeit deren senkrechte Lage, wie oben in Erkl. 339 schon angedeutet und später (s. Antwort der Frage 212) ausgeführt ist.

Erkl. 354. Schon in Erkl. 351 ist ausgeführt, dass die Winkelhalbierende zweier Diagonalen Mittelsenkrechte zweier Gegenseiten sein muss; ist aber eine Linie nur auf der einen Seite eines Rechtecks als Mittelsenkrechte gegeben, so muss sie wegen der gleichschenkligen Dreiecke Winkelhalbierende der beiden Scheitelwinkel der Diagonalen, also auch für die Grundseite des entgegengesetzten gleichschenkligen Dreiecks zum zweitenmale Mittelsenkrechte sein. Eine Mittelparallele zu zwei Gegenseiten aber muss, da zwei anstossende Seiten senkrecht sind, ebenfalls senkrecht sein, also Mittelparallele und gleichzeitig auch Mittelsenkrechte, sowie Winkelhalbierende der Diagonalen sein.

rechte Winkel und die zwei ihn einschliessenden Katheten gleichgross, also sind auch die Hypotenusen, nämlich die Diagonalen gleichlang. Alsdann müssen aber auch deren vier Hälften gleichlang sein, also sind die vier Dreiecke, in welche das Rechteck, durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, gleichschenklige Dreiecke mit lauter gleichen Schenkeln und komplementären Basiswinkeln, aber supplementären Winkeln an der Spitze. Nach Antwort der Frage 82b sind von ihnen je zwei zentrisch-symmetrische gleichwendig kongruent. Jedes dieser gleichschenkligen Dreiecke hat eine Symmetrieachse, welche den Winkel an der Spitze halbiert und Mittelsenkrechte der Grundseite, also der Rechtecksseite ist. Zugleich halbiert dieselbe Achse aber auch den Scheitelwinkel an ihrer Spitze, also den Winkel an der Spitze des zentrisch-symmetrischen Dreiecks, und daher auch dessen Grundseite, nämlich die Gegenseite des Rechtecks: sie ist also Mittelparallele der andern Gegenseiten. Da also das eine Paar Gegenseiten auf dem andern senkrecht ist — oder da am Mittelpunkt die Winkelhalbierenden von Nebenwinkeln entstehen, so sind diese Symmetrieachsen senkrecht aufeinander; und beim Umklappen fallen je zwei der Dreiecke, also das ganze Rechteck auf seine vorige Lage zurück. Man erhält also ausser den auch für das Rechteck vollständig geltenden Sätzen 81 bis 83 des Parallelogramms noch folgende besonderen Sätze:

Satz 89. Jede Diagonale des Rechtecks teilt dasselbe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke; die vier Diagonalenhälften teilen das Rechteck in vier zu zwei Paaren kongruente gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Scheiteln.

Satz 89a. Im Rechteck sind die Diagonalen einander gleich und halbieren sich gegenseitig.

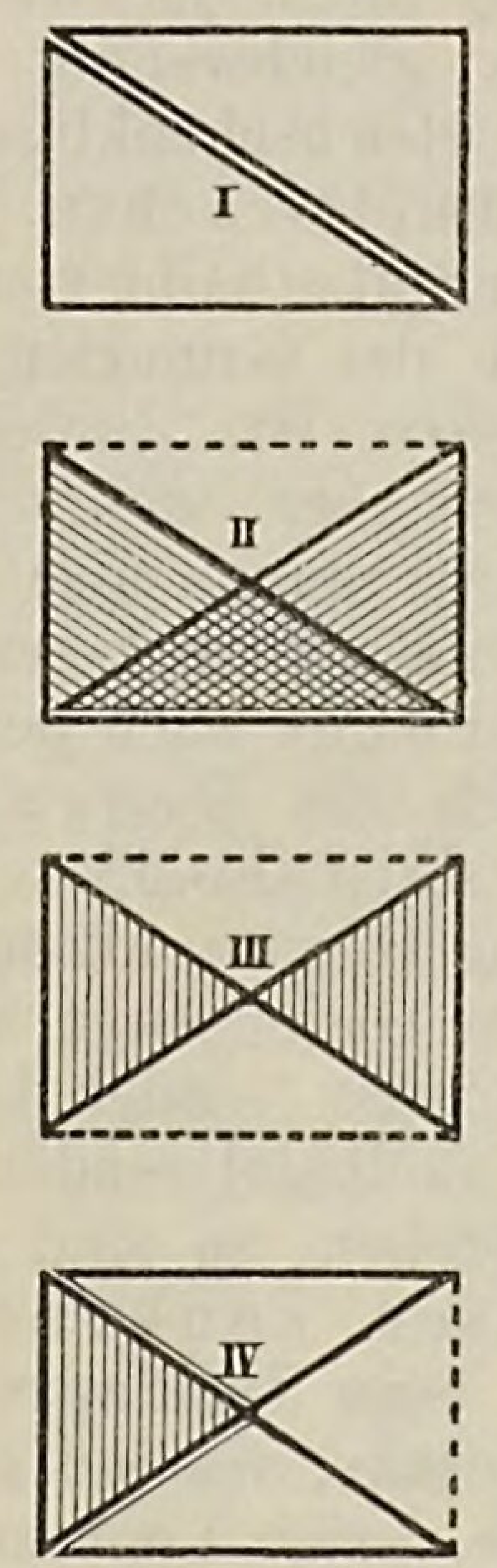
Satz 89b. Das Rechteck ist:

1) zentrisch-symmetrisch in Bezug auf den Diagonalenschnittpunkt als Symmetriezentrum,

2) achsig-symmetrisch in Bezug auf jede der beiden zu einander senkrechten Mittelsenkrechten je zweier Gegenseiten oder Mittelparallelen zweier Gegenseiten oder Winkelhalbierenden zweier Diagonalen.

Frage 178. Wie lässt sich ein Rechteck mittels des Dreiecks erzeugen?

Figur 137.



Antwort. Mittels des Dreiecks kann man auf viererlei Weise ein Rechteck erzeugen:

1) Man lege von zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken die nicht entsprechenden Endpunkte der Hypotenuse so aufeinander, dass die dritten Eckpunkte nach verschiedenen Seiten fallen. Dann bilden die andern vier Seiten ein Viereck mit je zwei gleichen Gegenseiten und zwei rechten Winkeln, also ein Rechteck.

2) Man lege von zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken die nicht entsprechenden Endpunkte einer entsprechenden Kathete so aufeinander, dass die dritten Eckpunkte nach der gleichen Seite fallen. Dann bilden die andern zwei Eckpunkte mit den ersten ein Viereck mit zwei gleichen und parallelen Gegenseiten und zwei rechten Winkeln, also ein Rechteck.

3) Man lege zwei gleichwendig kongruente gleichschenklige Dreiecke mit der Spitze so aufeinander, dass je ein Schenkel des einen die Verlängerung eines Schenkels des andern werde; dann bilden die andern Eckpunkte ein Viereck mit gleichen und parallelen Gegenseiten und gleichen Diagonalen, oder ein Rechteck.

4) Man lege an ein gleichschenkliges Dreieck an die Schenkel beiderseits ein anderes mit gleichen Schenkeln und supplementären Winkeln an der Spitze oder komplementären Basiswinkeln an. Dann bilden die vier Eckpunkte ein Viereck mit gleichen Diagonalen und einem rechten Winkel, also ein Rechteck.

Erkl. 355. Nach der ersten Erzeugungsart entsteht ein Rechteck, wenn zwei Winkelscheite von der in Erkl. 199 erwähnten Gestalt mit den Hypotenusen in der nebenstehenden Weise aneinandergesetzt werden.

Erkl. 355 a. Sind in einem Viereck je zwei Gegenseiten gleich oder parallel, so ist dasselbe nach Antw. der Frage 166 ein || gr; sind auch noch zwei rechte Winkel vorhanden, so muss es ein Rechteck sein. Man könnte nach nebenstehender ersten Erzeugungsweise auch unmittelbar die vier Rechten nachweisen, da zwei nicht entsprechende Winkel der kongruenten rechtwinkligen Dreiecke nebeneinander kommen, also zwei Komplementwinkel, deren Summe 90° beträgt.

Erkl. 356. Für die dritte und vierte Art der Erzeugung war schon aus Antwort der Frage 106 zu erschliessen, dass ein Viereck mit vier rechten Winkeln entstehen muss, denn vom Mittelpunkt gehen drei gleichlange Strahlen

aus, von denen zwei einen gestreckten Winkel bilden. Folglich müssen nach Satz 60 ihre Endpunkte jeweils einen rechten Winkel bestimmen.

Frage 179. Aus welchen Eigenschaften eines Vierecks lässt sich erschliessen, dass dasselbe ein Rechteck sei?

Antwort. Wenn ein Viereck nicht schon die in der Erklärung des Rechtecks in Antwort der Frage 175 ausgesprochenen Eigenschaften hat, so kann man doch aus dem Vorhandensein der in den Sätzen 88 und 89 aufgeführten Eigenschaften erschliessen, dass dasselbe ein Rechteck sei. Denn entweder durch Umklappung um eine passend gewählte Symmetrieachse oder durch halbe Umdrehung um ein passend gewähltes Symmetriezentrum lässt sich beweisen, dass jedes Viereck die Eigenschaften eines Rechtecks besitzt,

1) wenn alle vier Winkel rechte sind,

2) wenn ein Paar Gegenseiten parallel und die Mittelsenkrechte einer andern Seite auch Mittelsenkrechte der Gegenseite ist,

3) wenn die Diagonalen gleichlang sind und einander gegenseitig halbieren,

4) wenn je zwei Gegenseiten parallel und die Diagonalen gleichlang sind,

5) wenn zwei benachbarte Winkel Rechte, und die Diagonalen gleich lang sind,

6) wenn ein Winkel ein rechter und eine Seite der Gegenseite gleich und parallel ist, — u. s. w.

Erkl. 357. Sind alle Viereckswinkel rechte (1), so müssen wegen supplementärer entgegengesetzter Winkel je zwei Gegenseiten parallel, also auch gleich sein. — Ist die Mittelsenkrechte einer Seite auch solche der Gegenseite (2), so ist das Viereck nach Antwort 1 der Frage 155 ein Antiparallelogramm. Sind also auch noch die andern Gegenseiten parallel, so sind alle Winkel rechte. — Dass bei gleichlangen Diagonalenhälften (3) der Winkel an jeder Ecke ein rechter sein muss, folgt aus Satz 60, wie schon in Erkl. 356 ausgeführt wurde.

Erkl. 358. Wenn je zwei Gegenseiten gleichlang (4) sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm, so dass die Diagonalen einander halbieren. Sind sie also auch gleich, so sind dies auch ihre Hälften, und daher werden nach Vorigem sämtliche Winkel rechte. — Bei gleichen Diagonalen (5) hat man nach Antwort 5 der Frage 155 ein Antiparallelogramm, also supplementäre Gegenwinkel. Sind diese also auch noch gleich, so müssen sämtliche Rechte sein. —

Frage 180. In welcher Beziehung steht das Rechteck zu den bisher betrachteten Vierecken?

Antwort. Das Rechteck ist ein besonderes Trapez, in welchem nämlich die Schenkel nicht nur, wie beim Parallelogramm, unter sich parallel, sondern auch zur Grundseite senkrecht sind. Daher behalten auch für das Rechteck sämtliche Sätze über das Trapez ihre Gültigkeit.

Aus dem Antiparallelogramm entsteht ebenso ein Rechteck, wenn

Erkl. 359. Auch im Rechteck können je zwei Gegenseiten als Grundseiten gelten und dann die Länge der andern als Höhe, da sie den senkrechten Abstand beider Grundseiten angeben.

Erkl. 360. Entsprechend seinem Anschluss an das Antiparallelogramm kann das Rechteck erzeugt werden als achsig-symmetri-

sches Punktgebilde zweier Paare von achsigsymmetrischen Punkten im gleichen Abstand von der Achse (nicht aber ebenso als achsigsymmetrisches Liniengebilde, weil zwei seiner Seiten selbst auf der Achse senkrecht stehen müssen, also als selbstentsprechende Geraden keine neuen erzeugen).

Erkl. 361. Dass die beiden Abänderungen des Parallelogramms, welche im Nebenstehenden angegeben sind, jeweils ein Rechteck ergeben, ist aus den entsprechenden Fällen der vorigen Frage 179 zu entnehmen. Denn ein Parallelogramm mit gleichen Diagonalen ist der vierte voriger Fälle, wo nur die Eigenschaft paralleler Gegenseiten an Stelle des Namens des Parallelogramms angewandt wurde.

Erkl. 362. Die dualistische Gegenüberstellung von Rechteck und Rhombus geht schon hervor aus deren Anschluss an die dualistischen Figuren, Antiparallelogramm und Deltoid, deren erstes das achsig-symmetrische Viereck, deren zweites das achsig-symmetrische Vierseit darstellte.

Bei der Bildung der zentrisch-symmetrischen Figur dagegen blieben das Viereck und Vierseit vereint als Parallelogramm, solange keine besondern Eigenschaften hinzukommen. Treten dagegen diese hinzu als gleiche Winkel bezw. gleiche Seiten, so tritt auch die Spaltung in dualistische Zweiheit wieder ein, und hört erst wieder auf, wenn das erstere zu seinen gleichen Winkeln auch noch gleiche Seiten, das zweite zu den gleichen Seiten auch noch gleiche Winkel erhält.

einer der Winkel ein rechter wird. Denn da die Gegenwinkel und die am gleichen Schenkel supplementär sind, so werden alle Winkel rechte und man erhält das Rechteck als besondern Fall des Antiparallelogramms, so dass alle Sätze über das Antiparallelogramm auch für das Rechteck in Gültigkeit bleiben.

Dagegen lässt sich aus dem Deltoid ein allgemeines Rechteck nicht herstellen, denn nach Antwort 167 müssten schon um ein Parallelogramm zu liefern, die vier Deltoidseiten gleichlang werden. Sollte also auch noch ein rechter Winkel hinzukommen, so erhielte man den besondern Fall des gleichseitigen Rechtecks.

Ein Parallelogramm aber wird zu einem Rechteck entweder, wie in des letzteren Erklärung ausgesprochen, indem ein Winkel Rechter wird, oder wenn die Diagonalen gleichlang werden.

Daher können weder das Trapez, noch das Antiparallelogramm oder das Parallelogramm, wohl aber das Deltoid Eigenschaften besitzen, welche im Rechteck nicht ebenfalls Gültigkeit besitzen.

Mit dem Rhombus ist das Rechteck dualistisch verwandt, denn aus dem

Parallelogramm als Vierseit entsteht das Rhombus, wenn zwei an derselben Ecke anstossende Seiten gleich werden, so dass alle vier Seiten gleich werden und je zwei Gegenwinkel eine gemeinsame Winkelhalbierende besitzen, nämlich als eine Symmetrieachse des Rhombus.	Parallelogramm als Viereck entsteht das Rechteck, wenn zwei an derselben Seite anliegende Winkel gleich werden, so dass alle vier Winkel gleich werden und je zwei Gegenseiten eine gemeinsame Mittelsenkrechte besitzen, nämlich als eine Symmetrieachse des Rechtecks.

δ^3) Ueber das Quadrat und seine gemeinschaftlichen Beziehungen mit den übrigen Vierecken.

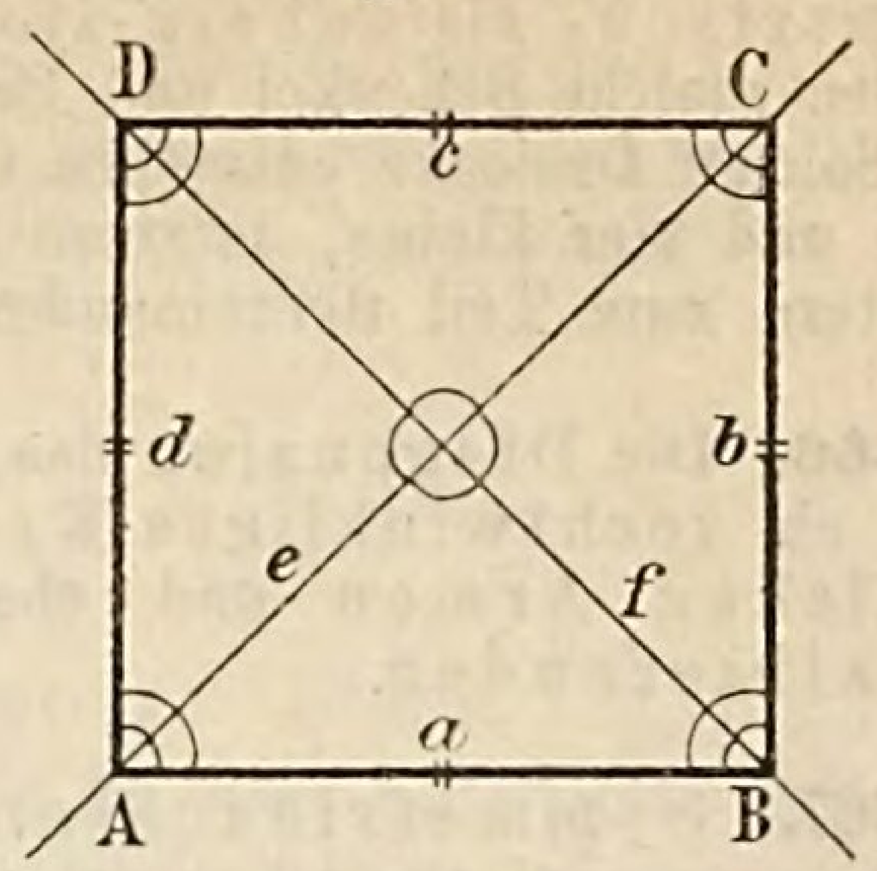
Frage 181. Was ist ein Quadrat?

Antwort. Ein Quadrat ist ein Parallelogramm, in welchem zwei aneinanderstossende Seiten einander gleich sind und einen rechten Winkel miteinander bilden.

Erkl. 363. Das Parallelogramm selbst heisst im Gegensatz zu Rhombus, Rechteck und Quadrat auch das „allgemeine Parallelogramm“ oder das „schiefwinklig-ungleichseitige || gr“; entsprechend heisst dann das

Rhombus auch „schiefwinklig-gleichschenkliges || gr", das Rechteck „rechtwinklig-ungleichseitiges || gr", das Quadrat „rechtwinklig-gleichseitiges || gr".

Figur 138.



Frage 182. Welche Eigenschaften des Quadrats ergeben sich aus der Erklärung desselben?

Erkl. 364. Wird im Rhombus ein Winkel ein Rechter, so wird zunächst sein Gegenwinkel auch ein Rechter und seine beiden benachbarten als Supplementwinkel des Rechten ebenfalls gleich 90⁰. — Wird im Rechteck eine Seite gleich der anstossenden, so wird jeder dieser beiden auch ihre Gegenseite gleich gross, also alle vier Seiten gleich gross.

Antwort. Nach der Erklärung des Quadrats ist dasselbe Rhombus und Rechteck zugleich, nämlich

1) ein Rhombus, in welchem ein Winkel ein Rechter, oder

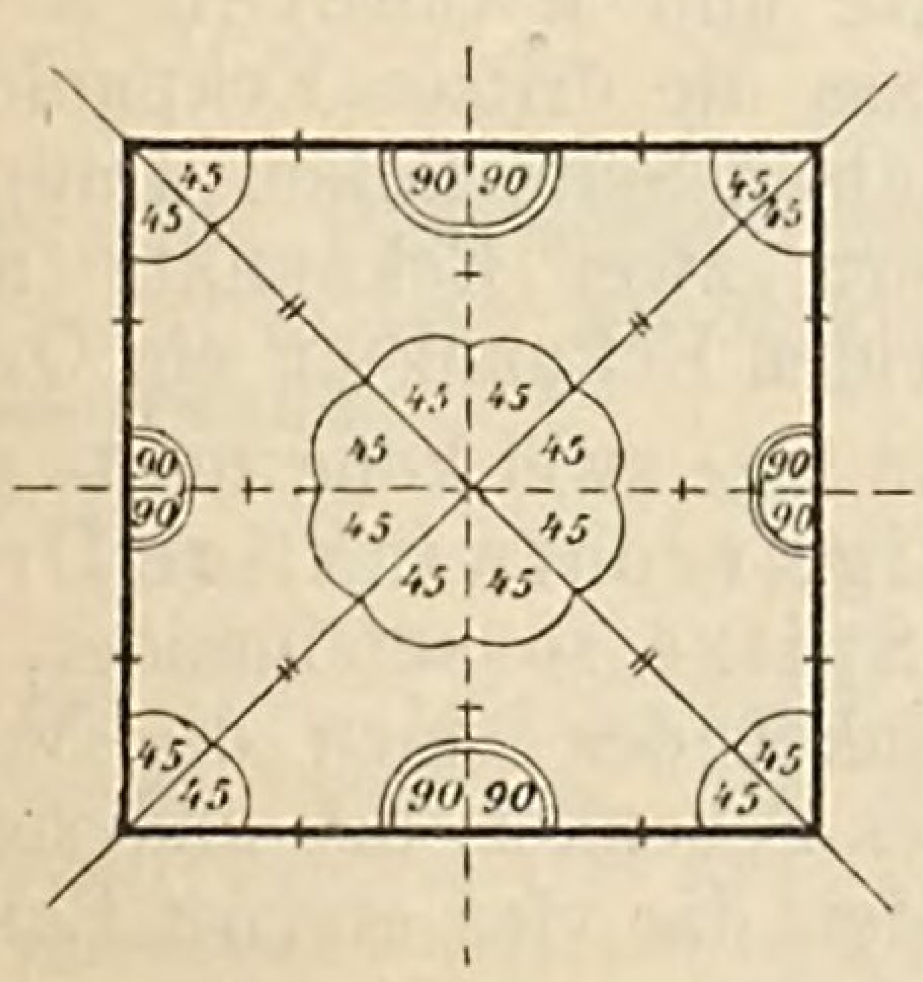
2) ein Rechteck, in welchem zwei anstossende Seiten gleich sind.

Demnach sind beim Quadrat auch die sämtlichen Eigenschaften von Rhombus und Rechteck vereint.

Satz 90. In jedem Quadrat sind die sämtlichen Seiten gleich und die sämtlichen Winkel gleich, nämlich jeder gleich 90^0 oder ein Rechter.

Frage 183. Welche Eigenschaften der Diagonalen und der Symmetrie des Quadrats ergeben sich aus der Vereinigung dieser Eigenschaften von Rhombus und Rechteck?

Figur 139.



Erkl. 365. Die sämtlichen gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke, in welche das Quadrat durch die Diagonalen und bezw. deren Hälften geteilt wird, sind sowohl gleichwen-

Antwort. Durch Vereinigung der Eigenschaften von Rhombus und Rechteck ergibt sich für das Quadrat:

Satz 91. Jede Diagonale des Quadrats teilt dasselbe in zwei kongruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke; die vier Diagonalenhälften teilen das Quadrat in vier kongruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke.

Satz 91a. In jedem Quadrat sind die Diagonalen gleichlang, halbieren sich gegenseitig, stehen senkrecht aufeinander, und halbieren die Winkel, durch welche sie gehen.

Satz 91b. Das Quadrat ist:

1) zentrisch-symmetrisch in Bezug auf den Diagonalenschnittpunkt als Symmetriezentrum,

dig, als ungleichwendig kongruent, nämlich sowohl zentrisch- als achsig-symmetrisch, weil sie eben gleiche Schenkel und Basiswinkel haben. — Solcher Dreiecke entstehen im ganzen vier grosse und vier kleine, letztere nebeneinander, erstere zum Teil übereinander liegend.

Erkl. 366. Die Diagonalen des Quadrats bilden also ein rechtwinkliges Kreuz mit vier gleichen Armen und ebenso ihre Winkelhalbierenden.

Erkl. 367. Symmetrieachsen hat das Quadrat im ganzen vier; und zwar müssen die Symmetrieachsen bei jeder Figur, die deren vier hat, miteinander gleiche Winkel bilden, nämlich $\frac{360}{8} = 45^0$. In der That bilden beim Quadrat die Diagonalen miteinander Winkel von 90^0, mit ihren Winkelhalbierenden also Winkel von 45^0. — Daher kommt das Quadrat auch mit sich selbst zur Deckung durch eine Drehung um den Mittelpunkt um den Betrag von 90^0 (siehe Frage 212).

2) achsig-symmetrisch in Bezug auf jede der beiden zu einander senkrechten Diagonalen als Symmetrieachse,

3) achsig-symmetrisch in Bezug auf jede der beiden zu einander senkrechten Mittelsenkrechten oder Mittelparallelen zweier Gegenseiten oder die Winkelhalbierenden zweier Diagonalen.

Frage 184. Wie lässt sich ein Quadrat mittels des Dreiecks erzeugen?

Antwort. Das Quadrat lässt sich erzeugen nur mittels des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, und zwar auf folgende vierfache Weise:

1) Man lege zwei kongruente rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke mit der Hypotenuse aufeinander, so dass die dritten Eckpunkte nach verschiedenen Seiten fallen. Dann bilden die andern vier Seiten ein Quadrat.

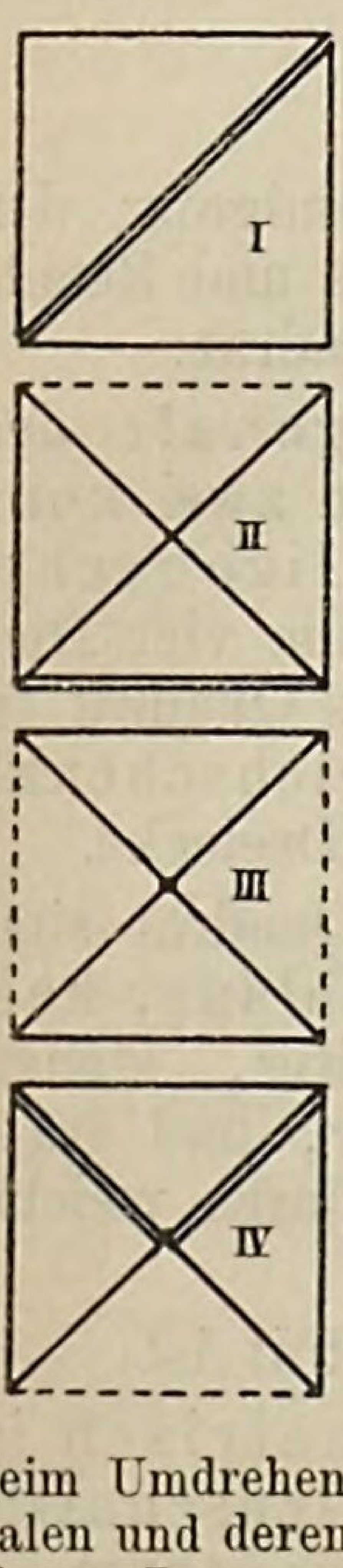
2) Man lege von zwei kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken die nicht entsprechenden Eckpunkte und Katheten so aufeinander, dass die dritten Eckpunkte nach der gleichen Seite fallen. Dann bilden die andern zwei Eckpunkte mit den ersten beiden Eckpunkten ein Quadrat.

3) Man lege zwei kongruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke mit der Spitze so aufeinander, dass je ein Schenkel des einen die Verlängerung eines Schenkels des andern bildet; dann bilden die vier andern Eckpunkte ein Quadrat.

4) Man lege an die Schenkel eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks beiderseits ein kongruentes

Erkl. 368. Nach der ersten Erzeugungsart entsteht ein Viereck, worin je zwei Gegenseiten und anstossende Seiten gleich sind, und auch zwei rechte Winkel bilden. Also ist die Figur ein || gr mit gleichen Seiten und rechten Winkeln, oder ein Quadrat. Dasselbe entsteht durch Aneinanderlegen zweier Winkelscheite der in Erkl. 202 erwähnten Art.

Figur 140.



Nach der zweiten Erzeugungsweise entsteht ein Viereck, worin zwei Gegenseiten gleich und auch der dritten Grundseite gleich sind und einander parallel, weil sie auf der Grundseite senkrecht stehen. Also entsteht wieder zunächst ein || gr mit gleichen Winkeln und Seiten, oder ein Quadrat.

Erkl. 369. Nach der dritten und vierten Erzeugungsweise entsteht ein Viereck, dessen Diagonalen gleichlang sind und einander senkrecht halbieren, also ein || gr mit gleichen und senkrechten Diagonalen. Ein solches aber fällt beim Umdrehen und Umklappen um die Diagonalen und deren Winkelhalbierende stets in seine eigene Lage zurück, ist also ein Quadrat.

rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit den entsprechenden Endpunkten eines Schenkels an. Dann bilden die vier Eckpunkte ein Quadrat.

Frage 185. Aus welchen Eigenschaften eines Vierecks lässt sich erschliessen, dass dasselbe ein Quadrat ist?

Antwort. Wenn ein Viereck nicht schon die in der Erklärung des Quadrats in Antwort zu Frage 181 ausgesprochenen Eigenschaften besitzt, so kann man doch aus dem Vorhandensein der in den Sätzen 90 und 91 aufgeführten Eigenschaften erschliessen, dass dasselbe ein Quadrat sei. Denn durch Umklappung oder Umdrehung lässt sich beweisen, dass jedes Viereck sämtliche Eigenschaften des Quadrats besitzt:

1) wenn alle Seiten und Winkel gleich sind,

2) wenn die Diagonalen gleichlang sind und einander senkrecht halbieren,

3) wenn die Diagonalen gleichlang sind und die Viereckswinkel halbieren,

4) wenn die eine Diagonale ihre Viereckswinkel halbiert und die ihr anstossenden zwei Seitenpaare aufeinander senkrecht stehen,

5) wenn alle Seiten gleich sind und die Diagonalen gleich sind,

6) wenn alle Winkel gleich sind und die Diagonalen senkrecht stehen, — u. s. w.

Erkl. 370. Gleichheit der Seiten (1) bedingt ein Rhombus, Gleichheit der Winkel ein Rechteck, also die Vereinigung beider Gleichheiten ein Quadrat. — Gegenseitige Halbierung der Diagonalen (2) bedingt ein || gr, Gleichheit der Diagonalen im || gr bedingt ein Rechteck, Rechtwinkligkeit derselben ein Rhombus, Vereinigung beider Eigenschaften ein Quadrat. — Wenn die Diagonalen die Viereckswinkel halbieren (3), muss das Viereck ein Rhombus sein, sind die Diagonalen auch noch gleich, so tritt das Rechteck hinzu und erzeugt das Quadrat.

Erkl. 371. Wenn eine Diagonale ihre Viereckswinkel halbiert (4), so muss das Viereck ein Deltoid sein; sind jene Winkel auch noch als zwei rechte vorhanden, so wird dasselbe zum Quadrat. — Gleichheit der Seiten (5) bedingt ein Rhombus, tritt Gleichheit der Diagonalen hinzu, so entsteht das Quadrat. — Gleichheit der Winkel (6) bedingt das Rechteck, tritt die Rechtwinkligkeit der Diagonalen hinzu, so entsteht das Quadrat.

Frage 186. In welcher Beziehung steht das Quadrat zu den übrigen Vierecksarten?

Antwort. Das Quadrat vereinigt in sich die Eigenschaften sämtlicher bisher betrachteten Vierecke. Es ist ein Trapez, in welchem die Schenkel parallel und die Grundseiten gleichlang werden. Das Quadrat ist ein Antiparallelogramm, in welchem die beiden Grundseiten und Schenkel, also die vier Seiten sämtlich gleichlang werden. Das Quadrat ist ein Deltoid, in welchem die vier Winkel gleich, näm-

Erkl. 372. Erst beim Quadrat stellt sich die Eigenschaft wieder ein, dass es als ein Antiparallelogramm mit drei gleichen Seiten anzusehen ist, dass also auch nach Antwort zu Frage 154 die Diagonalen mit den Winkelhalbierenden zusammenfallen.

Erkl. 373. Wie ein Antiparallelogramm bestehen kann, in welchem drei Seiten gleich sind, die vierte ungleich, so kann auch ein Deltoid bestehen, in welchem drei Winkel gleich und der vierte ungleich ist. Wird aber die vierte Seite oder der vierte Winkel auch noch gleich gross, dann entsteht beide Male das Quadrat. Sind z. B. drei Seiten eines Antiparallelogramms gleich 100, so kann die vierte nach Satz 67 zwischen 0 und 300 schwanken; ist sie auch 100, so entsteht das Quadrat. Oder sind drei Winkel eines Deltoids gleich 85⁰ oder gleich 95⁰, so muss der vierte Winkel 105⁰ haben oder 75⁰; sind jene drei Winkel aber 90⁰, so muss auch der vierte Winkel 90⁰ sein, und es entsteht das Quadrat.

Erkl. 374. Die einzelnen Fälle der nebenstehenden Abänderungen an bisher betrachteten Figuren sind sämmtlich in voriger Antwort auf Frage 185 enthalten.

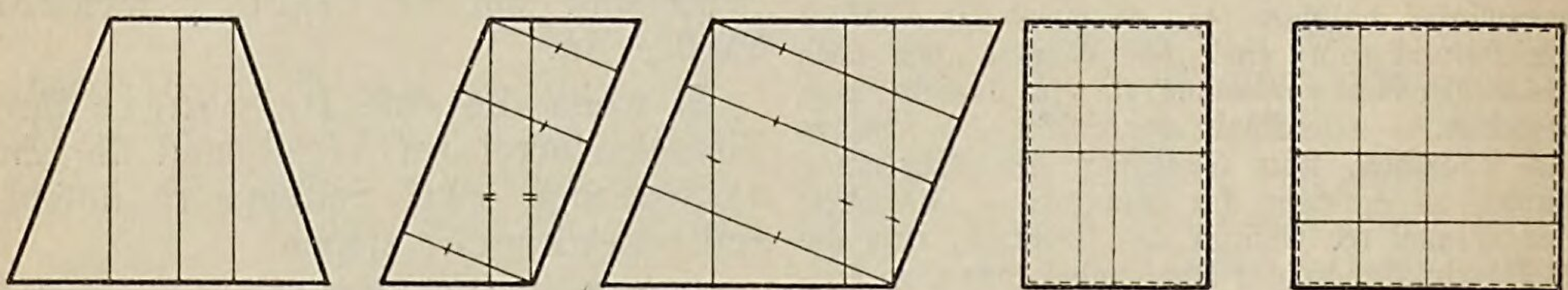
Erkl. 375. Die folgenden Fragen enthalten noch einige Durchführungen gemeinschaftlicher Eigenschaften der Vierecke für deren besondere Fälle.

lich Rechte werden. Das Quadrat ist ein Parallelogramm, in welchem zwei benachbarte Winkel und Seiten gleichlang, oder die Diagonalen gleichlang und senkrecht sind, oder Winkelhalbierende und senkrecht sind. Das Quadrat ist ein Rhombus mit rechten Winkeln oder mit gleichen Diagonalen; es ist ein Rechteck mit gleichen Seiten oder senkrechten Diagonalen.

Für das Quadrat müssen daher sämtliche Sätze ihre Gültigkeit behalten, welche bisher abgeleitet wurden für das Viereck im allgemeinen, sowie für Trapez, Antiparallelogramm, Deltoid, Parallelogramm, Rhombus und Rechteck.

Das Quadrat ist die letzte Entwicklungsstufe des Vierecks und des Vierseits sowohl in der Richtung der achsigen, als auch der zentrischen Symmetrie. Es heisst daher auch das regelmässige Viereck.

Figur 141.



Frage 187. Welche Anwendung der Begriffe von Grundseite und Höhe ist bei den verschiedenen Arten von Vierecken zu machen?

Erkl. 376. Unter den vier Eckpunkten und Seiten eines Vierecks könnten aufgestellt werden 1) Abstände der Eckpunkte unter sich, 2) Abstände der Ecken von Seiten, 3) Abstände der Seiten unter sich. Nun sind aber die Abstände der Ecken unter sich gemessen bei benachbarten durch Seitenstrecken, bei nicht benachbarten durch Diagonalen. Abstände der Ecken von Seiten lassen sich nicht allgemein aufstellen, da man bei jeder Ecke Abstände von den beiden Seiten beobachten müsste, welche nicht durch die Ecke selbst gehen. Diese Strecken sind aber die Höhen der von einer Diagonale mit je zwei Seiten gebildeten Dreiecke.

Es bleiben also zur Betrachtung übrig nur Abstände von Seiten unter sich selbst. Solche

Antwort. Beim allgemeinen Viereck und ebenso beim Deltoid findet der Begriff Grundseite und Höhe keine Anwendung.

Beim Trapez und ebenso beim Antiparallelogramm kann jede der parallelen Seiten als eine Grundseite betrachtet werden, und der Abstand der beiden Parallelen als die zugehörige Höhe.

Beim Parallelogramm kann jede Seite mit ihrer Gegenseite als Grundseitenpaar betrachtet werden, der Abstand beider parallelen Gegenseiten als zugehörige Höhe. Da aber beide Paare Gegenseiten parallel sind, so kann

sind aber bei sich schneidenden Linien nicht vorhanden und deswegen hat auch das gewöhnliche Viereck und das Deltoid keine Grundseiten und Höhen, weil dort jede Seite sämtliche drei übrigen durchschneidet. Man spricht dagegen von dem Abstande zweier Geraden, wenn diese parallel sind, und deshalb tritt der Begriff Höhe als Abstand zweier Seiten auf, so oft sich in einem Viereck ein paralleles Seitenpaar findet; und zwar nennt man dann ohne Rücksicht auf die übrigen sich schneidenden Seiten den Abstand eines solchen parallelen Gegenseitenpaares die Höhe des Vierecks. Sind daher zwei parallele Gegenseitenpaare vorhanden, so erhält man auch zweierlei Höhen des Vierecks.

Man vergleiche hierzu die in Figur 141 zusammengestellten fünf Fälle der verschiedenen Vierecksarten.

Erkl. 377. Dass zur grösseren Seite im Parallelogramm jeder Art die kleinere Höhe gehören muss, lässt sich zunächst an der Figur erkennen. Genauer Beweis dafür wird geleistet werden in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles (siehe Aufgabe 127).

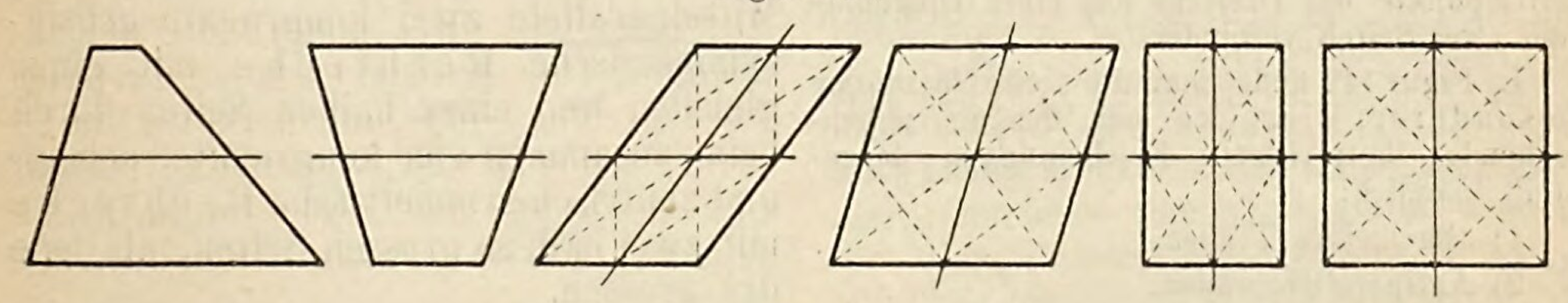
jede der vier Seiten einmal als Grundseite gelten und dazu hat man zweierlei zugehörige Höhen, nämlich auf der längeren Seite die kürzere Höhe, auf der kürzeren Seite die längere Höhe.

Beim Rhombus kann ebenso jede der vier Seiten als Grundseite gewählt werden und deren Abstand von der Gegenseite als Höhe. Da aber beim Umklappen des Rhombus um eine Diagonale als Achse das eine Gegenseitenpaar auf das andere fällt, so kommt auch der senkrechte Abstand des einen Gegenseitenpaares auf den Abstand des andern Gegenseitenpaares zu liegen, und es zeigt sich, dass die beiden Höhen im Rhombus gleichlang sind.

Beim Rechteck kann wieder jede Seite als Grundseite gewählt werden. Ihr senkrechter Abstand von der Gegenseite wird dann durch die andern beiden Seiten selbst dargestellt, und man hat wie beim allgemeinen Parallelogramm zweierlei Grundseiten und Höhen, nämlich zur langen Grundseite eine kurze Höhe, zur kurzen Grundseite die lange Höhe, und es zeigt sich, dass die Höhen des Rechtecks die Seiten selbst sind.

Beim Quadrat kann vollends jede Seite als Grundseite und jede anstossende Seite als Höhe gelten, da ja die Seiten senkrecht und gleichlang sind.

Figur 142.



Frage 188. Welche Eigentümlichkeiten weist bei den Vierecken mit einem parallelen Gegenseitenpaare die Mittelparallele derselben auf?

Erkl. 378. Im Deltoid kann ebenso wie im allgemeinen Viereck von einer Mittelparal-

Antwort. Sind in einem Viereck zwei parallele Gegenseiten, so fällt die Mittelparallele derselben zusammen mit der Verbindungslinie

leleu nicht die Rede sein. Im Trapez und Antiparallelogramm liegt auf der Mittelparallelen zwar der Mittelpunkt jeder einzelnen Diagonalen, nicht aber ihr Schnittpunkt; denn läge dieser auf der Mittelparallelen, so müssten die Diagonalen einander halbieren, wie beim || gr in der That der Fall ist. Vielmehr liegt bei Trapez und Antiparallelogramm der Schnittpunkt auf derjenigen Seite der Mittelparallelen, auf welcher die kürzere Grundseite liegt, also näher an der Seite, deren anliegende Winkel die grössere Winkelsumme bilden.

Erkl. 379. Im || gr sind beide Gegenseiten gleich und haben gleiche Winkelsumme der anliegenden Winkel, die Diagonalen halbieren einander gegenseitig, folglich muss ihr Schnittpunkt Mittelpunkt sein und auf der Mittelparallelen selber liegen. Dass die aus der Mittelparallelen durch die Seiten ausgeschnittene Strecke gleich der halben Summe der Grundseiten ist (s. Satz 75), ist bei allen Arten des || grs dadurch erfüllt, dass jene Strecke selbst beiden Grundseiten einzeln gleich ist, also auch der Hälfte ihrer Summe (vergl. Erkl. 330).

Erkl. 380. Von den vier Parallelogrammen bezw. Rhomben, Rechtecken, Quadraten, welche bei den ebenso benannten Vierecken durch die beiden Mittelparallelen ausgeschnitten werden, haben je zwei zentrisch-symmetrische die Diagonalenhälften der ganzen Figur als Diagonalen. Die andere Diagonale des kleinen Vierecks ist jeweils der andern Diagonale des grossen Vierecks parallel und ihrer Hälfte gleich nach Satz 73 und 76, da sie die Seitenmittelpunkte des Dreiecks aus einer Diagonale und zwei Seiten verbindet.

In Figur 142 findet man die sechs Gattungen besonderer Vierecke mit den im nebenstehenden betrachteten Erscheinungen dargestellt, nämlich:

1) allgemeines Trapez,
2) Antiparallelogramm,
3) allgemeines Parallelogramm,
4) Rhombus,
5) Rechteck,
6) Quadrat.

der Mittelpunkte der andern Gegenseiten oder der Diagonalen und halbiert sämtliche dieser Transversalen, also auch die Höhen.

Das Trapez wird durch die Mittelparallele in zwei Trapeze geteilt, welche die Mittellinie desselben als gemeinsame Grundseite haben; ebenso das Antiparallelogramm in zwei Antiparallelogramme mit gleicher Eigenschaft.

Das Parallelogramm hat zweierlei Mittelparallelen und wird durch jede derselben in zwei kongruente Parallelogramme zerteilt, deren jedes mit dem ursprünglichen eine Seite und alle Winkel gleich hat, aber nur die halbe andere Seite und Höhe. Durch halbe Umdrehung um den Mittelpunkt gelangen die beiden zur Deckung nach Satz 83c. Beide Mittelparallelen zusammen teilen das Parallelogramm in vier Parallelogramme, welche die Hälften beider Seitenlängen des ursprünglichen als Seiten, aber die gleichen Winkel besitzen.

Auch das Rhombus zerfällt durch jede Mittelparallele in zwei Parallelogramme mit einer gleichgrossen und einer halb so grossen Seite, aber gleichen Winkeln wie das Rhombus; durch beide Mittelparallelen zusammen aber entstehen beim Rhombus vier kongruente kleine Rhomben, da jede ihrer Seiten gleich der Hälfte der Seitenlänge der grossen ist, während die Winkel gleich bleiben.

Im Rechteck entstehen durch jede Mittelparallele zwei kongruente achsigsymmetrische Rechtecke mit einer gleichen und einer halben Seite, durch beide zusammen vier kongruente, achsig- und zentrisch-symmetrische Rechtecke mit zwei halb so grossen Seiten, als jene des grossen.

Im Quadrat bildet jede Mittelparallele zwei Rechtecke, ganz wie beim Rechteck selbst; beide Mittelparallelen zusammen aber bilden vier kleine kongruente, achsig- und zentrisch-symmetrische Quadrate mit je der halben Seitenlänge des grossen Quadrats.

Frage 189. Welche Eigentümlichkeiten zeigt nach Satz 77 in den besonderen Vierecken das Vierseit der Winkelhalbierenden?

Antwort. Das Vierseit der Winkelhalbierenden hat nach Satz 77 im Trapez zwei Ecken auf der Mittelparallelen, die daselbst liegenden Gegenwinkel sind rechte, die andern Winkel sind je die halbe Summe der Winkel an der entgegengesetzten Grundseite.

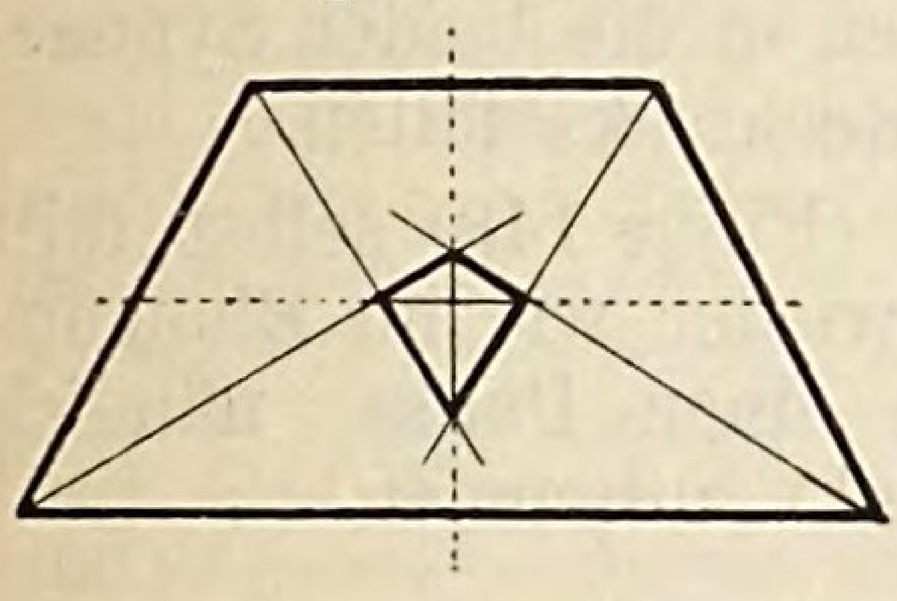
Im Antiparallelogramm (Fig. 143), wo die gemeinsame Mittelsenkrechte der Grundseiten Symmetrieachse ist, müssen sich die Winkelhalbierenden der Winkel an jeder Grundseite auf der Achse unter gleichem Winkel mit dieser schneiden, als bilden sie ein achsigsymmetrisches Viereck mit zwei symmetrisch gleichen Gegenwinkeln von 90^0. Daher bilden die Winkelhalbierenden eines Antiparallelogramms ein Deltoid, in welchem die eine Diagonale und Symmetrieachse die Symmetrieachse des Antiparallelogramms ist, die andere Diagonale aber mit der Mittelparallelen zusammenfällt und die Scheitel zweier Gegenwinkel von 90^0 verbindet. Die beiden andern (nicht symmetrischen) Gegenwinkel müssen demnach supplementär sein.

Im Deltoid (Figur 144) ist die Symmetrieachse selbst Winkelhalbierende zweier Gegenwinkel, die Halbierenden der beiden symmetrischen Gegenwinkel schneiden sich auf der Achse, also fällt das Vierseit der Winkelhalbierenden in den einzigen Achsenpunkt zusammen.

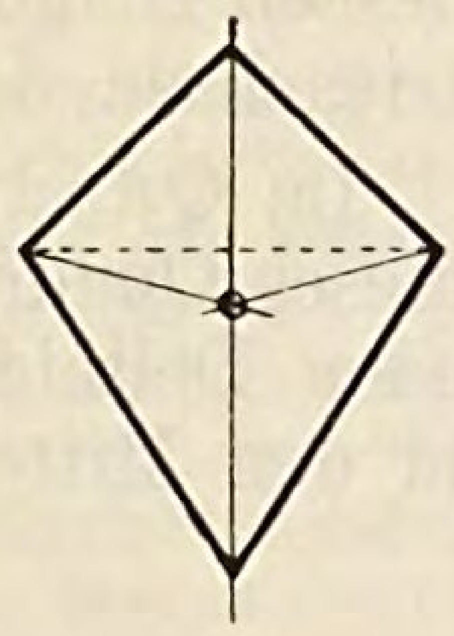
Im Parallelogramm (Fig. 145) sind benachbarte Winkel supplementär, also ihre halbe Summe gleich 90^0. Demnach bilden die Winkelhalbierenden im Parallelogramm nicht nur wie im Trapez zweimal, sondern viermal rechte Winkel: ihr Vierseit wird ein Rechteck. Seine eine Diagonale fällt wie zuvor in die eine Mittelparallele des Parallelogramms, seine andere aber in die zweite; denn Satz 77 findet Anwendung auf die erstgenannte bei Grundseiten a und c, auf die zweite bei Grundseiten b und d; — das Parallelogramm behält jedesmal die Eigenschaften als Trapez.

Erkl. 381. Ueber Eigenschaften des Vierseits der Winkelhalbierenden im allgemeinen Viereck sehe man den Abschnitt über das Sehnenviereck bei der Lehre vom Kreis im nächsten Teile dieses Buches.

Figur 143.



Figur 144.



Erkl. 382. Im Antiparallelogramm wird (vergl. Figur 143 und 119):

$\sphericalangle AGH = \sphericalangle BGH$ und $\sphericalangle DHG = \sphericalangle CHG$,

so dass GH Symmetrieachse der Geraden AG und BG, DH und CH, der Punkte P und Q, sowie der Winkel GPH und GQH wird, also $GH \perp PQ$.

Ferner ist:

$$\sphericalangle PGQ = 180^0 - \sphericalangle DHQ$$

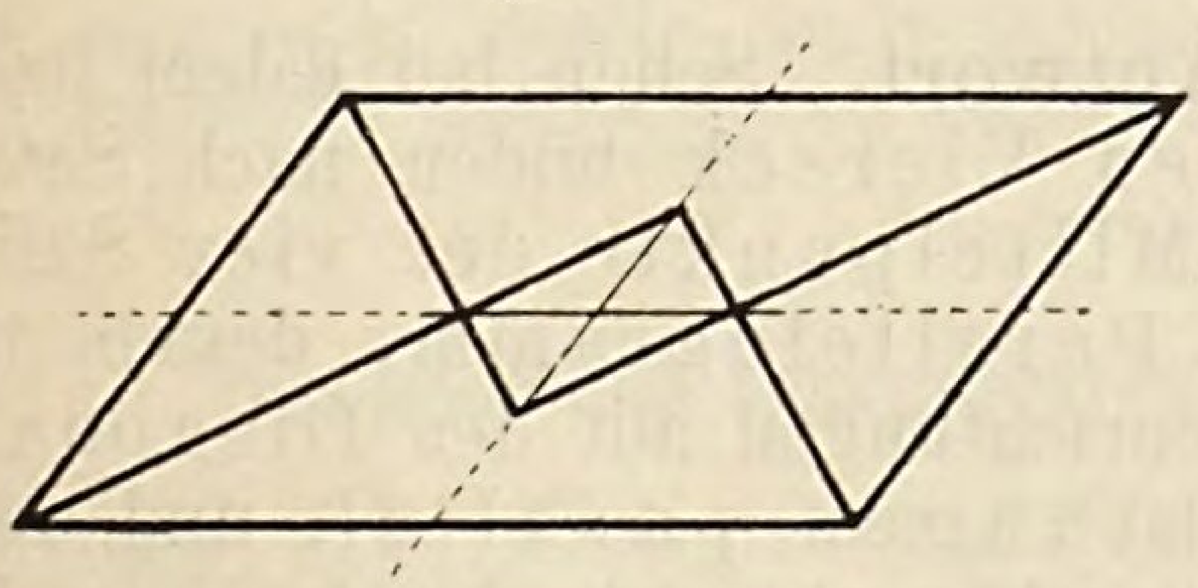
aus folgenden zwei Gründen: 1) Direkt ist:

$$\sphericalangle PGQ = 180 - (GAB + GBA)$$
$$= 180 - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180 - \frac{360 - (\gamma + \delta)}{2}$$
$$= \frac{\gamma + \delta}{2} = DCH + CDH = 180 - PHQ.$$

2) Nach Satz 77 ist:

$$\sphericalangle PGQ = \frac{\gamma + \delta}{2} = 180 - PHQ.$$

Figur 145.



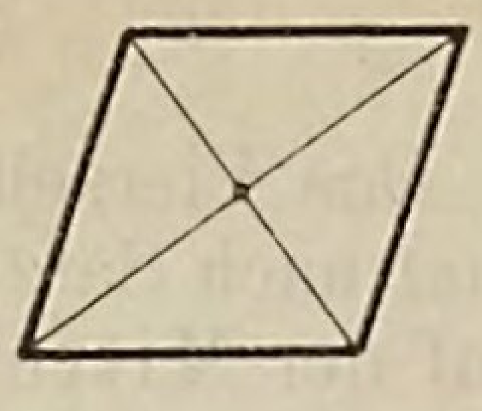
Erkl. 383. Bei Deltoid, Rhombus und Quadrat, also den drei als Vierseite abzuleitenden Figuren, wird das Vierseit der Winkelhalbierenden zu einem der in Erkl. 259 angedeuteten, bei welchen die vier Geraden durch einen Punkt gehen und so gar kein Viereck erzeugen.

Im Rhombus (Figur 146) ist jede Diagonale Winkelhalbierende ihrer beiden Viereckswinkel, also fällt das Rechteck wieder zusammen in den Mittelpunkt des Rhombus.

Im Rechteck (Figur 147) entsteht wie im Parallelogramm wieder ein Rechteck, aber dessen Diagonalen sind wegen der beiden Mittelparallelen senkrecht. Also bildet das Vierseit der Winkelhalbierenden im Reckteck ein Quadrat, dessen Diagonalen in die beiden Symmetrieachsen des Rechtecks fallen.

Im Quadrat (Figur 148) selbst fällt dieses Quadrat wieder wie im Rhombus oder Deltoid in einen Punkt, nämlich in den Mittelpunkt zusammen.

Figur 146.



Erkl. 384. Im Parallelogramm (vergl. Fig. 145 und 119) ist:

$$\alpha + \beta = 180^0 = \gamma + \delta,$$

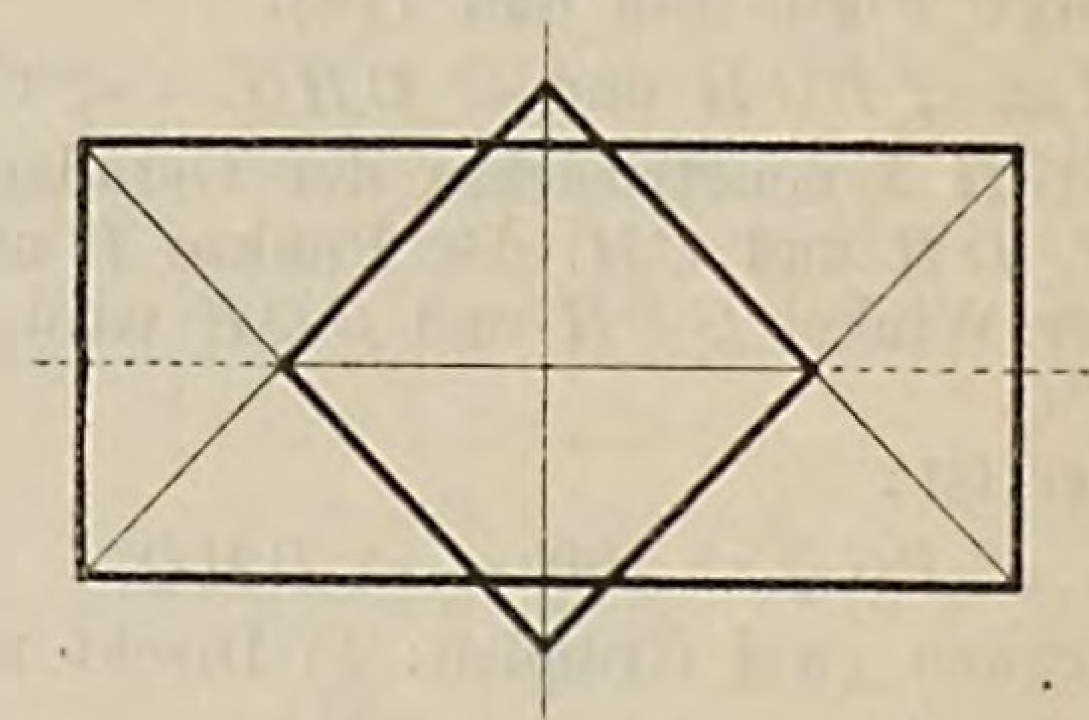
also $\sphericalangle PGQ = \frac{\gamma + \delta}{2} = 90^0 = PHQ$; ferner $HPG = HQG = 90^0$, also $PHQG$ ein Rechteck, in welchem nach Satz 83c M Mittelpunkt von PQ ist. In einem solchen muss $MPG = MGP$ sein; da aber $MP \parallel AB$ ist, so ist auch $\sphericalangle \frac{\alpha}{2} = BAP = DAG = MPG$, also sind die inneren Wechselwinkel DAG und AGM einander gleich, folglich $GH \parallel AD \parallel CB$.

Erkl. 385. Im Rechteck (vergl. Fig. 147 und 119) ist wieder jeder Winkel $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = \sphericalangle G = \sphericalangle H$ und

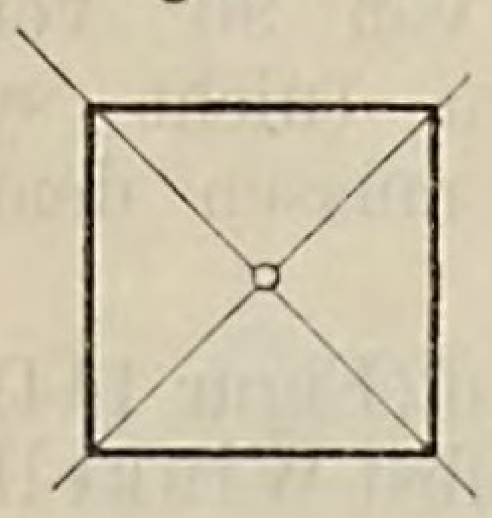
$$PQ \parallel AB \parallel CD, \quad GH \parallel AD \parallel BC,$$

folglich auch $PQ \perp GH$. Sind aber in einem Rechteck die Diagonalen senkrecht, so muss dasselbe ein Quadrat sein.

Figur 147.



Figur 148.



Frage 190. Welche Eigentümlichkeiten besitzt das in Satz 84 besprochene Viereck der Seitenmittelpunkte eines Vierecks bei den besonderen Vierecken?

Antwort. Schon bei jedem beliebigen Viereck bilden nach Satz 84 die Mittelpunkte der vier Seiten ein Parallelogramm, dessen beide Seitenrichtungen mit den Diagonalenrichtungen parallel, und dessen Seitenlängen mit den halben Diagonalenlängen gleich sind.

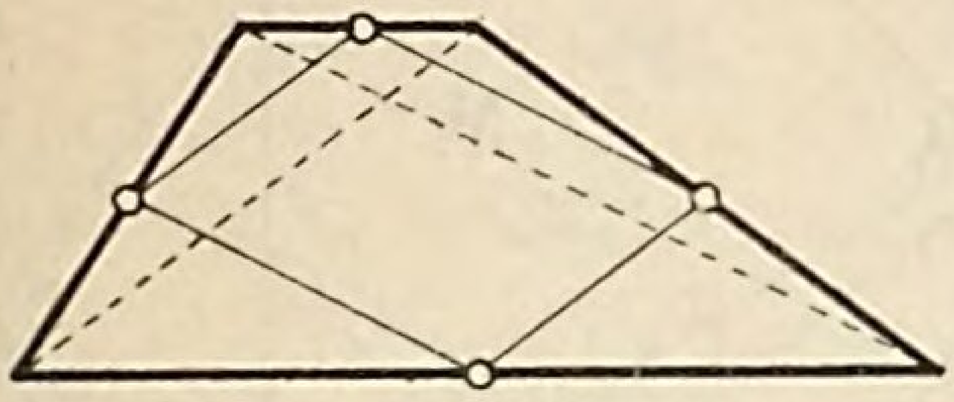
Da im Trapez (Fig. 149) weder unter den Längen noch den Winkeln der Diagonalen besondere Beziehungen bestehen, so wird auch das Parallelogramm seiner Seitenmitten nicht zu einem „besonderen Parallelogramm“.

Erkl. 386. Ueber den Zusammenhang des Gegenstandes dieser Frage 190 und der vorigen Frage 189 kann man folgende dualistische Ueberlegung machen:

Die Winkel zwischen je zwei Seiten eines Vierseits werden halbiert durch vier Halbierungslinien dieser Winkel, und diese bilden das Vierseit der Winkelhalbierenden.	Die Strecken zwischen je zwei Eckpunkten eines Vierecks werden halbiert durch vier Mittelpunkte dieser Strecken, und diese bilden das Viereck der Seitenmitten.

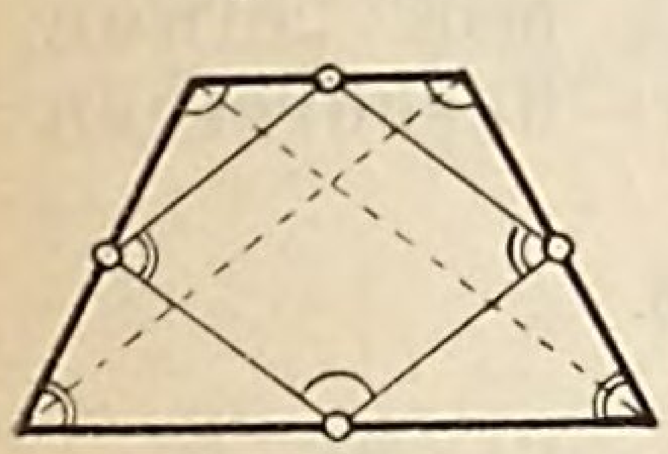
Es sind also das von den Winkelhalbierenden gebildete Vierseit und das von den Seitenmitten gebildete Viereck genau dualistische Gebilde.

Figur 149.

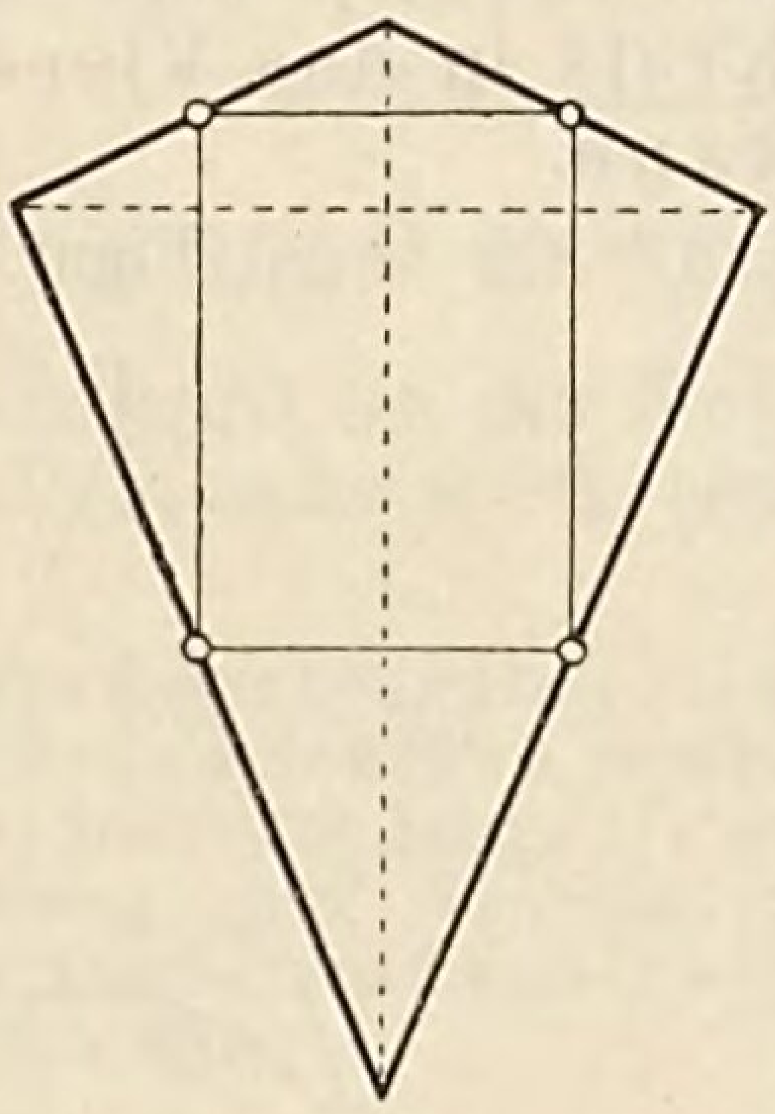


Erkl. 387. Allgemeines Viereck und Trapez unterscheiden sich bloss durch eine Winkelbeziehung (Winkel zweier Gegenseiten = 0° oder = 180°), und diese hat keinen Einfluss auf das Punktgebilde des Vierecks der Seitenmitten. Ebenso unterscheiden sich die Punktgebilde Antiparallelogramm und Rechteck nur durch eine Winkelbeziehung, und die Liniengebilde Deltoid und Rhombus durch eine Längenbeziehung, so dass sie eine gemeinsame Eigenschaft beibehalten.

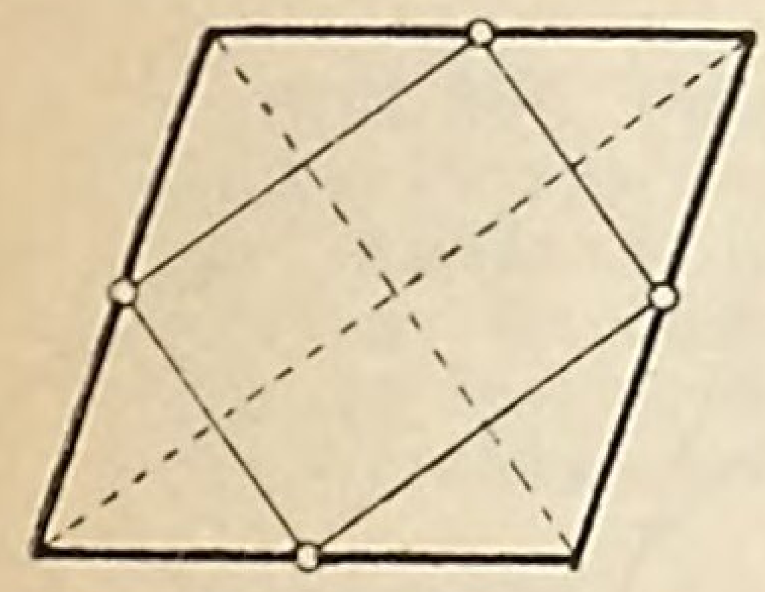
Figur 150.



Figur 151.



Figur 152.



Erkl. 388. Auch ohne auf Satz 84 zurückzugehen, kann man die Eigenschaften des Vierecks der Seitenmitten bei den besonderen Vierecken sehr leicht einzeln direkt ableiten aus deren bekannten symmetrischen Eigenschaften.

Im Antiparallelogramm (Fig. 150) dagegen sind die beiden Diagonalen gleich, folglich wird das Viereck der Seitenmitten ein Parallelogramm mit gleichen Seiten, oder ein Rhombus. Und zwar sind die Winkel dieses Rhombus gleich den Winkeln der zu seinen Seiten parallelen Diagonalen, nämlich nach Antwort 154 der eine gleich dem stumpfen, der andere gleich dem spitzen Winkel des Antiparallelogramms.

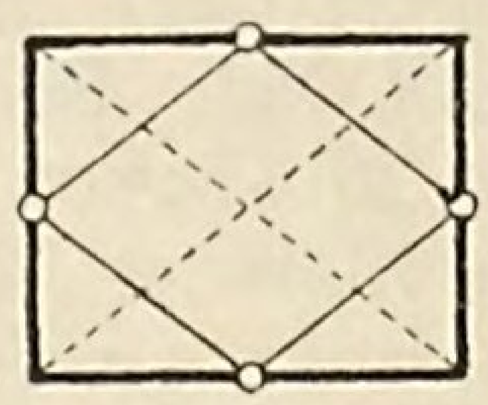
Im Deltoid (Figur 151) sind die Diagonalen senkrecht, also hat das Parallelogramm der Seitenmitten rechte Winkel und ist ein Rechteck.

Im Rhombus (Figur 152) sind die Diagonalen ebenfalls senkrecht, also hat auch das Viereck der Seitenmitten vier rechte Winkel und ist ein Rechteck.

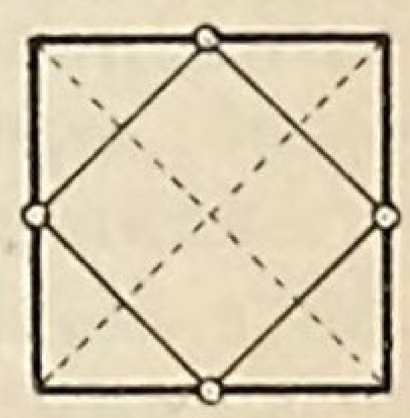
Im Rechteck (Figur 153) sind die Diagonalen gleichlang, also hat auch das Viereck der Seitenmitten vier gleichlange Seiten und ist ein Rhombus.

Im Quadrat (Figur 154) sind die Diagonalen gleichlang und senkrecht, also hat auch das Viereck der Seitenmitten vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel, es ist wieder ein Quadrat.

Figur 153.



Figur 154.



ε) Ueber das Sehnenviereck, Tangentenviereck und Kreisviereck.

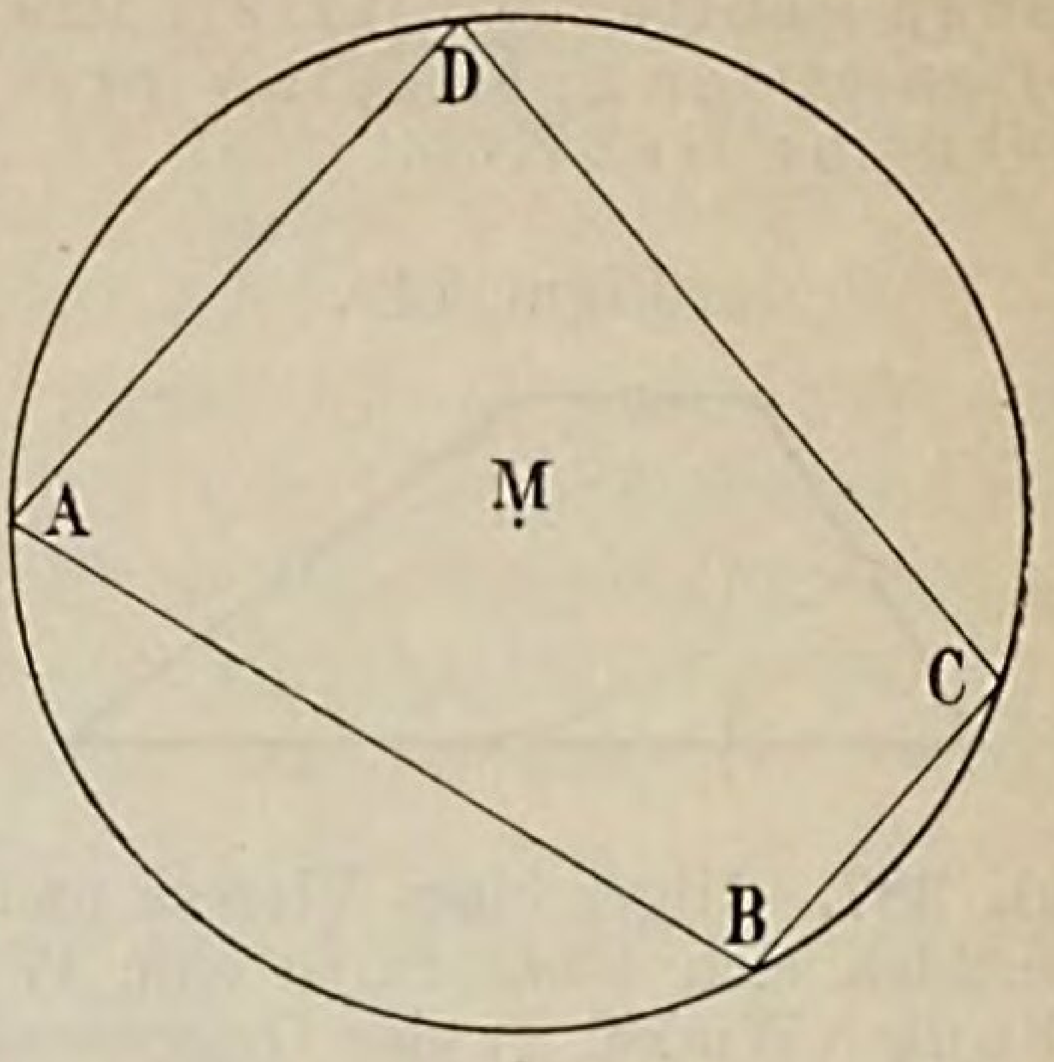
Frage 191. Was ist ein Sehnenviereck?

Antwort. Ein Sehnenviereck ist ein Viereck von der Eigenschaft, dass seine vier Seiten Sehnen eines und desselben Kreises sind, dass also alle vier Eckpunkte des Vierecks auf einem Kreise liegen, oder dass man „einen Kreis um das Viereck“ beschreiben kann.

Erkl. 389. Wie es nach Erkl. 111 und 259 eine besondere Eigenschaft von drei oder vier beliebigen Punkten wäre, dass sie auf einer und derselben Geraden lägen, — während später gezeigt werden wird (s. den Abschnitt über den Kreis im nächsten Teile dieses Lehrbuches), dass drei ganz beliebige Punkte stets

auf einem Kreise liegen, — so ist es eine besondere Eigenschaft von vier beliebig gegebenen Punkten, wenn sie gerade auf einer und derselben Kreislinie liegen.

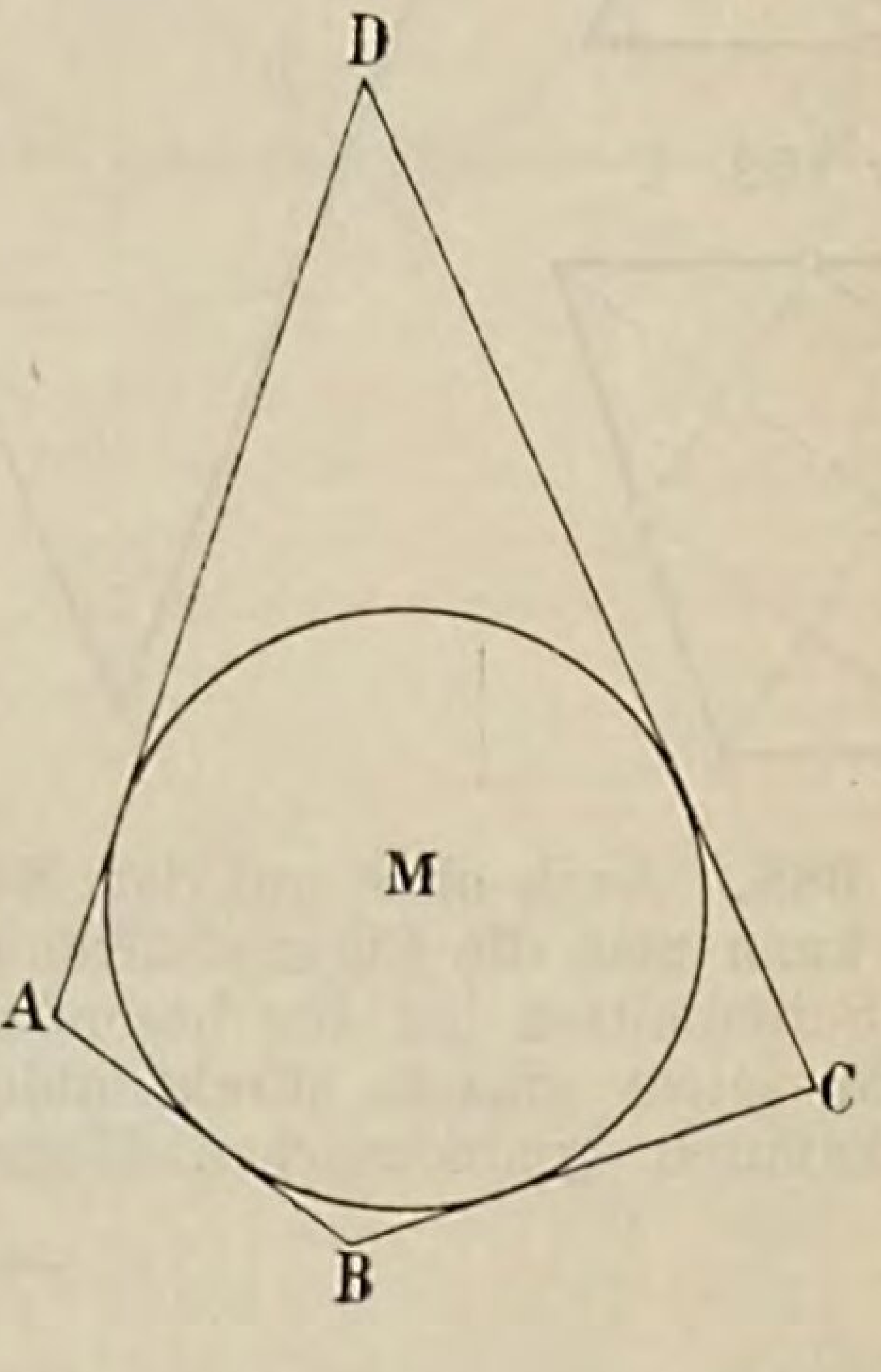
Figur 155.



Frage 192. Was ist ein Tangentenviereck?

Antwort. Ein Tangentenviereck ist ein Vierseit von der Eigenschaft, dass seine vier Seiten Tangenten eines und desselben Kreises sind, dass also alle vier Seiten **einen** Kreis berühren, oder dass man „einen Kreis **in** das Viereck" beschreiben kann.

Figur 156.

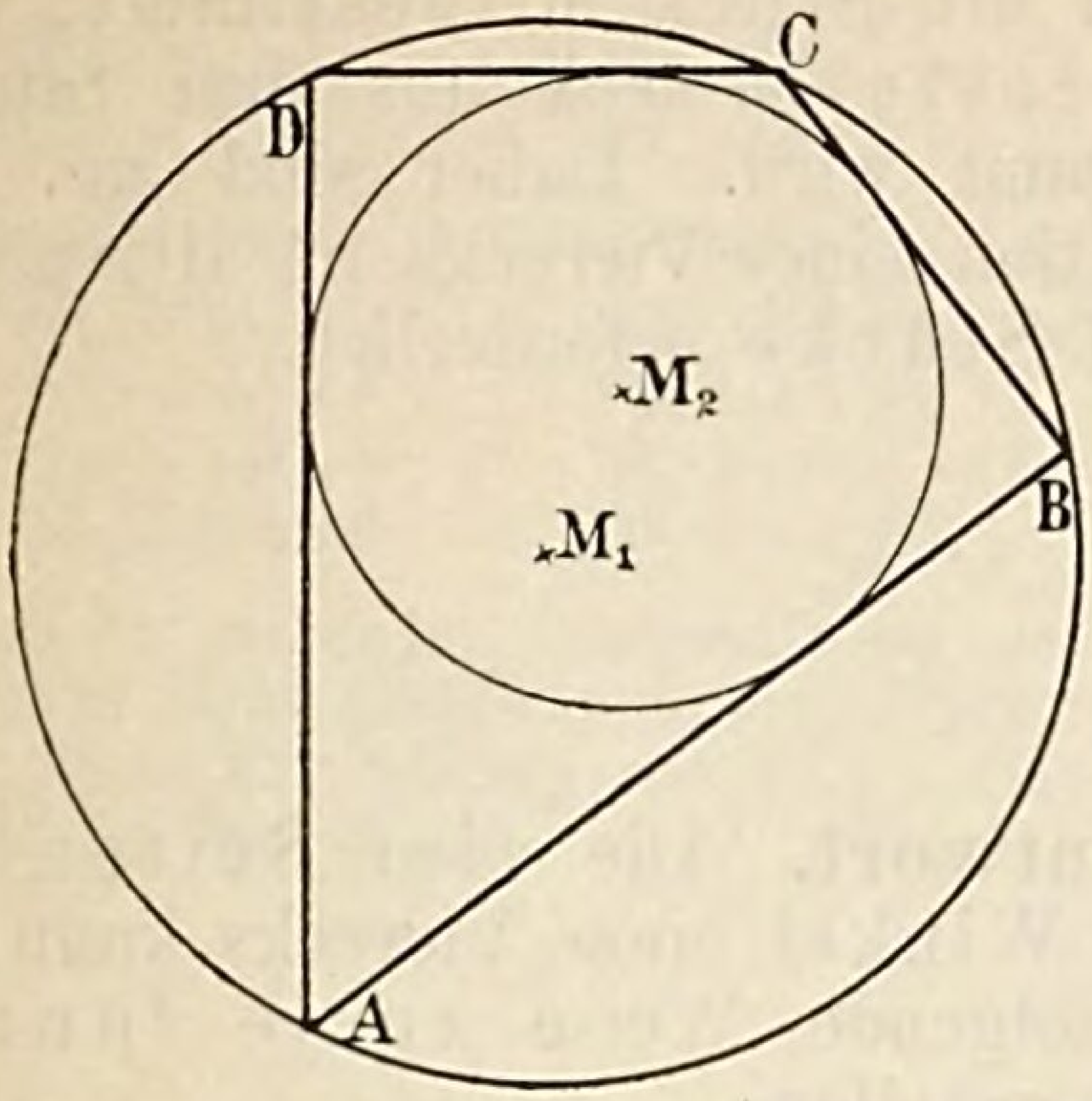


Erkl. 390. Wie es nach Erkl. 111 und 259 eine besondere Eigenschaft von drei oder vier beliebigen Geraden wäre, dass sie durch einen und denselben Punkt gingen, — während später gezeigt werden wird (siehe den Abschnitt über den Kreis im vierten Teile dieses Lehrbuches), dass drei ganz beliebige Gerade stets einen Kreis berühren, — so ist es eine besondere Eigenschaft von vier beliebig gegebenen Geraden, wenn sie gerade einen und denselben Kreis berühren.

Frage 193. Was ist ein Kreisviereck?

Antwort. Ein Kreisviereck ist ein Viereck von der Eigenschaft, dass gleichzeitig seine vier Eckpunkte auf einem Kreis liegen und seine vier Seiten einen Kreis berühren, dass also seine Seiten die Sehnen eines Kreises und gleichzeitig die Tangenten eines andern Kreises sind, dass man

Figur 157.



also sowohl „um das Viereck“ als „in das Viereck“ einen Kreis beschreiben kann.

Anmerkung 2. Da das Sehnenviereck und das Tangentenviereck stets in Verbindung mit einem Kreis, und das Kreisviereck stets in Verbindung mit zwei Kreisen gedacht werden muss, so sind Fragen und Antworten über die bei beim Sehnen-, Tangenten- und Kreisviereck anzustellenden Untersuchungen an dieser Stelle dieses Lehrbuches nicht aufgenommen. Dieselben finden sich in den späteren Abschnitten, welche über den Kreis in Verbindung mit dem Viereck oder Vierseit handeln.

c) Ueber die Konstruktion der Vierecke.

Frage 194. Wie wird bei der Konstruktion eines Vierecks verfahren?

Erkl. 391. Unter der Konstruktion eines Vierecks aus gegebenen Stücken versteht man, ähnlich wie in Antwort der Frage 111 angegeben, die Herstellung eines Vierecks, in welchem eine gewisse Anzahl Stücke eine vorgeschriebene Grösse hat.

Erkl. 392. Auch bei der Konstruktion des Vierecks sind zunächst wieder die dreifach willkürlichen ersten Elemente beliebig zu wählen, nämlich:

1) die Lage eines ersten Eckpunktes,
2) die Richtung einer ersten Seite,
3) der Drehungssinn eines ersten anliegenden Winkels.

Antwort. Die Konstruktion eines Vierecks wird in der Regel auf die Konstruktion von denjenigen Dreiecken zurückgeführt, in welche das Viereck durch Transversalen zerlegt wird. Da nämlich das Viereck etwa durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird, so stellt das Viereck eine Verbindung zweier Dreiecke dar mittels einer gemeinschaftlichen Seite, welche hier Diagonale genannt wird; und es ist das Viereck bestimmt, wenn die beiden Dreiecke bestimmt sind, aus welchen es auf die gedachte Art gebildet wird.

Frage 195. Wie viel Stücke sind zur Konstruktion eines Vierecks erforderlich?

Erkl. 393. Als Bestimmungsstücke eines Vierecks kommen in Betracht seine Seiten, Winkel, Diagonalen, aber auch sonstige Strecken, Winkel, Flächen, welche durch irgendwelche seiner Linien gebildet werden. Als in erster

Antwort. Da zur Konstruktion eines Dreiecks stets drei Stücke erforderlich sind, und das Viereck aus zwei Dreiecken zusammengesetzt ist, so braucht man für jedes dieser beiden Dreiecke drei Stücke. Da aber eine Seite beiden Dreiecken gemeinsam

Reihe wichtig aber werden im Nebenstehenden nur die Vierecksseiten und Viereckswinkel berücksichtigt.

Erkl. 394. Aufgaben über Viereckskonstruktion aus anderen Stücken, als bloss Seiten und Winkeln, findet man in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles und in „Müller, Konstruktionsaufgaben."

ist, so ist für das zweite Dreieck immer schon ein Stück mitbestimmt, wenn das erste Dreieck aus drei Stücken bestimmt wird. Daher sind zur Konstruktion eines Vierecks im allgemeinen fünf Stücke erforderlich.

Frage 196. Wie viele Zusammenstellungen zu je fünf Stücken kann man bilden aus den vier Seiten und vier Winkeln eines Vierecks?

Antwort. Die vier Seiten und vier Winkel eines Vierecks kann man auf folgende Weise zu je fünf zusammenstellen:

1) vier Seiten und ein Winkel,
2) drei Seiten und zwei Winkel,
3) zwei Seiten und drei Winkel,
4) eine Seite und vier Winkel.

Erkl. 395. Die Gruppen der 8 Stücke a, b, c, d, α, β, γ, δ zu je fünfen wären die folgenden:

1) a, b, c, d mit α oder mit β oder mit γ oder mit δ: · · · 4 Gruppen.

2) a, b, c mit α, β oder α, γ oder α, δ oder β, γ oder β, δ oder γ, δ,
a, b, d mit α, β oder $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$; $\beta\gamma$, $\beta\delta$; $\gamma\delta$;
a, c, d mit $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$; $\beta\gamma$, $\beta\delta$; $\gamma\delta$,
b, c, d mit α, β oder α, γ oder α, δ oder β, γ oder β, δ oder γ, δ: · · · 4mal je 6 = 24 Gruppen.

3) α, β, γ oder α, β, δ oder α, γ, δ oder β, γ, δ jeweils mit a, b oder a, c oder a, d oder b, c oder b, d oder c, d: · · · wieder $4 \cdot 6 = 24$ Gruppen.

4) α, β, γ, δ mit a oder mit b oder mit c oder mit d: · · · 4 Gruppen.

Zusammen $4 + 24 + 24 + 4 = 56$.

Frage 197. Wie viele verschiedene Aufgaben für die Konstruktion eines Vierecks ergeben sich aus den vorigen vier Fällen?

Antwort. Von den vorigen vier Fällen ist zunächst der vierte ausgeschlossen, da die vier Winkel eines Vierecks gar nicht alle willkürlich gewählt werden können; denn wenn drei bekannt sind, so muss wegen der Innenwinkelsumme von 4 R der vierte die Ergänzung zu 360^0 für die Summe der drei ersten sein.

Es sind daher schon im dritten der aufgezählten Fälle nicht nur drei, sondern alle vier Winkel bekannt, und es ist nur noch zu unterscheiden, ob die beiden Seiten zwei anstossende oder zwei Gegenseiten sind. Also liefert die dritte Zusammenstellung zwei verschiedene Fälle.

Im zweiten Falle dagegen ist zu unterscheiden, ob beide gegebene Winkel von den drei gegebenen Seiten ein-

Erkl. 396. Der Fall III der nebenstehenden Antwort, welcher aus dem dritten der vorigen Antwort 196 hervorgeht, lässt noch eine weitere Zweiteilung zu. Derjenige Winkel nämlich, welcher nur einer der gegebenen Seiten anliegt, muss zwar als anderen anliegenden Schenkel die nicht gegebene vierte Seite haben; aber der andere gegebene Winkel kann dann noch entweder dieselbe bekannte Seite zum Schenkel haben, wie der vorige Winkel, und eine der anderen, oder er hat die beiden anderen gegebenen Seiten zu Schenkeln. Im ersteren Falle sind also die beiden gegebenen Winkel benachbarte Winkel, im zweiten sind sie Gegenwinkel.

Demnach sind auch unter der obigen Zusammenstellung leicht diese beiden Fälle zu trennen.

Es gehören zur ersten Art des Falles III:

5. a b c $\alpha\beta$	21. a c d $\alpha\beta$
10. a b c $\gamma\delta$	26. a c d $\gamma\delta$
13. a b d $\alpha\delta$	38. b c d $\alpha\delta$
14. a b d $\beta\gamma$	39. b c d $\beta\gamma$;

und zur zweiten Art die übrigen:

6. a b c $\alpha\gamma$	22. a c d $\alpha\gamma$
9. a b c $\beta\delta$	25. a c d $\beta\delta$
12. a b d $\alpha\gamma$	37. b c d $\alpha\gamma$
15. a b d $\beta\delta$	40. b c d $\beta\delta$.

Für die folgenden Anwendungen der verschiedenen Konstruktionsfälle der Vierecke hat jedoch diese Zweiteilung des Falles III keine wesentliche Bedeutung.

geschlossen werden, oder nur einer, oder gar keiner, so dass beide Winkel anliegende Winkel der unbekannten vierten Seite sind. Also liefert die zweite Zusammenstellung drei verschiedene Fälle.

Da im ersten Falle die Lage des gegebenen Winkels gegen die vier bekannten Seiten gleichgültig ist, so entstehen für die Konstruktion eines Vierecks aus gegebenen Seiten und Winkeln folgende sechs Fälle, nämlich als gegebene Stücke:

I. Vier Seiten und ein Winkel.

II. Drei Seiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel.

III. Drei Seiten mit einem Winkel, der zweien von ihnen, und einem Winkel, der nur einer von ihnen anliegt.

IV. Drei Seiten und die beiden der vierten Seite anliegenden Winkel.

V. Zwei anliegende Seiten und drei (also alle vier) Winkel.

VI. Zwei Gegenseiten und drei (also alle vier) Winkel.

Erkl. 396a. Bildet man nach der Lehre der Kombinatorik (siehe die hierüber handelnden Lehrbücher in Kleyers Encyklopädie) die sämtlichen Kombinationen der 8 Elemente $a\ b\ c\ d\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ zu je fünfen, so erhält man folgende 56 Gruppen:

1. $abcd\alpha$ 5. $abc\alpha\beta$ 8. $abc\beta\gamma$ 10. $abc\gamma\delta$
2. $abcd\beta$ 6. $abc\alpha\gamma$ 9. $abc\beta\delta$
3. $abcd\gamma$ 7. $abc\alpha\delta$ 11. $abd\alpha\beta$ 14. $abd\beta\gamma$ 16. $abd\gamma\delta$
4. $abcd\delta$ 12. $abd\alpha\gamma$ 15. $abd\beta\delta$
13. $abd\alpha\delta$
17. $ab\alpha\beta\gamma$ 19. $ab\alpha\gamma\delta$
18. $ab\alpha\beta\delta$
20. $ab\beta\gamma\delta$

21. $acd\alpha\beta$ 24. $acd\beta\gamma$ 26. $acd\gamma\delta$
22. $acd\alpha\gamma$ 25. $acd\beta\delta$
23. $acd\alpha\delta$ 27. $ac\alpha\beta\gamma$ 29. $ac\alpha\gamma\delta$
28. $ac\alpha\beta\delta$
30. $ac\beta\gamma\delta$
31. $ad\alpha\beta\gamma$ 33. $ad\alpha\gamma\delta$
32. $ad\alpha\beta\delta$ 34. $ad\beta\gamma\delta$
35. $a\alpha\beta\gamma\delta$
36. $bcd\alpha\beta$ 39. $bcd\beta\gamma$ 41. $bcd\gamma\delta$
37. $bcd\alpha\gamma$ 40. $bcd\beta\delta$
38. $bcd\alpha\delta$ 42. $bc\alpha\beta\gamma$ 44. $bc\alpha\gamma\delta$
43. $bc\alpha\beta\delta$ 45. $bc\beta\gamma\delta$
46. $bd\alpha\beta\gamma$ 48. $bd\alpha\gamma\delta$
47. $bd\alpha\beta\delta$ 49. $bd\beta\gamma\delta$
50. $b\alpha\beta\gamma\delta$
51. $cd\alpha\beta\gamma$ 53. $cd\alpha\gamma\delta$
52. $cd\alpha\beta\delta$ 54. $cd\beta\gamma\delta$
55. $c\alpha\beta\gamma\delta$
56. $d\alpha\beta\gamma\delta$

Nach Ausschluss der 4 Gruppen 35, 50, 55, 56 mit je vier Winkeln verteilen sich die übrigen 52 unter die Fälle I. bis VI. wie folgt:

Fall	Gruppen	
I: (4)	1. $a\,b\,c\,d\,\alpha$ 2. $a\,b\,c\,d\,\beta$ 3. $a\,b\,c\,d\,\gamma$ 4. $a\,b\,c\,d\,\delta$	
II: (4)	8. $a\,b\,c\,\beta\,\gamma$ 11. $a\,b\,d\,\alpha\,\beta$ 23. $a\,c\,d\,\alpha\,\delta$ 41. $b\,c\,d\,\gamma\,\delta$	
III: (16)	5. $a\,b\,c\,\alpha\,\beta$ 6. $a\,b\,c\,\alpha\,\gamma$ 9. $a\,b\,c\,\beta\,\delta$ 10. $a\,b\,c\,\gamma\,\delta$ 12. $a\,b\,d\,\alpha\,\gamma$ 13. $a\,b\,d\,\alpha\,\delta$ 14. $a\,b\,d\,\beta\,\gamma$ 15. $a\,b\,d\,\beta\,\delta$	21. $a\,c\,d\,\alpha\,\beta$ 22. $a\,c\,d\,\alpha\,\gamma$ 25. $a\,c\,d\,\beta\,\delta$ 26. $a\,c\,d\,\gamma\,\delta$ 37. $b\,c\,d\,\alpha\,\gamma$ 38. $b\,c\,d\,\alpha\,\delta$ 39. $b\,c\,d\,\beta\,\gamma$ 40. $b\,c\,d\,\beta\,\delta$
IV: (4)	7. $a\,b\,c\,\alpha\,\delta$ 16. $a\,b\,d\,\gamma\,\delta$ 24. $a\,c\,d\,\beta\,\gamma$ 36. $b\,c\,d\,\alpha\,\beta$	
V: (16)	17. $a\,b\,\alpha\,\beta\,\gamma$ 18. $a\,b\,\alpha\,\beta\,\delta$ 19. $a\,b\,\alpha\,\gamma\,\delta$ 20. $a\,b\,\beta\,\gamma\,\delta$ 31. $a\,d\,\alpha\,\beta\,\gamma$ 32. $a\,d\,\alpha\,\beta\,\delta$ 33. $a\,d\,\alpha\,\gamma\,\delta$ 34. $a\,d\,\beta\,\gamma\,\delta$	42. $b\,c\,\alpha\,\beta\,\gamma$ 43. $b\,c\,\alpha\,\beta\,\delta$ 44. $b\,c\,\alpha\,\gamma\,\delta$ 45. $b\,c\,\beta\,\gamma\,\delta$ 51. $c\,d\,\alpha\,\beta\,\gamma$ 52. $c\,d\,\alpha\,\beta\,\delta$ 53. $c\,d\,\alpha\,\gamma\,\delta$ 54. $c\,d\,\beta\,\gamma\,\delta$
VI: (8)	27. $a\,c\,\alpha\,\beta\,\gamma$ 28. $a\,c\,\alpha\,\beta\,\delta$ 29. $a\,c\,\alpha\,\gamma\,\delta$ 30. $a\,c\,\beta\,\gamma\,\delta$	46. $b\,d\,\alpha\,\beta\,\gamma$ 47. $b\,d\,\alpha\,\beta\,\delta$ 48. $b\,d\,\alpha\,\gamma\,\delta$ 49. $b\,d\,\beta\,\gamma\,\delta$

Und $4 + 4 + 16 + 4 + 16 + 8 = 52$.

Frage 198. Welche der im Vorigen aufgezählten sechs Fälle der gegebenen Stücke eines Vierecks liefern eindeutige Lösungen bei der Konstruktion?

Erkl. 397. Ueber die einzelnen Ausführungen der Konstruktion obiger sechs Fälle und die Besprechung ihrer Lösbarkeit, welche an dieser Stelle dieses Lehrbuches zu weit führen würde, sehe man die Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles. — Die Untersuchung über Anzahl und verschiedene Fälle einer Aufgabe heisst die „Determination“ der Aufgabe, vom lateinischen terminus = Grenze, die Abgrenzung, Einschränkung.

Antwort. Von den vorigen sechs Fällen der gegebenen Stücke für die Konstruktion eines Vierecks liefert der erste eine zweideutige Lösung, wenn nicht einspringende Winkel ausgeschlossen sind, der zweite aber stets eine eindeutige Lösung; beim dritten Falle kann der unbekannte Winkel an der vierten Seite spitz oder stumpf werden; im vierten Falle kann der von je zwei bekannten Seiten eingeschlossene Winkel zweierlei Grösse erhalten; dagegen liefert der fünfte Fall nur eindeutige Lösungen, und ebenso der sechste, wenn überschlagene Vierecke ausgeschlossen bleiben.

Frage 199. Wie gestalten sich die vorigen sechs Hauptfälle der Viereckskonstruktion für die besonderen Vierecke?

Erkl. 398. Wenn die vier Seiten des Trapezes gegeben sind, so wird die Angabe des zum I. Hauptfall noch nötigen einen Winkels ersetzt durch die Eigenschaft der parallelen Gegenseiten. — Da ferner durch einen bekannten Winkel ein benachbarter am gleichen Schenkel, nicht aber einer am andern Schenkel mitbestimmt ist, so erhält man den

Antwort. Da im allgemeinen Trapez nur zwei Winkel unabhängig sind, so können im Trapez nicht mehr vier Seiten und ein Winkel willkürlich bestimmt werden. Denn durch einen Winkel ist auch ein zweiter bestimmt, so dass nur noch drei Seiten willkürlich bleiben. Daher fällt beim Trapez der Winkel beim ersten Fall

II. Fall, wenn ausser dem Winkel beide Grundseiten und der dem gegebenen Winkel anliegende Schenkel gegeben ist; den III. Fall, wenn ausser dem Winkel beide Schenkel und eine Grundseite gegeben ist; den IV. Fall, wenn ausser dem Winkel beide Grundseiten und der dem Winkel nicht anliegende Schenkel gegeben ist. — Sind zwei unabhängige, also alle vier Winkel gegeben, so entsteht der V. Fall bei einem Schenkel und einer Grundseite, der VI. Fall, wenn zwei Grundseiten bekannt sind. Es wird sich später zeigen, dass die vier Winkel mit zwei Schenkeln ein Trapez nicht eindeutig bestimmen können.

Erkl. 399. Der Umstand, dass im Antiparallelogramm zweimal zwei Winkel achsig-symmetrisch gleich sind, ersetzt zwei von den fünf Bestimmungsstücken. Zu den noch übrigen drei willkürlichen Bestimmungsstücken dürfen aber nicht mehr zwei oder gar drei Winkel als willkürlich verwendet werden, so dass nur entweder drei Seiten oder zwei Seiten und eine, also alle Winkelgrössen willkürlich bleiben.

Erkl. 399a. Der Umstand, dass im Deltoid zweimal zwei Seiten achsig-symmetrisch gleich sind, ersetzt wieder zwei von den fünf Bestimmungsstücken. Zu den noch übrigen drei willkürlichen Bestimmungsstücken dürfen aber nicht mehr dreierlei Seiten willkürlich verwendet werden, und ebensowenig dreierlei willkürliche Winkel, so dass nur noch zwei Seiten mit einem Winkel, oder zwei Winkel mit einer Seite übrig bleiben.

Erkl. 400. Dadurch, dass im Parallelogramm je zwei gegenüberliegende Seiten und Winkel zentrisch-symmetrisch gleich sind, wird jeder Fall ausgeschlossen, bei welchem mehr als ein Winkel oder mehr als zwei Seiten willkürlich gegeben sein würden, also fällt I., II., III., IV., VI. ohne weiteres fort und der V. Fall bleibt als einziger übrig mit eindeutiger Lösung, sowie die Lage des Winkels vorgeschrieben ist.

Erkl. 401. Bei Rhombus, Rechteck und Quadrat gilt zunächst dasselbe, was eben in Erkl. 400 über das allgemeine Parallelogramm gesagt wurde; und dazu treten noch die weiteren Einschränkungen, dass jede Gleichheit zweier weiteren Stücke eine Willkürlichkeit mehr ausschliesst.

Erkl. 402. Wenn man nach nebenstehender Antwort die Vierecke ordnet nach der Anzahl ihrer Bestimmungsstücke, so erhält man folgende Zusammenstellung:

ganz weg, bei den nächsten ist stets ein willkürlicher Winkel fortzulassen, so dass die Fälle II. bis IV. in einem einzigen und ebenso V. und VI. in einem einzigen zusammenfallen. Es können also für ein allgemeines Trapez nur vier Bestimmungsstücke willkürlich vorgeschrieben werden, nämlich:

1) die vier Seiten — oder

2) drei Seiten und ein Winkel — oder

3) zwei Seiten und zwei unabhängige, also alle vier Winkel.

Im Antiparallelogramm ist nur ein einziger Winkel willkürlich, und zwei Seiten gleichlang, so dass in jedem der sechs Fälle entweder der einzige Winkel und eine Seite oder zwei Winkel wegfallen müssen. Dadurch verbleiben für das Antiparallelogramm nur noch drei willkürliche Bestimmungsstücke übrig, nämlich:

1) drei Seiten — oder

2) zwei unabhängige Seiten und ein Winkel.

Im Deltoid sind zwei gleiche Winkel, also nur noch zwei willkürliche Winkel und zweimal zwei gleiche Seiten, also auch nur zwei willkürliche Seiten, so dass in jedem der sechs Fälle entweder zwei Seiten oder eine Seite und ein Winkel wegfallen. Dadurch verbleiben auch für das Deltoid nur noch drei willkürliche Bestimmungsstücke übrig, nämlich:

1) zwei unabhängige Seiten und ein Winkel — oder

2) eine Seite und zwei unabhängige Winkel.

Im Parallelogramm ist wieder nur ein einziger Winkel willkürlich, und ausser diesem auch noch zweimal zwei gleiche Seiten vorhanden, so dass wieder nur noch zwei Seitenlängen und eine Winkelgrösse willkürlich bleiben. Daher ist das Parallelogramm eindeutig bestimmt durch drei Stücke, nämlich: zwei unabhängige Seiten und einen Winkel.

I. Fünf willkürliche Bestimmungsstücke:
1) allgemeines Viereck.
II. Vier willkürliche Bestimmungsstücke:
2) allgemeines Trapez
(und dazu laut späterem Nachweis Sehnen- und Tangentenviereck).
III. Drei willkürliche Bestimmungsstücke:
3) Antiparallelogramm } (achsig-
4) Deltoid } symmetrisch)
5) allgemeines Parallelogramm — (zentrisch-symmetrisch)
(und dazu laut späterem Nachweis Kreisvierecke),
IV. Zwei willkürliche Bestimmungsstücke:
6) Rhombus } (zweiachsig und
7) Rechteck } zentrisch-symmetrisch).
V. Ein willkürliches Bestimmungsstück:
8) Quadrat.

Im Rhombus, wo alle vier Seiten gleich sind, ist nur noch eine einzige Seitenlänge und eine Winkelgrösse willkürlich, so dass das Rhombus eindeutig bestimmt ist durch zwei Stücke, nämlich:

eine Seite und einen Winkel.

Im Rechteck sind durch den Namen allein schon alle Winkel als rechte bekannt, so dass dasselbe eindeutig bestimmt wird durch zwei Stücke, nämlich seine

zwei Seiten.

Im Quadrat sind die vier Winkel ebenfalls durch den Namen schon gegeben, die vier Seiten aber alle gleich, so dass ein einziges Bestimmungsstück übrig bleibt, nämlich:

eine Seite.

d) Ueber die Kongruenz der Vierecke.

Frage 200. Welche Ergebnisse für die Kongruenz zweier allgemeinen Vierecke ergeben sich aus den in Antwort der Frage 198 angestellten Ueberlegungen?

Antwort. Aus Antwort der Frage 198 ergibt sich der Schluss, dass zwei Vierecke kongruent sein müssen, wenn sie in solchen Stücken übereinstimmen, aus welchen nur ein einziges Viereck eindeutig konstruiert werden kann. Man kann also ohne Einschränkung sagen:

Satz 92. Zwei Vierecke sind kongruent,

1) wenn drei Seiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel im einen Viereck ebenso gross sind, als drei Seiten und die beiden gleichliegenden eingeschlossenen Winkel im andern Viereck; —

2) wenn zwei aneinander stossende Seiten und drei (also alle vier) Winkel im einen Viereck ebenso gross sind, als zwei Seiten und die drei (also alle vier) gleichliegenden Winkel im andern Viereck.

Erkl. 403. Zu den Fällen, welche unbedingt eindeutige Lösungen ergeben, gehörten von den sechs Hauptfällen der Vieckskonstruktion nur der II. und V. Fall. Da aber für den VI. Fall nur die Zulassung überschlagener Vierecke Zweideutigkeit veranlassen konnte, und in diesem Lehrbuche die überschlagenen Vierecke allgemein von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben — (Ausnahme bildeten bloss die dualistischen Betrachtungen im ersten Abschnitte dieses Teiles, sowie die Untersuchungen über Trapez- und Seitenmittenviereck, welche nur zum weiteren Verständnis der betrachteten Eigenschaft der „einfachen“ Vierecke dienten) — so kann der VI. Fall mit Ausschluss der überschlagenen Vierecke mit zu denjenigen Fällen gezählt werden, welche eindeutige Lösung und daher unbedingte Kongruenz derjenigen Vierecke ergeben, welche in den angegebenen Stücken übereinstimmen.

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 92a. Wenn in zwei Vierecken bezüglich gleich sind:

1) drei Seiten und die von ihnen eingeschlossenen Winkel, — oder

2) zwei anstossende Seiten und drei gleichliegende Winkel, so sind auch die übrigen Seiten und Winkel beider Vierecke entsprechend gleich.

Mit Zusatz einer einschränkenden Bestimmung über die im allgemeinen zweideutig bleibenden Konstruktionen kann man ferner Vierecke für kongruent erklären:

3) wenn vier Seiten und ein Winkel im einen Viereck so gross sind, als vier Seiten und ein gleichliegender Winkel im andern Viereck — falls der Gegenwinkel des gegebenen Winkels jedesmal kleiner oder jedesmal grösser als 180^0 ist, —

4) wenn drei Seiten und ein eingeschlossener Winkel und ein an der vierten Seite liegender Winkel im einen Viereck so gross sind, als drei Seiten und die zwei gleichliegenden Winkel im andern Viereck — falls der zweite Winkel an der vierten Seite jedesmal spitz oder jedesmal stumpf ist.

Erkl. 404. Für den I. Fall muss die Zulassung oder Ausschliessung einspringender Winkel ausgesprochen werden durch die Angabe, ob der letzte Winkel über oder unter dem gestreckten ist; beim III. Fall hat man dieselbe Erscheinung, wie beim dritten Dreieckskongruenzsatz, dass nämlich der letzte Winkel zweideutig ist, wenn die Diagonale der beiden letzten Eckpunkte grösser ist, als die letzte der gegebenen Seiten.

Erkl. 405. Der IV. Fall der sechs Hauptfälle lässt eine Zweideutigkeit der von der bekannten Seite eingeschlossenen Winkel übrig, welche sich nicht in den kurz zu fassenden Wortlaut eines Lehrsatzes genügend einschränken lässt.

Erkl. 406. Für alle Kongruenzsätze bleibt Voraussetzung, dass unter den gegebenen Stücken die gegenseitige Lage gleichzeitig angegeben ist.

Frage 201. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Antworten 199 und 200 für die Kongruenz der besondern Vierecke?

Antwort. Da die besondern Vierecke aus weniger Bestimmungsstücken eindeutig konstruiert werden können, als die allgemeinen, so sind auch zu ihrer Kongruenz weniger übereinstimmende Stücke erforderlich.

Entsprechend den ohne oder mit einer Einschränkung geltenden Kongruenzsätzen allgemeiner Vierecke erhält man daher für mehrere Trapeze unbedingte Kongruenz, wenn sie übereinstimmen:

Erkl. 407. Nur wenn zwei Trapeze übereinstimmen in einer der beiden erstgenannten Gruppen von Stücken, erhält man die beiden ersten und unbedingten Kongruenzfälle der allgemeinen Vierecke. Stimmen zwei Trapeze überein in einer der beiden letztgenannten Gruppen von Stücken, so ist die Kongruenz der Bedingung unterworfen, dass die Winkel an der Grundseite gleichartig, oder ungleichartig sein müssen.

Erkl. 408. Die Winkel an einer Grundseite eines Trapezes sind gleichartig, wenn beide spitz oder beide stumpf sind, sie sind dagegen ungleichartig, wenn der eine spitz, der andere stumpf ist. (Ersteres trifft zu in Figur 110, I, 111 und 119, letzteres in Figur 110, II und IV; Grenzfall bildet Figur 112.)

Erkl. 409. Die Uebereinstimmung zweier Trapeze in zwei Grundseiten und einem Schenkel und einem nicht am gegebenen Schenkel liegenden Winkel liefert den vierten Abschnitt allgemeiner Hauptfälle und würde besonderer Feststellung bedürfen. (Siehe Aufgabe 158 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.)

Erkl. 410. Da das Antiparallelogramm zweimal zwei gleiche Winkel hat, so darf es wegen der Winkelsumme von 360° keine einspringenden Winkel erhalten. Dadurch wird veranlasst, dass die Kongruenzbedingungen für die zusammengehörigen Figuren Antiparallelogramm und Deltoid nicht ebenfalls genau dualistisch lauten. Sind nämlich dreierlei, also drei unabhängige Seiten des Antiparallelogramms bekannt, so kennt man alle vier Seiten. Sind aber zweierlei Seiten und ein, also alle vier Winkel bekannt, so dürfen dies zwei Grundseiten sein, oder ein Schenkel und eine Grundseite, ohne dass die Gültigkeit des Kongruenzsatzes in Zweifel kommt.

Erkl. 411. Beim Deltoid werden häufig auch einspringende Winkel in den Kreis der Ueberlegungen einbezogen. Wollte man dieselben ganz aus den Kongruenzbetrachtungen ausschliessen, dann wäre der Zusatz zum dritten Teil des Satzes 93a stets in der Richtung erfüllt, dass alle Winkel hohle oder konkave Winkel wären. Dann fiele dieser dritte Teil mit dem ersten zusammen, und die Kongruenzbedingungen des Deltoids lauten:

Satz 93b. Deltoide sind kongruent:

1) wenn zwei Seiten und ein Winkel
2) wenn eine Seite und zwei Winkel

in einem Deltoid ebenso gross sind, als die gleichliegenden Stücke in einem andern.

Erkl. 412. Die Dualität zwischen den Kongruenzbedingungen für Antiparallelogramm und Deltoid lässt sich in der Weise herstellen, dass man von den in Antwort der Frage 196 übrigbleibenden drei Fällen:

1) 4 Seiten und 1 Winkel,
2) 3 Seiten und 2 Winkel,
3) 2 Seiten und 3 Winkel

jeweils abzieht: für das Antiparallelogramm zwei Winkel, für das Deltoid zwei Seiten. Dadurch bleiben übrig für das Antiparallelogramm:

1) — —
2) 3 Seiten,
3) 2 Seiten und 1 Winkel,

1) in den vier Seiten — oder

2) in zwei Grundseiten und einem Schenkel und einem der eingeschlossenen Winkel — oder

3) einer Grundseite und einer andern Seite und zwei unabhängigen, also allen vier Winkeln.

Dagegen sind Trapeze, welche übereinstimmen:

4) in zwei Schenkeln und einer Grundseite und einem eingeschlossenen Winkel nur dann kongruent, wenn sie an den Grundseiten jedesmal zwei gleichartige oder jedesmal zwei ungleichartige Winkel haben.

Im Antiparallelogramm, wo durch einen Winkel alle bestimmt sind, kann auch nur eindeutige Kongruenz eintreten und man erhält:

Satz 93. Antiparallelogramme sind kongruent, wenn:

1) dreierlei Seiten — oder wenn

2) zweierlei Seiten und ein Winkel in einem Antiparallelogramm so gross sind, wie in einem andern.

Im Deltoid dagegen tritt wieder eine Zweideutigkeit auf wegen der zwei willkürlichen Winkel, indem auch einspringende Winkel eintreten können. Daher kann man aussagen:

Satz 93a. Deltoide sind unbedingt kongruent,

1) wenn zweierlei Seiten und der Winkel der ungleichen Seiten oder der Winkel der kleineren Seiten —

2) wenn eine Seite und zweierlei Winkel in einem Deltoid so gross sind, wie in einem andern;

dagegen:

3) wenn zweierlei Seiten und der Winkel der grösseren Seiten übereinstimmen, nur unter der Voraussetzung, dass der Winkel der kleineren Seite jedesmal unter oder jedesmal über 180° ist.

Bei den übrigen besondern Vierecken aber ist keine Zweideutigkeit

und für das Deltoid:

1) 2 Seiten und 1 Winkel,
2) 1 Seite und 2 Winkel,
3) — —

Erkl. 413. Für das Parallelogramm lässt sich nach Erkl. 400 eine andere Gruppe von drei unabhängigen Stücken als eben zwei Seiten und ein Winkel gar nicht zusammenstellen. Ebenso ist im Rhombus nur eine einzige Seitenlänge und eine einzige unabhängige Winkelgrösse vorhanden, im Rechteck zweierlei Seitengrössen und im Quadrat eine einzige Seitenlänge.

Erkl. 414. Kongruenzbedingungen der besonderen Vierecke aus Uebereinstimmung von andern Stücken als bloss Seiten und Winkeln, z. B. Diagonalen, Höhen, findet man in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

möglich, so dass man die unmittelbare Folgerung erhält:

Satz 94. Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zweierlei Seiten und einem Winkel übereinstimmen.

Satz 94a. Rhomben sind kongruent, wenn sie in einer Seite und einem Winkel übereinstimmen.

Satz 94b. Rechtecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen.

Satz 94c. Quadrate sind kongruent, wenn sie in einer Seite übereinstimmen.

3) Ueber die allgemeinen Vielecke, ihre Konstruktion, Kongruenz und Symmetrie.

Frage 202. Was ist ein Vieleck?

Erkl. 415. Das Wort Polygon stammt aus dem Griechischen πολύς = viel, und γόνυ oder γῶνος = Knie, Ecke, Winkel.

Erkl. 416. Ueber die Winkel der Vielecke sehe man den Abschnitt A 5 im zweiten Teile dieses Buches, über die Anzahl der Diagonalen und Seitenschnittpunkte die Antwort der Frage 6 dieses Teiles.

Antwort. Ein Vieleck oder Polygon ist eine Figur aus mehreren Punkten und deren Verbindungslinien, oder aus mehreren Geraden mit ihren Schnittpunkten.

Daher sind Dreieck und Viereck besonders einfache Fälle von Polygonen. Als der allgemeine Fall wäre zu bezeichnen das n-Eck oder das n-Seit mit n Eckpunkten und n Seitenlinien, n Winkeln und n Seitenstrecken.

Anmerkung 3. Da der Lehre von den Vielecken wegen ihrer Wichtigkeit für das praktische Vermessungswesen in dieser Encyklopädie ein besonderes Buch gewidmet ist, das „Lehrbuch der Polygonometrie“, so sind an dieser Stelle dieses Lehrbuches über die allgemeinen Polygone nur einige der allerwichtigsten allgemeinen Thatsachen über Vielecke mitgeteilt. Eine besondere Gruppe von Vielecken, nämlich der Sehnenvielecke, Tangentenvielecke und Kreisvielecke, kann nur in Verbindung mit einem oder zwei Kreisen gedacht werden, und ist daher ebenso wie Sehnen-, Tangenten- und Kreisvierecke nicht an dieser Stelle dieses Lehrbuches aufgeführt, sondern in denjenigen Abschnitten desselben, welche über den Kreis in Verbindung mit den demselben ein- und umgeschriebenen Polygonen handeln.

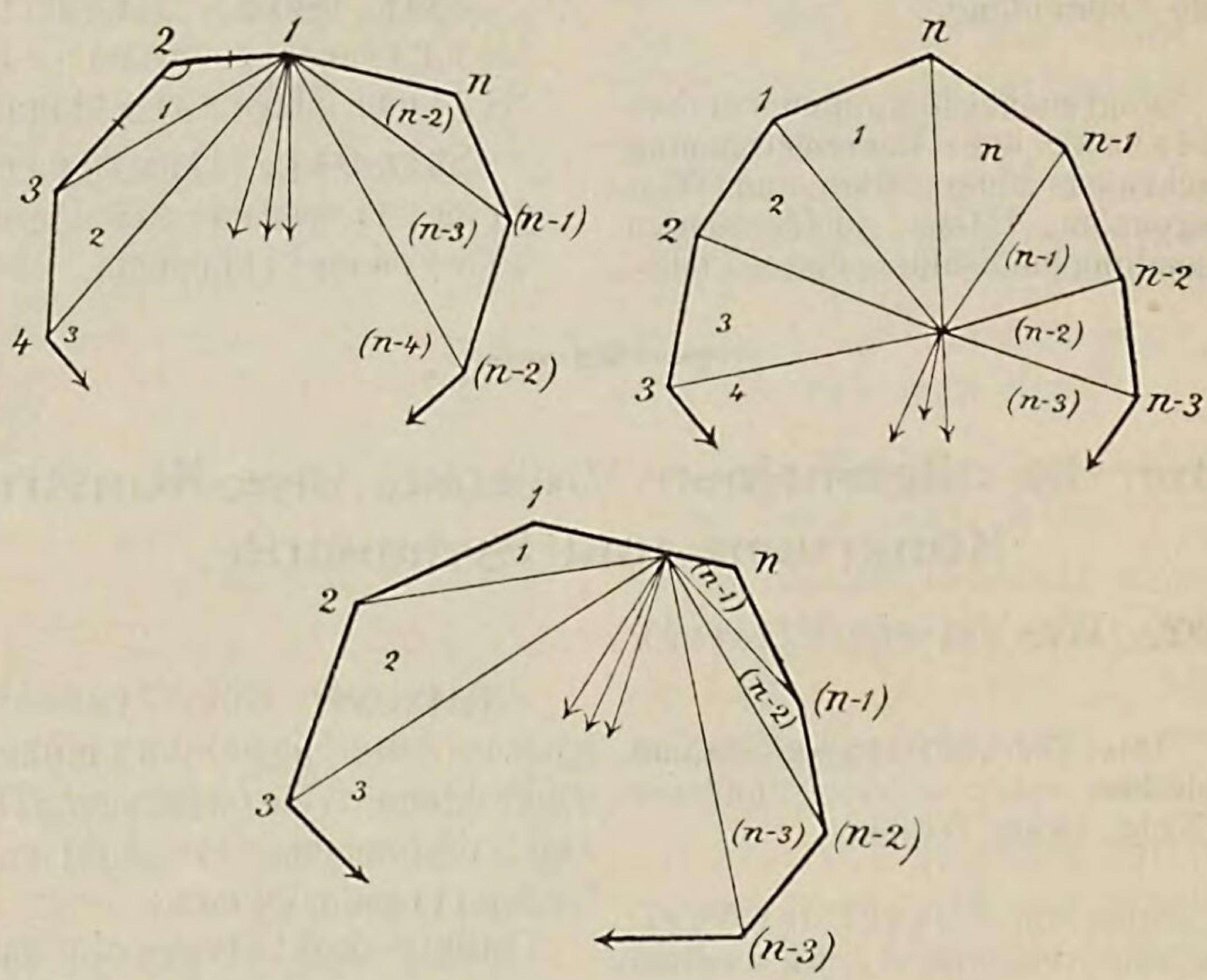
Frage 203. Wie wird im allgemeinen bei der Konstruktion eines Vielecks verfahren?

Antwort. Die Konstruktion eines Vielecks wird im allgemeinen ebenso wie diejenige des Vierecks auf die

Erkl. 417. Zerlegt man ein n-Eck durch Diagonalen von einer einzelnen Ecke aus, so entstehen $n-3$ Diagonalen und bilden $n-2$ Dreiecke. Zerlegt man ein n-Eck durch Transversalen von einem einzelnen Punkte in seinem Innern nach den Ecken, so entstehen durch n Transversalen n Dreiecke. Verbindet man einen auf einer Seite gelegenen Punkt mit allen Ecken, so entstehen $n-1$ Teildreiecke durch $n-2$ „Ecktransversalen" (s. Fig. 158).

Konstruktion derjenigen Dreiecke zurückgeführt, in welche das Vieleck durch seine Diagonalen oder sonstige Transversalen zerlegt wird. Und das Vieleck ist bestimmt, wenn alle diese Zerlegungsdreiecke einzeln bestimmt sind.

Figur 158.



Frage 204. Wie viele Stücke sind zur Konstruktion eines Vielecks erforderlich?

Erkl. 418. Die erste Art der Dreieckzerlegung eines Vielecks ist für die nebenstehende Kongruenzbetrachtung deswegen die geeignetste, weil im ersten dieser Dreiecke zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des Dreiecks auch als zwei Seiten und eingeschlossener Winkel des Vielecks auftreten, während jede der beiden andern oder sonstigen Zerlegungsarten auch weitere Gattungen von Bestimmungsstücken nötig machen würde ausser bloss Seiten und Winkeln des Vieleckes selbst.

Erkl. 419. Statt die Abzählung nach dem ersten und den $n-3$ folgende Dreiecken zu machen, kann man auch zunächst $3(n-2)$ Bestimmungsstücke ansetzen für die $n-2$ Dreiecke und dann davon wieder $n-3$ einzelne abziehen, weil ausser einem einzigen jedes Dreieck nur zwei Bestimmungsstücke braucht. Dann erhält man wieder

$$3(n-2)-(n-3)=3n-6-n+3=2n-3.$$

Antwort. Wenn man zur Zerlegung eines Vielecks in Dreiecke die von einer Ecke ausgehenden $n-3$ Diagonalen benutzt, so erhält man $n-2$ einzelne Dreiecke, nämlich das erste und $n-3$ weitere Dreiecke. Von diesen braucht das erste drei Bestimmungsstücke, liefert dafür aber schon ein Bestimmungsstück als seine gemeinschaftliche Seite für das folgende, ebenso dieses zweite für das dritte, so dass also jeweils für das nächste Dreieck bloss nur noch zwei neue Stücke nötig sind. Man braucht also für ein allgemeines Vieleck von n Ecken: einmal drei und dazu $(n-3)$ mal zwei oder im ganzen:

$3+2\cdot(n-3)=$ **$2n-3$ Bestimmungsstücke.**

Diese lassen sich aus den n Seiten und n Winkeln in sehr mannigfacher Weise zusammenstellen, nämlich zunächst in den drei Gruppen:

1) alle n Seiten und $n-3$ Winkel,
2) $n-1$ Seiten und $n-2$ Winkel,
3) $n-2$ Seiten und $n-1$, also alle n Winkel; und innerhalb jeder dieser Gruppen sind wieder die verschiedenen gegenseitigen Lagen der gegebenen Seiten und Winkel zu einander zu unterscheiden.

Erkl. 420. Ein vierter Fall mit $n-3$ Seiten und n Winkeln wird ebenso wie in den Antworten der Fragen 115 und 196 dadurch ausgeschlossen, dass durch $n-1$ Winkel der n-te wegen der Winkelsumme von $(n-2)\cdot 180^0$ schon vorausbestimmt ist.

Frage 205. Welche der im vorigen aufgezählten Zusammenstellungen der Stücke eines Vielecks liefern eindeutige Lösungen bei der Konstruktion?

Antwort. Bei den verschiedenen Fällen der gegebenen Stücke sind eindeutige Konstruktionen im allgemeinen zu erwarten, wenn die drei nicht angegebenen Stücke aus den n Seiten und n Winkeln so liegen, dass sie in einem einzelnen der Zerlegungsdreiecke vereinigt sind. Dies trifft zu:

wenn im ersten Falle die drei fehlenden Winkel aufeinanderfolgende sind, —

wenn im zweiten Falle die beiden fehlenden Winkel aufeinanderfolgen und von ihnen entweder jeder oder wenigstens einer an der fehlenden Seite anliegt;

wenn im dritten Falle die beiden fehlenden Seiten aneinanderstossende sind.

Dazu tritt die Beschränkung der möglichen Zweideutigkeit:

im ersten Falle, ob der mittlere der drei Winkel ausspringend oder einspringend wird,

im zweiten Falle, ob der unbekannte anliegende Winkel an der fehlenden Seite spitz oder stumpf ist.

Erkl. 421. Sind die fehlenden Winkel oder Seiten unregelmässig im Vieleck zerstreut, so wird es im allgemeinen bei der Lösung nicht ohne besondere Schwierigkeiten möglich sein, die Mehrdeutigkeiten zu beseitigen oder in übersichtlicher Ausdrucksweise darzustellen. Man vergleiche hierüber die Aufgaben 178—180 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Erkl. 422. Fehlen drei aufeinanderfolgende Vieleckswinkel, so kennt man vom letzten Zerlegungsdreieck nach Konstruktion aller übrigen keinen Winkel, aber drei Seiten, nämlich die mit dem vorletzten Zerlegungsdreieck gemeinschaftliche Diagonale und die beiden letzten Vielecksseiten.

Fehlen zwei aufeinanderfolgende Winkel und eine anliegende Seite, so kennt man vom letzten Zerlegungsdreieck zwei Seiten und entweder den eingeschlossenen oder den gegenüberliegenden Winkel; fehlen zwei anstossende Vielecksseiten, so kennt man vom letzten Zerlegungsdreieck eine Seite und zwei anstossende Winkel.

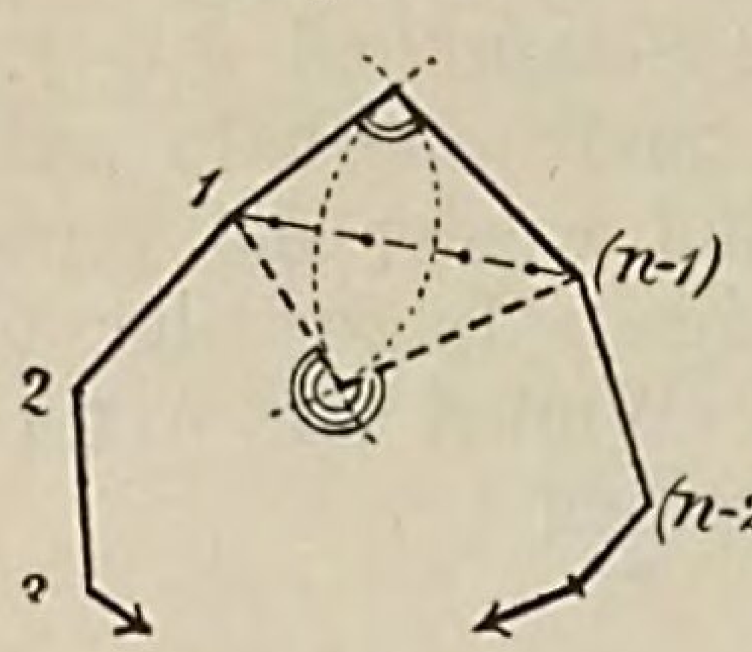
Erkl. 423. Die Beschränkung der Zweideutigkeit ist dieselbe wie beim dritten Dreieckskongruenzsatze bezw. beim ersten für die Lage des Punktes C über oder unter der Seite c.

Frage 206. Welche Ergebnisse für die Kongruenz allgemeiner Vielecke ergeben sich aus den in Antwort der Frage 205 aufgestellten Bedingungen?

Antwort. Wenn zwei Vielecke in solchen Stücken übereinstimmen, aus

Erkl. 424. An Fig. 159 ist zu ersehen, wie das letzte Zerlegungsdreieck eines Vielecks zwar dieselben drei Seiten enthalten kann, aber je nach dem einspringenden oder ausspringenden Winkel verschiedene Vielecke liefert.

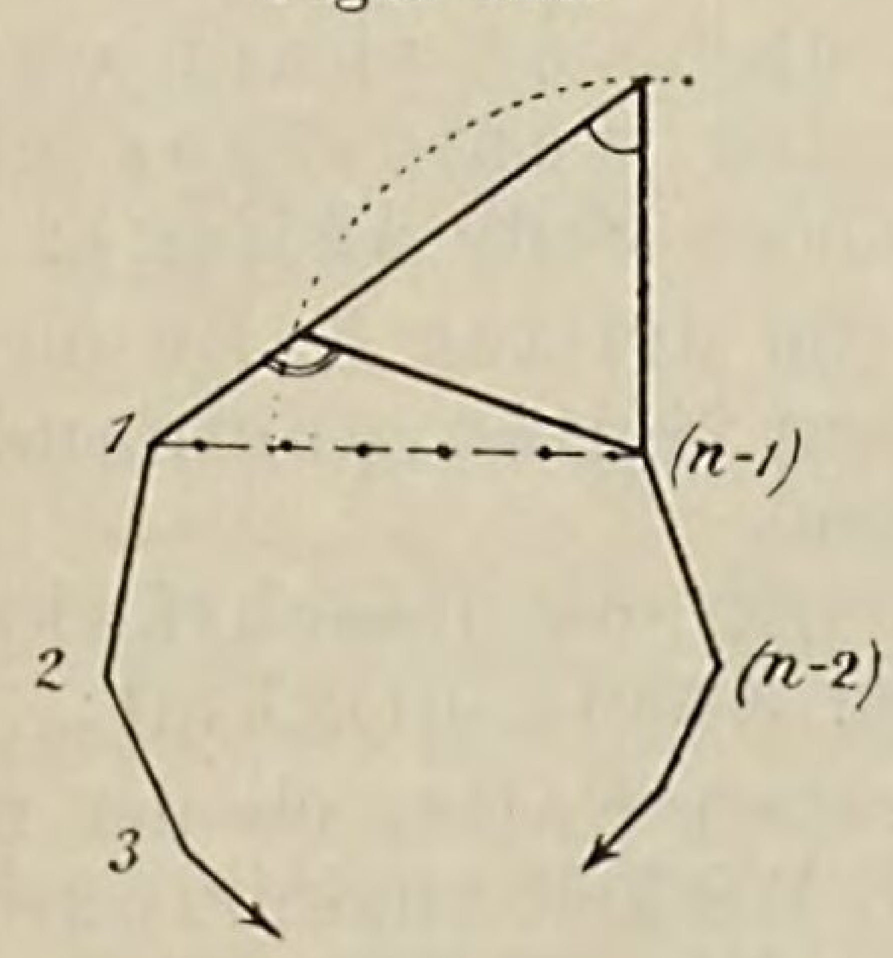
Figur 159.



Erkl. 425. Während aus der mit dem vorletzten Zerlegungsdreieck gemeinschaftlichen Seite und den beiden bekannten letzten Vielecksseiten zwar nur einerlei Dreieck möglich ist, so kann das Vieleck vollendet werden durch verschiedene Einsetzung dieses Dreiecks in die Lücke zwischen der ersten und der $(n-2)$ten Seite. Liegt das Dreieck auswärts von der letzten Diagonale, so entsteht ein hohler, ausspringender Winkel, liegt das Dreieck einwärts, so entsteht ein erhabener, einspringender Winkel an der Gegenecke derselben Diagonale.

Erkl. 426. Wie für den vierten der nebenstehenden Fälle die in Satz 63 und Erkl. 248 durchgeführte Zusatzbedingung eintreten muss, ist aus Fig. 160 zu ersehen.

Figur 160.



welchen nur ein einziges Vieleck eindeutig konstruiert werden kann, so müssen dieselben kongruent sein. Man kann also ohne Einschränkung sagen:

Satz 95. Zwei Vielecke von n Ecken sind kongruent:

1) wenn $n-1$ Seiten und die $n-2$ von ihnen eingeschlossenen Winkel im einen n-Eck so gross sind, als $n-1$ Seiten und die $n-2$ gleichliegenden eingeschlossenen Winkel im andern Vieleck; —

2) wenn alle Winkel und $n-2$ aneinanderstossende Seiten im einen n-Eck so gross sind, als die Winkel und $n-2$ gleichliegende anstossende Seiten im andern Vieleck.

Ferner kann man mit Zusatz einer einschränkenden Bemerkung über die im allgemeinen zweideutig bleibenden Konstruktionen auch zwei Vielecke für kongruent erklären:

3) wenn alle n Seiten und $n-3$ aufeinanderfolgende Winkel im einen Vieleck so gross sind, als die n Seiten und $n-3$ gleichliegende benachbarte Winkel im andern Vieleck — falls der mit keinem gegebenen Winkel benachbarte fehlende Winkel jedesmal kleiner oder jedesmal grösser als 180° ist —

4) wenn $n-1$ Seiten und $n-2$ aufeinanderfolgende Winkel, wovon einer an der fehlenden Seite liegt, im einen Vieleck so gross sind, als $n-1$ Seiten $n-2$ gleichliegende Winkel im andern Vieleck — falls der zweite Winkel an der fehlenden n-ten Seite jedesmal spitz oder jedesmal stumpf ist.

Frage 207. Zu welchen Vorstellungen über die bei einem Vieleck auftretenden Massgrössen gelangt man auf Grund der vorigen Antwort der Frage 206?

Antwort. Auf Grund der in den vorigen Kongruenzsätzen enthaltenen Beziehungen zwischen verschiedenen Vierecken gelangt man zu folgenden Vor-

Erkl. 427. Die in nebenstehender Antwort für das allgemeine Vieleck angestellten Ueberlegungen sind für das Dreieck bereits aufgeführt in den Antworten der Fragen 124 und 131. Sie hätten auch — für Vierecke — fast wörtlich gleichlautend eingefügt werden können nach Frage 200 oder 201 über die Kongruenz der Vierecke.

Erkl. 428. Der erste Teil der nebenstehenden Antwort ist die Folgerung aus dem schon in Antwort der Frage 9 abgeleiteten allgemeinen Satze 1 und 1a in Verbindung mit den Sätzen 39 bis 41 der Antwort auf die Frage 67. Denn wenn Seiten und Winkel zweier Vielecke zur Deckung gelangen, dann müssen auch die Verbindungslinien entsprechender Ecken und alle sonstigen entsprechenden Transversalen, Winkel, Flächen in beiden Vielecken zur Deckung gelangen.

Erkl. 429. Die Gesamtheit der in einem Vieleck auftretenden Massgrössen nennt man oft auch ein System von beliebig vielen von einander abhängigen Grössen, unter welchen sich $2n-3$ „unabhängige" befinden, durch deren Veränderungen auch die Veränderungen aller übrigen Grössen eindeutig bestimmt sind. Da die Veränderungen jener $2n-3$ Grössen beliebig sind, so sagt man auch, in dem „Grössensystem" seien $2n-3$ „unabhängige Veränderliche", durch welche alle übrigen unbegrenzt vielen Stücke eindeutig bestimmt werden.

Erkl. 430. Dass auch unter den $2n-3$ „unabhängigen" Grössen noch gewisse Beschränkungen bestehen, folgt aus Ueberlegungen ähnlich denen, welche zu den Sätzen 49 und 67 führten. So kann z. B. eine Seite eines Vielecks nie grösser sein, als die Summe aller andern oder nie kleiner als die Differenz zwischen der grössten von ihnen und der Summe aller andern Seiten. Sonst lässt sich aus solchen n Strecken überhaupt kein Vieleck zeichnen.

stellungen über Längen, Winkel und Flächen von Vielecken:

1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass wenn zwei Vielecke in denjenigen Stücken übereinstimmen, welche nach voriger Antwort die Kongruenz der Vielecke bedingen, — dann sämtliche übrigen Seiten und Winkel, sowie auch sämtliche Diagonalen, Teildreiecke, Höhen, Transversalen, Flächen und alle derartigen Massgrössen des einen Vielecks kongruent gleich sein müssen denselben entsprechend gelegenen Stücken des andern Vielecks.

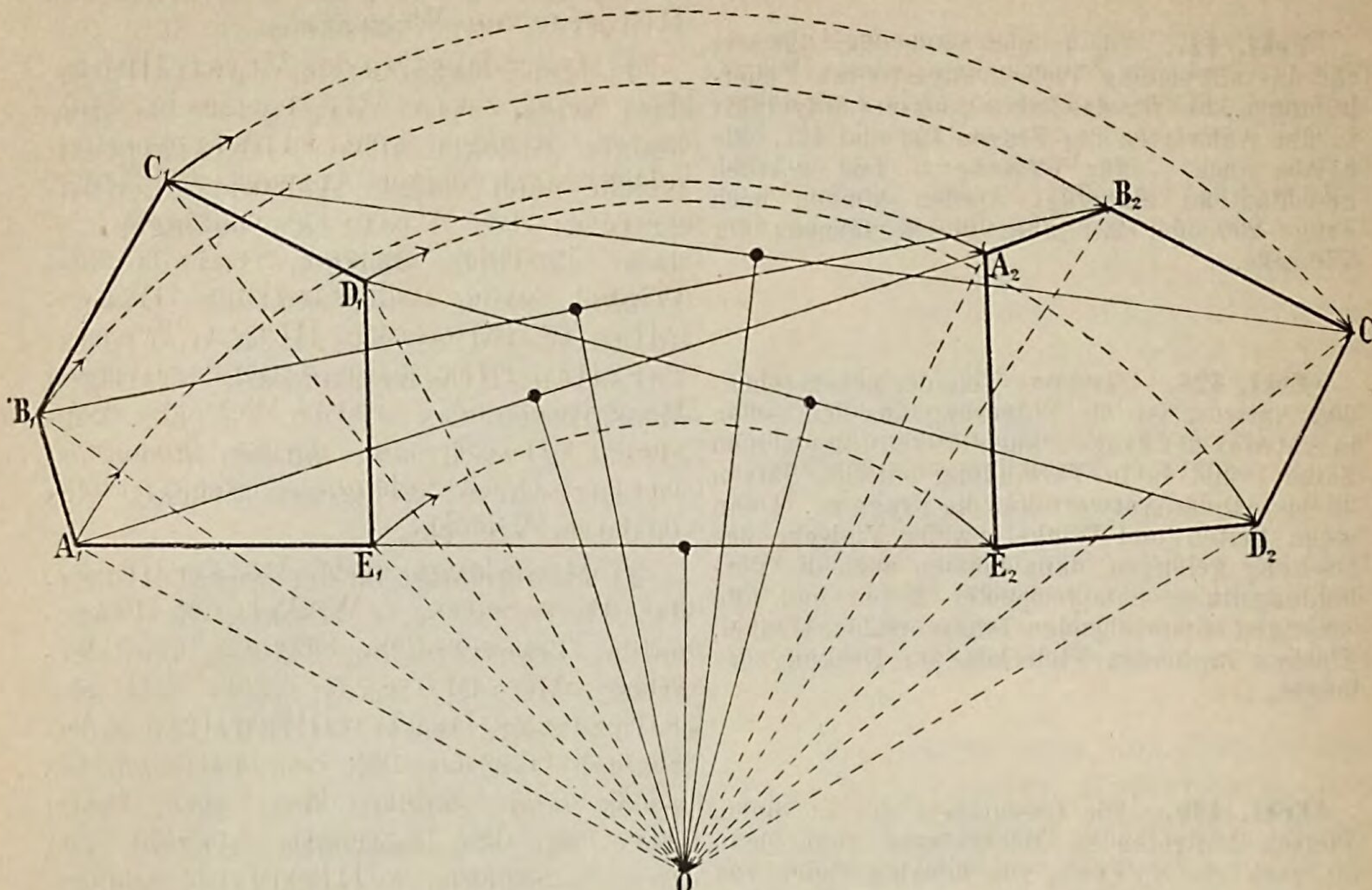
2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die n Seiten, n Winkel, die Diagonalen, Transversalen, Flächen und derartige Massgrössen eines Vielecks keineswegs lauter willkürlich anzugebende Grössen für ein bestimmmtes n-Eck sind, sondern dass unter ihnen stets nur die begrenzte Anzahl von $2n-3$ Stücken willkürlich ausgewählt werden darf, dass aber alsdann jedes einzelne übrige dieser Stücke vollständig eindeutig mitbestimmt und von der Grösse der übrigen abhängig ist.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass wenn von einem Vieleck von n Ecken mehr als bloss $2n-3$ Stücke willkürlich vorgeschrieben werden, dann die Konstruktion eines solchen Vielecks im allgemeinen unmöglich ist. Es müsste denn gerade durch Zufall eine solche Anzahl der Stücke als ihre Anzahl die Ziffer $2n-3$ übertrifft, mit den übrigen die merkwürdige Uebereinstimmung zeigen, dass in dem aus den $2n-3$ übrigen Strecken konstruierten Vieleck diese überschüssigen Stücke in gleicher Grösse erscheinen würden, als ihre willkürlich vorgeschriebene beträgt.

Frage 208. Welche Ergebnisse liefert die Anwendung der Sätze 34 und 38 auf zwei entsprechende Seiten oder Winkel kongruenter Vielecke?

Antwort. Nach den Sätzen 34 und 38 können zwei gleiche Strecken oder zwei gleiche Winkel zur Deckung gebracht werden durch Um-

Figur 161.



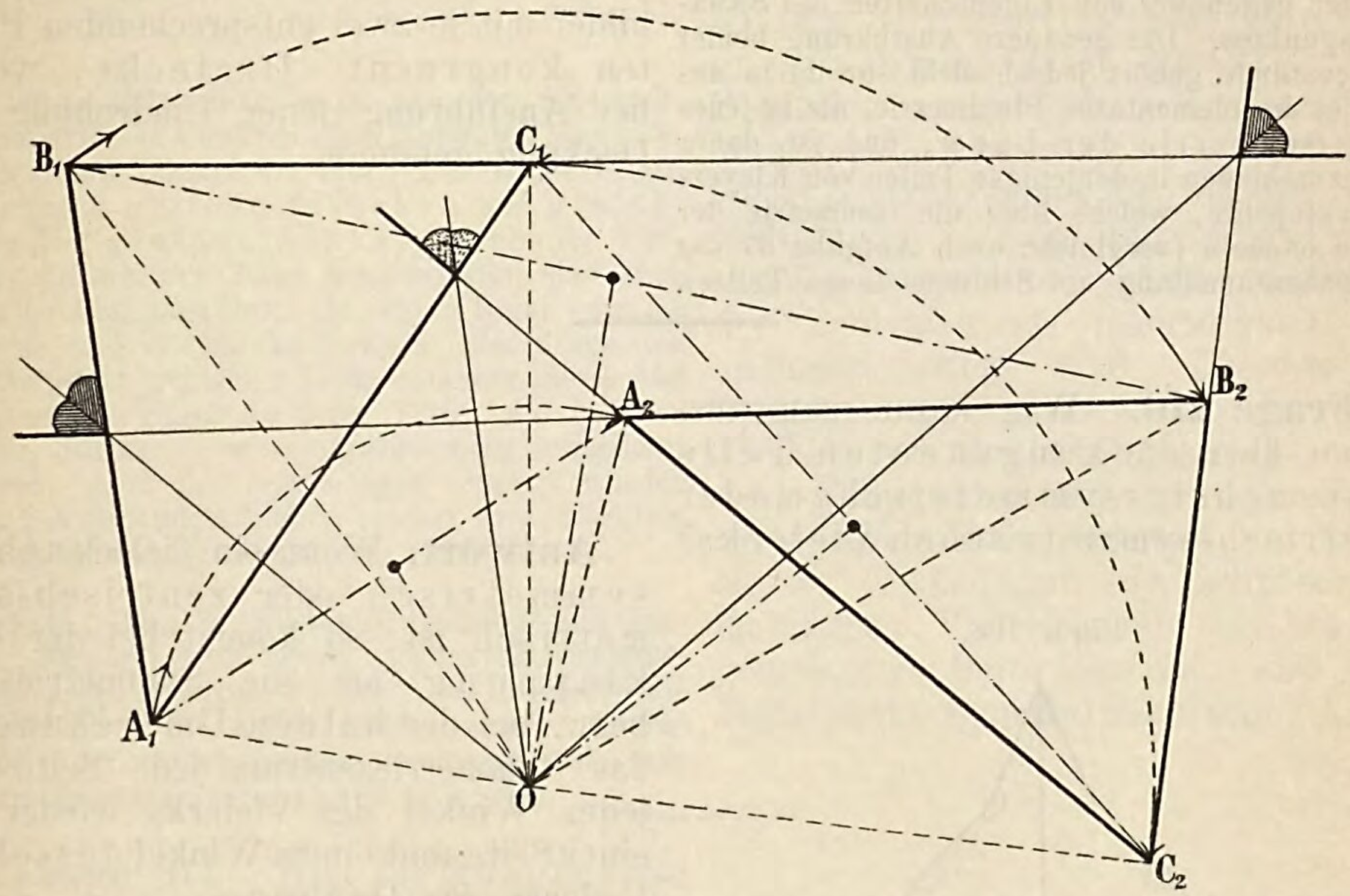
Erkl. 431. Wenn man in der Fig. 161 die Seiten $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ zur Deckung bringen will, so konstruiert man nach Satz 34 die Mittelsenkrechten der Verbindungslinien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$. Schneiden sich diese im Punkte O, so ist $A_1 A_2 O$ ein gleichschenkeliges Dreieck mit Spitze O und Grundseite $A_1 A_2$ und ebenso ist $B_1 B_2 O$ ein gleichschenkeliges Dreieck mit Spitze O und Grundseite $B_1 B_2$. Dreht man also um O herum, so ist $O A_1 = O A_2$ und $O B_1 = O B_2$. Da aber ferner auch $A_1 B_1$ wegen der kongruenten Fünfecke $= A_2 B_2$ ist, so sind $O A_1 B_1$ und $O A_2 B_2$ Dreiecke mit drei gleichen Seiten, also $O A_1 B_1 \cong O A_2 B_2$. Daher fällt beim Umdrehen um O — sowie A_1 auf A_2 kommt — gleichzeitig $O A_1$ auf $O A_2$, $O B_1$ auf $O B_2$, $A_1 B_1$ auf $A_2 B_2$. Fällt aber $A_1 B_1$ auf $A_2 B_2$, so muss auch $\sphericalangle A_1 B_1 C_1$ auf den Winkel fallen, welcher an $A_2 B_2$ in B_2 gleichwendig gleichgross angetragen ist, also auf $A_2 B_2 C_2$; und Strecke $B_1 C_1$ muss auf die Strecke fallen, welche auf dem Schenkel des Winkels $A_2 B_2 C_2$ in gleicher Grösse angetragen ist, also fällt auch $B_1 C_1$ auf $B_2 C_2$. Infolge gleichlautender Ueberlegungen fällt dann aber auch jeder folgende Winkel $B_1 C_1 D_1$, $C_1 D_1 E_1$, $D_1 E_1 A_1$ auf die entsprechend gleichgrossen Winkel $B_2 C_2 D_2$, $C_2 D_2 E_2$, $D_2 E_2 A_2$ — und ebenso jede folgende Strecke $C_1 D_1$, $D_1 E_1$, $E_1 A_1$ auf die entsprechend gleichgrosse Strecke $C_2 D_2$, $D_2 E_2$, $E_2 A_2$. — Also fällt das ganze Fünfeck $A_1 B_1 C_1 D_1$ auf das ganze kongruente Fünfeck $A_2 B_2 C_2 D_2$, sowie Punkt A_1 durch Drehung um O auf A_2 zu liegen kommt.

drehung um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten entsprechender Endpunkte bezw. der Nebenwinkelhalbierenden entsprechender Schenkelrichtungen. Wird aber diese Ueberführung mit einer Seite oder einem Winkel zweier gleichwendig kongruenten Vielecke vorgenommen, so kommen nicht nur diese eine Seite oder dieser eine Winkel zur Deckung, sondern die umliegenden Winkel oder Seiten, welche ebenfalls gleichwendig kongruent gleichgross sind, müssen ebenfalls zur Deckung gelangen, und deren anliegende Seiten und Winkel wieder ebenso, so dass durch die Ueberführung einer einzigen Seite oder eines einzigen Winkels die beiden ganzen Vielecke vollständig zur Deckung gelangen. Dieser Punkt muss also der Umdrehungsmittelpunkt sein nicht nur für die einzige Seite oder den einzigen Winkel, sondern für alle entsprechenden Seiten und alle entsprechenden Winkel der beiden Vielecke. Es muss

Erkl. 432. Was in Erkl. 431 für den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ durchgeführt wurde, könnte ebensowohl für den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ gesagt werden und würde denselben Punkt O ergeben.

einerlei sein, welche Seite oder welchen Winkel man zu seiner Auffindung benutzt: alle jene Mittelsenkrechten oder Nebenwinkelhalbierenden müssen denselben Punkt liefern, sie müssen durch denselben Punkt gehen.

Figur 162.



Frage 209. Welche Aussagen über zwei kongruente Vielecke kann man machen auf Grund der in voriger Antwort der Frage 208 angestellten Ueberlegungen?

Erkl. 433. In Figur 161 sind für die beiden kongruenten Fünfecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ die sämtlichen Verbindungslinien entsprechender Punkte — sowohl die geraden als die Kreislinien samt den Mittelsenkrechten der ersteren gezogen. In Figur 162 ist für die beiden kongruenten Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ auch die Gesamtheit der Winkelhalbierenden der Nebenwinkel entsprechender Seitenstrecken gezeichnet, welche ebenfalls durch denselben Punkt gehen, wie aus einer mit Erkl. 431 dualistisch übereinstimmenden Ueberlegung hervorgeht.

Erkl. 434. Wie aus Erkl. 431 und den Figuren 161 und 162 erkannt wird, sind die Strecken OA_1, OB_1, OC_1 u. s. w. gleich den Strecken OA_2, OB_2, $OC_2 \cdots$ Da also auch die Strecken $A_1 B_1 = A_2 B_2$, $B_1 C_1 = B_2 C_2$ u. s. w. sind, so sind auch kongruente Dreiecke $A_1 B_1 O \cong A_2 B_2 O$, $B_1 C_1 O$

Antwort. Auf Grund der in voriger Antwort angestellten Ueberlegungen kann man folgende Aussagen machen:

Satz 96. Zwei gleichwendig kongruente Vielecke können zur Deckung gebracht werden durch Umdrehung um den Schnittpunkt entweder der Mittelsenkrechten zur Verbindungsstrecke irgend zweier entsprechender Eckpunkte oder der Halbierungslinien der Nebenwinkel irgend zweier entsprechenden Seitenrichtungen.

Satz 96a. Für zwei gleichwendig kongruente Vielecke fallen die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten zu den Verbindungsstrecken

$\cong B_2C_2O$, und $A_1C_1O \cong A_2C_2O$, $A_1D_1O \cong A_2D_2O$ und so sämtliche Dreiecke mit Spitze O und entsprechenden Strecken als Grundseiten.

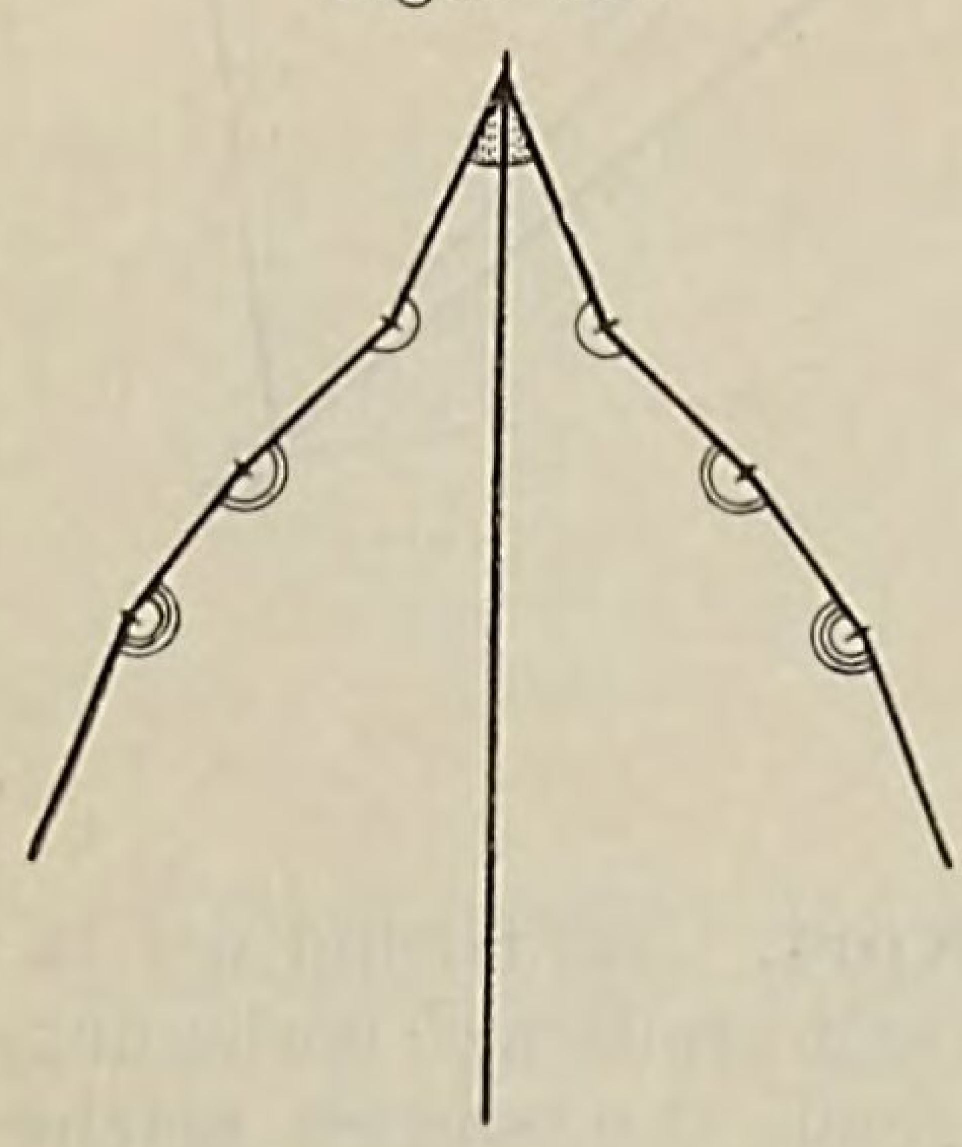
Erkl. 435. Dem Verhandensein eines Situationspunktes für zwei gleichwendig kongruente Gebilde lässt sich das Vorhandensein einer geraden Linie gegenüberstellen für zwei ungleichwendig kongruente Gebilde, welche Situationsachse heisst, und teilweise dualistische Eigenschaften in Bezug auf beide Gebilde besitzt gegenüber den Eigenschaften des Situationspunktes. Die genauere Ausführung beider Gegenstände gehört jedoch nicht sowohl in das Gebiet der elementaren Planimetrie, als in jenes der „Geometrie der Lage", und ist daher nachzuschlagen in denjenigen Teilen von Kleyers Encyklopädie, welche über die Geometrie der Lage handeln (vergleiche auch Aufgabe 37 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles).

je zweier entsprechenden Eckpunkte, sowie die Halbierungslinien der Nebenwinkel je zweier ensprechenden Seitenrichtungen — sämtlich in einen einzigen Punkt — oder alle diese Linien gehen durch einen einzigen Punkt.

Dieser Punkt wird der Situationspunkt der beiden Vielecke genannt und bildet mit je zwei entsprechenden Punkten kongruente Dreiecke, welche bei Ausführung jener Umdrehung zur Deckung gelangen.

Frage 210. Was kann man aussagen über die kongruenten Teile eines achsig-symmetrischen oder zentrisch-symmetrischen Vielecks?

Figur 163.

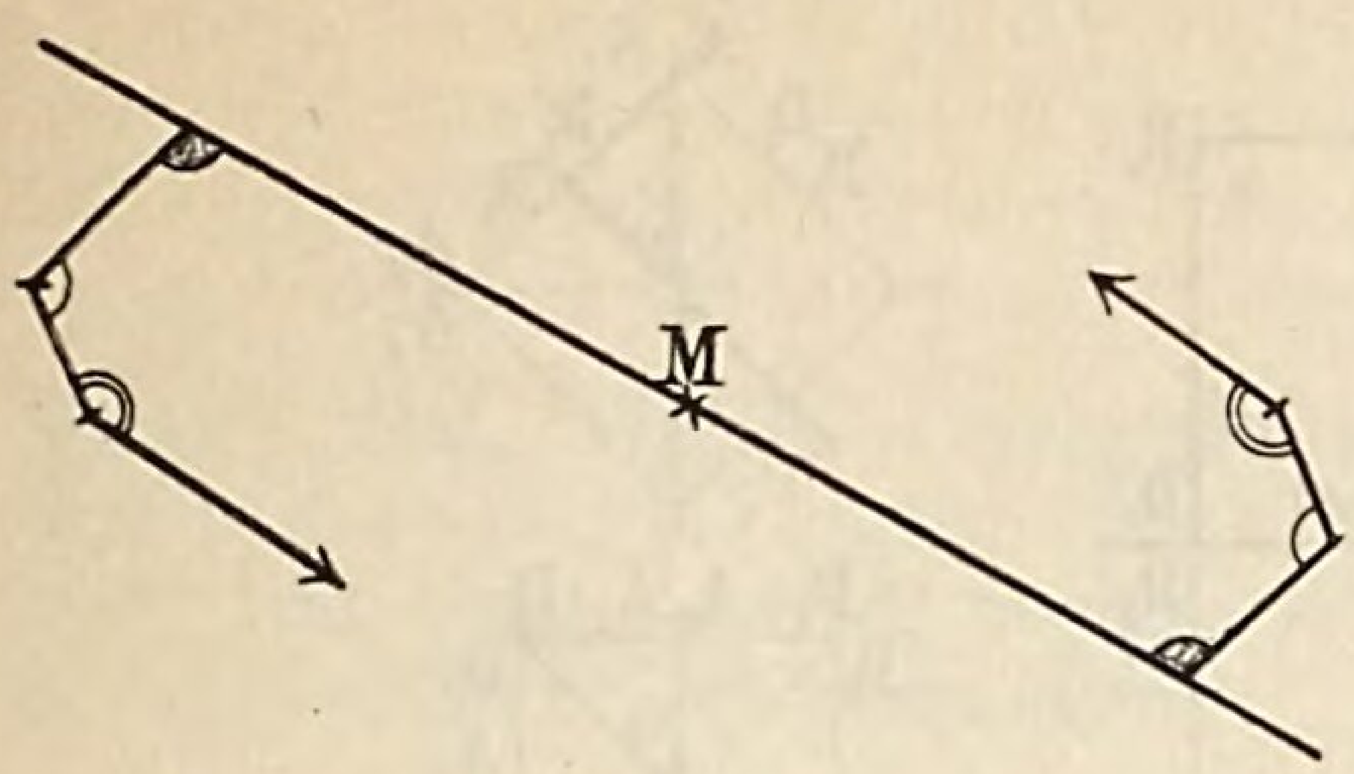


Erkl. 436. Geht man von einem Achsenpunkte aus längs den Seiten und Winkeln der einen Hälfte einer Figur, so müssen gleiche Strecken und entgegengesetzt gleiche Winkel durchlaufen werden, je nachdem man auf der einen oder andern Seite der Achse den Umlauf ausführt. So waren beim Deltoid und Antiparallelogramm die Seiten und Winkel beiderseits der Achse einander gleich; rechnet man die Achse selbst als Linie der Figuren, so bildet sie beim Deltoid beiderseits zwei gegenwendig kongruente symmetrische Dreiecke, durch deren Aneinanderschiebung das Deltoid entstand. Beim Antiparallelogramm bildet die Achse selbst beiderseits zwei gegenwendig kongruente symmetrische Trapeze mit je zwei rechten Winkeln an der Grundseite, durch deren Aneinanderschiebung das Antiparallelogramm erzeugt werden kann.

Antwort. Wenn ein Vieleck achsig-symmetrisch oder zentrisch-symmetrisch ist, so kommt bei der Umklappung um die Symmetrieachse bezw. bei der halben Umdrehung um das Symmetriezentrum jede Seite und jeder Winkel des Vielecks wieder mit einer Seite und einem Winkel desselben Vielecks zur Deckung.

Die gesamte Reihenfolge der Seiten und Winkel des achsig-symmetrischen Vielecks einerseits der Symmetrieachse ist also gegenwendig kongruent mit der vom gleichen Achsenpunkte ausgehenden Reihenfolge derselben anderseits des Achsenpunktes. Rechnet man also die Symmetrieachse selbst mit zu der beiderseits der Achse entstehenden Hälfte des Vielecks, so bildet die Symmetrieachse mit den beiden Hälften des Vielecks einzeln zwei ungleichwendig kongruente Vielecke, welche mit der Achse als gemeinsamer Seite aneinandergelegt sind. Werden also umgekehrt zwei ungleichwendig kongruente Vielecke mit den entsprechenden Eckpunkten einer entsprechenden Seite aneinandergeschoben, so bilden sie als Gesamtfigur ein achsig-symmetrisches Vieleck, für welches jene gemeinsame Seite Symmetrieachse ist.

Figur 164.



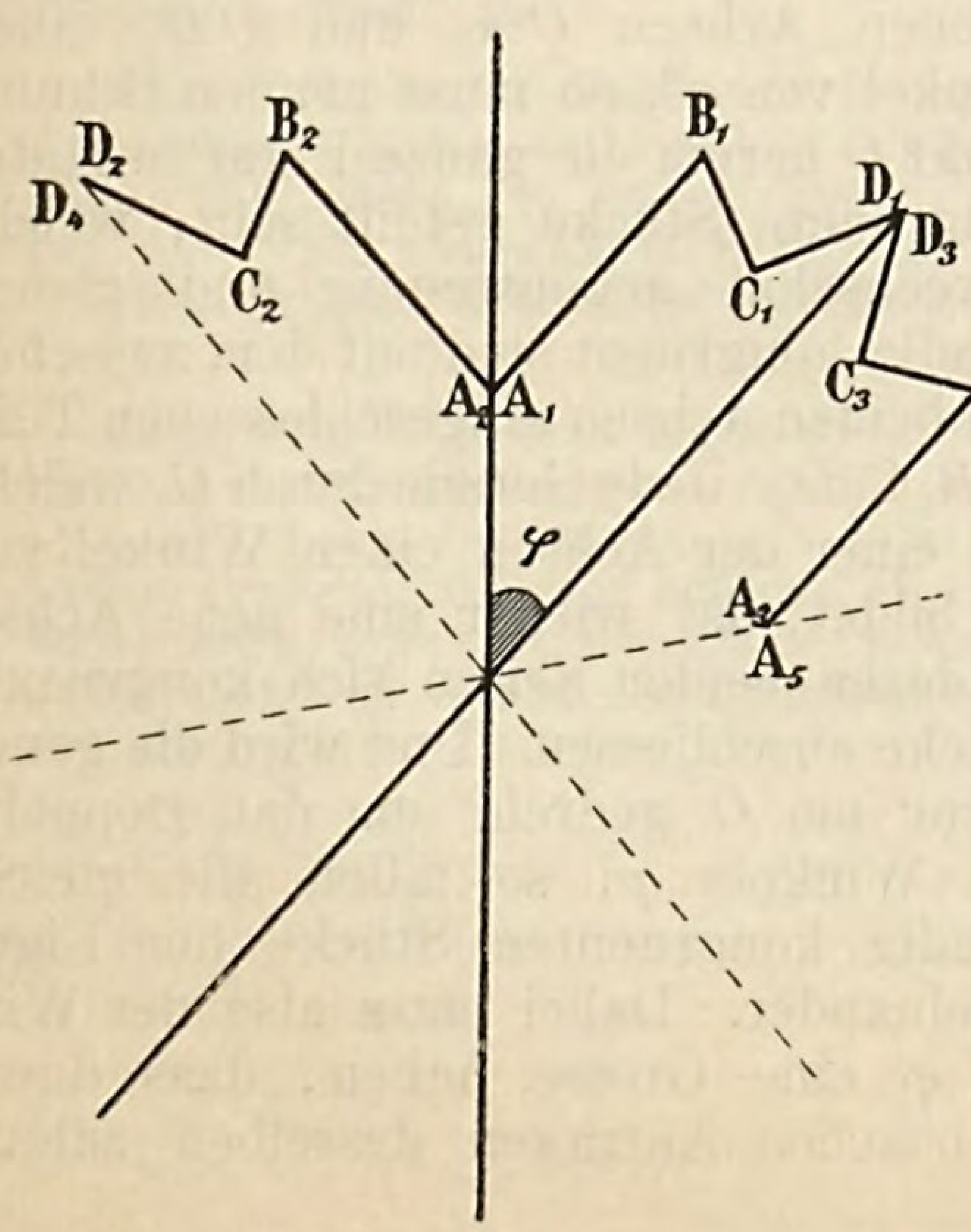
Erkl. 437. Geht man von den zentrisch-symmetrischen Punkten einer Zentralen längs der Seiten und Winkel der einen Hälfte der Figur, so müssen gleiche Strecken und gleichwendig gleiche Winkel durchlaufen werden, auf welcher Seite der Zentralen man auch den Umlauf ausführt. So waren beim || gr die Seiten und Winkel beiderseits jeder durch den Mittelpunkt gehenden Linie einander gleich und teilten die Figur in zwei Teile, die in allen ihren Stücken einzeln gleichwendig kongruent waren. Und das || gr konnte erzeugt werden durch Aneinanderschieben solcher zwei Figuren, die gleichwendig kongruent waren.

Erkl. 438. Im Rhombus, Rechteck und Quadrat, welche sowohl achsig- als zentrisch-symmetrisch sind, mussten die Dreiecke, in welche die Figur durch die Achse zerlegt wurde, sowohl gleich- als ungleichwendig kongruent sein, die Dreiecke waren gleichschenklige.

Teilt man ebenso ein zentrisch-symmetrisches Vieleck durch eine beliebige Zentrale in zwei Teile und rechnet diese Zentrale mit zu den beiderseits derselben entstehenden Hälften des Vielecks, so muss die gesamte Reihenfolge der Seiten und Winkel des zentrisch-symmetrischen Vielecks einerseits der Zentrale gleichwendig kongruent sein mit der vom zentrisch-symmetrisch entgegengesetzten Punkte dieser Zentralen ausgehenden Reihenfolge derselben anderseits der Zentralen. Diese Zentrale bildet also mit den beiden Hälften des Vielecks einzeln zwei gleichwendig kongruente Vielecke, welche mit der Zentralen als gemeinsamer Seite aneinandergelegt sind. Werden also umgekehrt zwei gleichwendig kongruente Vielecke mit den nicht entsprechenden Eckpunkten einer entsprechenden Seite aneinandergeschoben, so bilden sie als Gesamtfigur ein zentrisch-symmetrisches Vieleck, für welches jene gemeinsame Seite Zentrale, also deren Mittelpunkt Symmetriezentrum ist.

Frage 211. Was für kongruente Teile muss ein Vieleck besitzen, das für mehr als **eine** Achse achsig-symmetrisch ist?

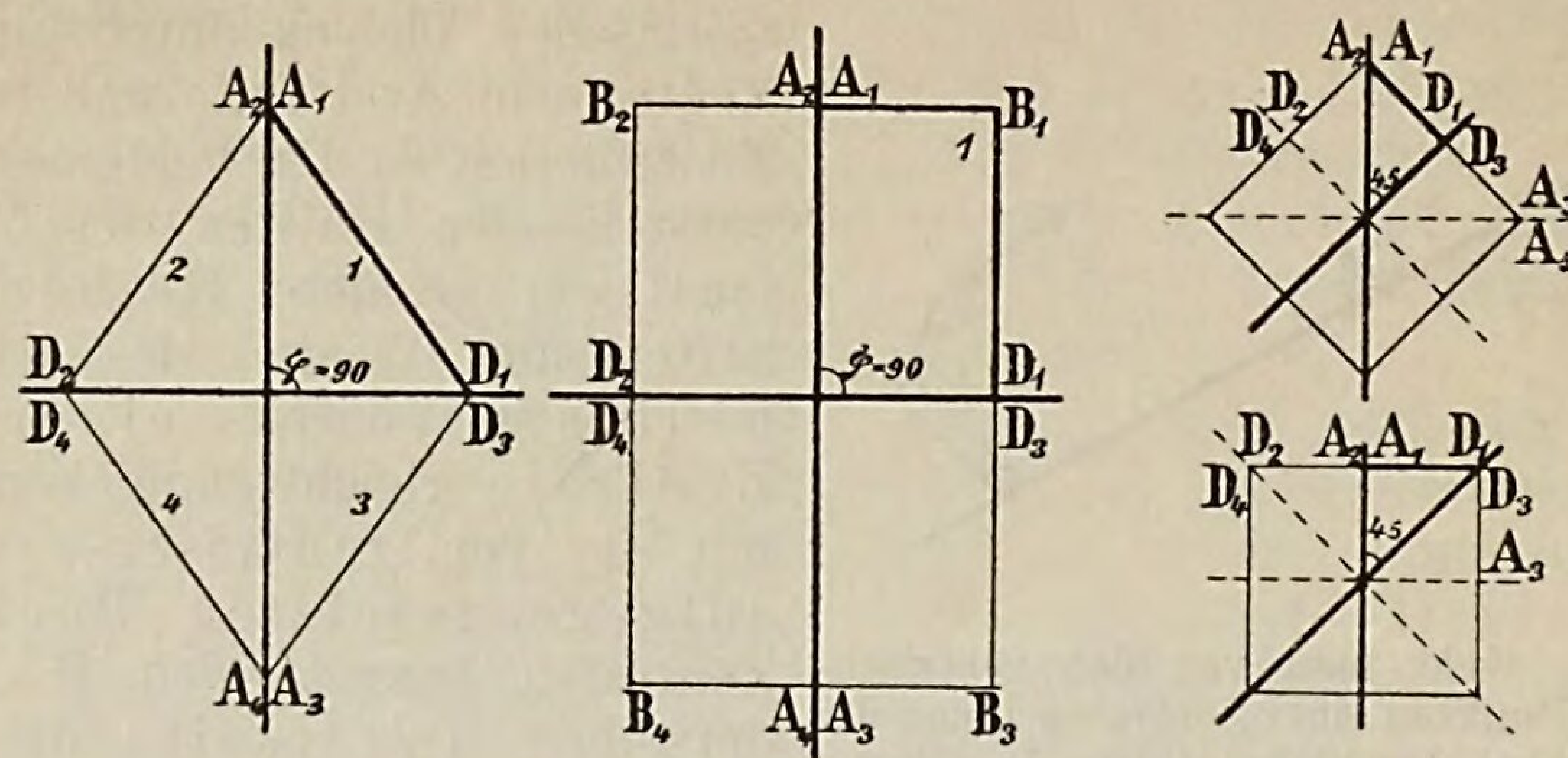
Figur 165.



Antwort. Wenn ein Vieleck für mehr als **eine** Achse achsig-symmetrisch ist, so muss die Reihenfolge seiner Seiten und Winkel im Zwischenraum zwischen dem Schnittpunkt mit der einen Achse bis zum Schnittpunkt mit der nächsten andern Achse gegenwendig kongruent sein mit der Reihenfolge seiner Seiten und Winkel anderseits eines jeden dieser beiden Schnittpunkte. Es müssen also die beiden Reihenfolgen seiner Seiten und Winkel ausserhalb des Zwischenraums der beiden Achsenmittelpunkte selbst mit einander gleichwendig kongruent sein.

Es muss also, wenn in Figur 165 OA_1 und OD_1 Achsen sein sollen, beim Umklappen um OA_1 zur Deckung kommen $A_1B_1C_1D_1$ mit $A_2B_2C_2D_2$ als gegenwendig kongruent. Und beim Um-

Figur 166.



Erkl. 439. Eine Anwendung des nebenstehenden gestattet von den im bisherigen betrachteten Figuren das Rhombus, Rechteck und Quadrat. Das Rhombus ist achsig-symmetrisch sowohl in Bezug auf die eine, als die andere Diagonale. An Stelle des Geradenzuges $A_1 B_1 C_1 D_1$ in Fig. 165 tritt im Rhombus bloss die einzige Rhombusseite, und da alle vier Seiten gleich gross sind, so fällt beim Rhombus jede Seite beim Umklappen auf die gleich grosse benachbarte, beim Umdrehen auf die gleich grosse Gegenseite. Jede Achse gelangt beim Umklappen ebenso wie beim Umdrehen auf ihre eigene Verlängerung.

Beim Rechteck sind die Mittelsenkrechten Achsen, und an Stelle des Geradenzuges $A_1 B_1 C_1 D_1$ treten beim Rechteck viermal die Schenkel eines rechten Winkels, dessen längerer Schenkel an die eine, dessen kürzerer Schenkel an die andere Achse anstösst. Da alle vier Winkel gleich gross sind, so fällt beim Rechteck jeder Winkel beim Umklappen auf den benachbarten, beim Umdrehen auf den Gegenwinkel. Jede Achse gelangt beim Umklappen ebenso wie beim Umdrehen auf ihre eigene Verlängerung.

Erkl. 440. Das Quadrat hat vier Achsen, nämlich Diagonalen der Ecken und Mittelsenkrechte der Seiten. An die Stelle des Geradenzuges $A_1 B_1 C_1 D_1$ in Figur 165 tritt daher beim Quadrat bloss die Hälfte einer einzigen seiner Seiten, die aber achtmal im ganzen auftritt im Zwischenraume zweier Achsen. Während beim Rhombus und Rechteck der Winkel φ ein Rechter ist, — so dass die Drehungsgrösse 2φ, durch welche die Figur zur Deckung gelangt, 180^0 wird und eine halbe Umdrehung erzeugt — ist beim Quadrat der Winkel φ nur $= 45^0$, also $2\varphi = 90^0$. Daher fällt beim Umklappen nur eine Achse auf ihre Verlängerung, die beiden andern vertauschen ihre Lage. Und bei der Umdrehung um 90^0 gelangt jede Achse über die benachbarte Achse hinweg in die Lage der zweitfolgenden, welche zu ihr selbst senkrecht ist.

klappen um OD_1 müssen zur Deckung kommen $D_1 C_1 B_1 A_1$ mit $D_3 C_3 B_3 A_3$ wieder als gegenwendig kongruente Teile. Folglich muss der Teil $A_2 B_2 C_2 D_3$ der Figur gleichwendig kongruent sein dem Teile $A_3 B_3 C_3 D_3$.

Derselbe Teil $D_3 C_3 B_3 A_3$ der Figur kommt aber beim Umklappen um OA_1 zur Deckung mit einem in D_2 anschliessenden Teile $D_4 C_4 B_4 A_4$ und ebenso kommt der Figurenteil $A_2 B_2 C_2 D_2$ beim Umklappen um $OD_1 = OD_3$ zur Deckung mit einem in A_3 anschliessenden Teile $A_5 B_5 C_5 D_5$. Zugleich kommt dabei die Achse OD_3 auf OD_4 bezw. OA_3 auf OA_5 und an diesen beiden Linien schliessen beiderseits wieder gegenwendig kongruente Reihenfolgen von Seiten und Winkeln an.

Bilden also die beiden zunächstgelegenen Achsen OA_1 und OD_1 einen Winkel von φ^0, so muss um den Schnittpunkt O herum die ganze Figur in lauter kongruente Stücke geteilt sein, welche abwechselnd gegenwendig und gleichwendig kongruent sind mit dem zwischen den beiden Achsen eingeschlossenen Teile $A_1 B_1 C_1 D_1$. Jede Gerade durch O, welche mit einer der Achsen einen Winkel von φ^0 bildet, ist wieder eine neue Achse, zu deren beiden Seiten sich kongruente Stücke anschliessen. Und wird die ganze Figur um O gedreht um das Doppelte des Winkels φ, so fallen alle gleichwendig kongruenten Stücke der Figur aufeinander. Dabei muss also der Winkel φ eine Grösse haben, dass durch mehrfaches Antragen desselben zuletzt

die Achse wieder mit der Verlängerung der ersten zusammenfallen kann, d. h. es muss die Zahl φ in 180^0 ohne Rest enthalten sein.

Frage 212. Welche Aussagen über mehrfach achsige Figuren lassen sich machen auf Grund der in voriger Antwort angestellten Ueberlegungen?

Antwort. Auf Grund der in voriger Antwort angestellten Ueberlegungen kann man über Figuren, welche zu mehrfachen Symmetrieachsen achsig-symmetrisch sind, folgende Aussagen machen:

Satz 97. Wenn eine Figur überhaupt mehr als eine Symmetrieachse besitzt, von denen zwei benachbarte einen Winkel von φ^0 bilden, so muss $\frac{180^0}{\varphi}$ eine ganze Zahl m sein, und die Figur besitzt m Achsen, nämlich die Schenkel der am Schnittpunkt der ersten Achsen anzutragenden Winkel φ, 2φ, 3φ, $4\varphi \cdots$ Diese m Achsen teilen die Figur in $2m$ kongruente Teile, von welchen je zwei aufeinanderfolgende ungleichwendig, je zwei durch einen solchen Teil getrennte Teile gleichwendig kongruent sind.

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 97a. Wenn eine Figur m Achsen besitzt, so schneiden sich sämtliche Achsen in einem Punkte und bilden je gleichgrosse Winkel von $\varphi = \frac{180^0}{m}$; und durch Umdrehung um den Mittelpunkt um den Betrag von $\psi = \frac{360^0}{m}$ kommt die Figur mit sich selbst zur Deckung.

Und umgekehrt:

Satz 97b. Kommt eine Figur mit sich selbst zur Deckung durch eine Umdrehung um einen Winkel ψ^0, so muss $\frac{360^0}{\psi}$ eine ganze Zahl m sein und wenn eine solche Figur dazu noch eine Symmetrieachse hat, so hat sie im ganzen m Symmetrieachsen durch den Mittelpunkt unter Winkeln von je $\frac{\psi^0}{2}$ zu einander.

Erkl. 441. Die in nebenstehenden Sätzen auftretenden Grössen haben nach Figur 166 und den Erkl. 439 und 440 bei den besondern Vierecken folgende Werte:

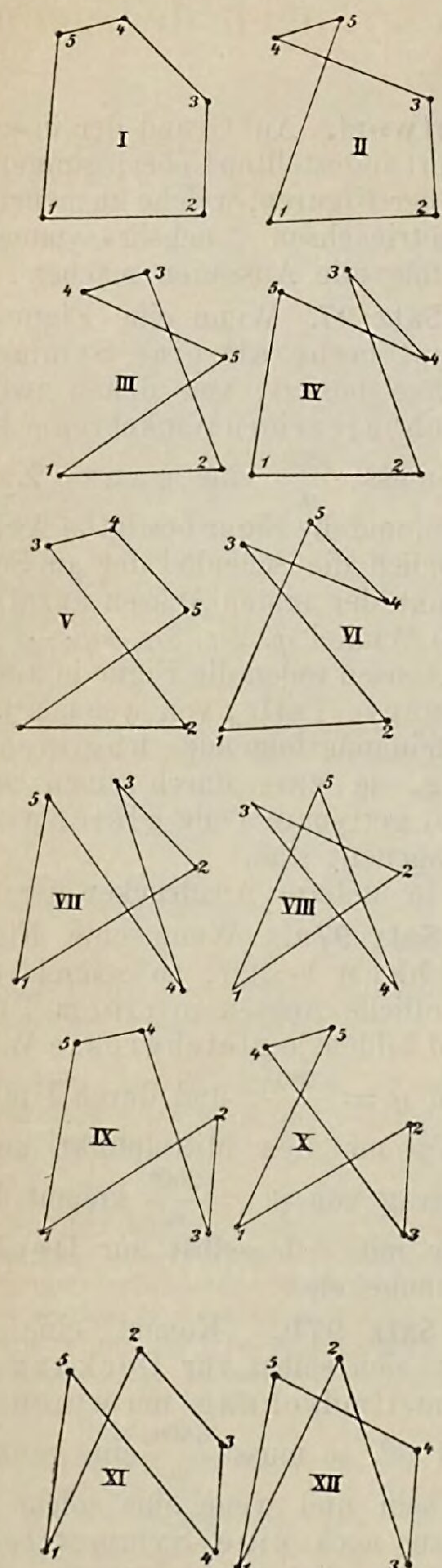
	$\varphi = \frac{180^0}{m}$	$m = \frac{180^0}{\varphi} = \frac{360^0}{\psi}$	$\psi = \frac{360^0}{m} = 2\varphi$	Anzahl kongruenter Teile:
Rhombus	$\varphi = 90^0$	$m = 2$	$\psi = 180^0$	$2m = 4.$
Rechteck	$\varphi = 90^0$	$m = 2$	$\psi = 180^0$	$2m = 4.$
Quadrat	$\varphi = 45^0$	$m = 4$	$\psi = 90^0$	$2m = 8.$

Erkl. 442. Da für die Umdrehung um 180^0 der besondere Ausdruck der zentrischen Symmetrie besteht, so kann man die nebenstehenden Sätze 97a und 97b auch in folgende spezielle Ausdrucksweise fassen, welche besonders für Rhombus, Rechteck und Quadrat gilt und die in Erkl. 339 und 353 angedeutete Ausführung in Worte fasst:

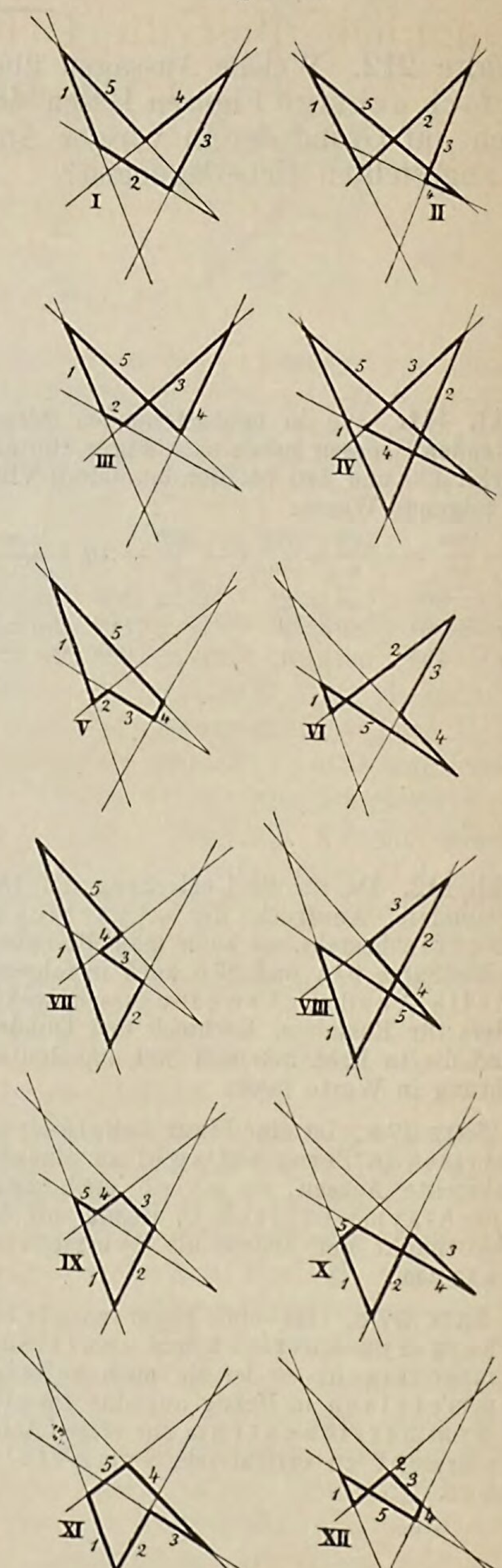
Satz 97a. Ist eine Figur achsig-symmetrisch in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Achsen, so ist sie auch zentrisch-symmetrisch in Bezug auf den Schnittpunkt der Achsen als Symmetriezentrum..

Satz 97b. Ist eine Figur zugleich achsig-symmetrisch und zentrisch-symmetrisch, so ist sie auch achsig-symmetrisch in Bezug auf eine zweite im Symmetriezentrum zur ersten Achse senkrecht zu errichtende Symmetrieachse.

Figur 167.



Figur 168.



Aufgaben-Sammlung.

A. Aufgaben über die Ortsveränderungen der geometrischen Gebilde.

1) Aufgaben über die geometrischen Gebilde und ihre Ortsveränderungen im allgemeinen.

(Zu Abschnitt A und B 1.)

a) Gelöste Aufgaben.

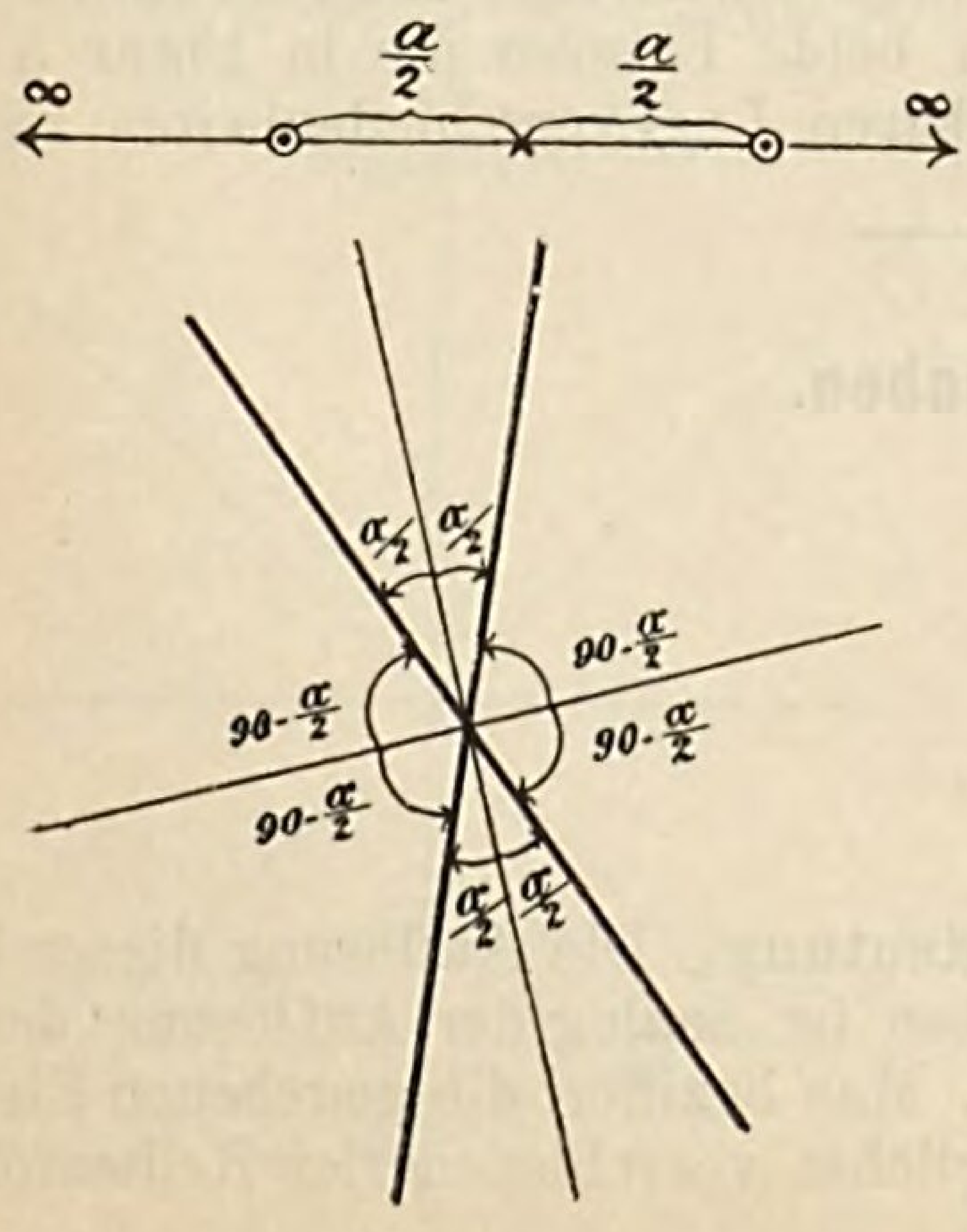
Aufgabe 1. Man soll die aus denselben fünf gegebenen Punkten herstellbaren einfachen Fünfecke und die aus denselben fünf gegebenen Geraden herstellbaren einfachen Fünfseite konstruieren.

Auflösung. Man bezeichne einen bestimmten der fünf Punkte bezw. eine bestimmte der fünf Geraden mit der Zahl 1, wähle aus den übrigen vier Elementen der Reihe nach je eines heraus und bezeichne es mit der Zahl 2, aus den drei übrigen eines mit der Zahl 3, aus den zwei letzten eines mit der Zahl 4, das letzte mit der Zahl 5 und verbinde die Punkte, bezw. bringe die Geraden zum Schnitt in jeglicher durch die 12 verschiedenen Arten der Auswahl möglichen Reihenfolge.

Erkl. 443. Um zu vermeiden, dass man diejenigen Gebilde doppelt erhält, welche sich bloss durch die Umlaufsrichtung unterscheiden, beachte man bei der Auswahl, dass man keine Reihenfolge wähle, die als umgekehrte in den zuvor gezeichneten bereits enthalten ist. Dabei kann als Hilfsmittel dienen, dass jede einzelne Gerade (Fig. 168) bezw. jeder einzelne Schnittpunkt (Figur 167) gleich oft (nämlich sechsmal) anzuwenden ist.

Aufgabe 2. Man soll zu zwei gegebenen Punkten auf ihrer Verbindungs-Geraden einen weiteren Punkt bezw. zu zwei gegebenen Geraden durch ihren Schnittpunkt eine weitere Gerade suchen, welche von den beiden gegebenen den gleichen Abstand hat.

Figur 169.



Auflösung. Man suche auf der Verbindungsgeraden der beiden gegebenen Punkte den Mittelpunkt und den unendlich fernen Punkt bezw. durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden die Halbierungslinien des Winkels und Nebenwinkels. Dann hat jedes der gefundenen Gebilde den gleichen Abstand von jedem der gegebenen Gebilde. Denn nach jedem Punkte ist gleiche Entfernungsstrecke vom Mittelpunkt und vom unendlich fernen Punkte, und nach jeder Geraden ist gleicher Winkelabstand von der Halbierungslinie des Winkels und des Nebenwinkels.

Erkl. 444. Ist der Abstand der gegebenen Punkte gleich a, so ist der Abstand des Mittelpunktes jedesmal $\frac{a}{2}$, der des unendlich fernen jedesmal $= \infty$. Ist der Winkel der gegebenen Geraden α, so ist der Abstand der Halbierungslinie des Winkels jedesmal $\frac{\alpha}{2}$, derjenigen des Nebenwinkels jedesmal $\frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$.

Erkl. 445. Statt auf der Verbindungslinie bezw. durch den Schnittpunkt ein Gebilde zu suchen mit gleichem Abstand, kann man auch sagen, ein Gebilde suchen, welches den Abstand der gegebenen halbiert. Denn der Abstand zweier Geraden wird gebildet durch ihren Winkel oder Nebenwinkel, der Abstand zweier Punkte durch die endliche Verbindungsstrecke oder durch jene, welche den unendlich fernen Punkt enthält.

Aufgabe 3. Man soll nach einer der in Erkl. 19a angegebenen Erzeugungsweisen kongruenter Figuren solche kongruente Figuren erzeugen, welche 1) durch Verschiebung allein, 2) durch Drehung allein, 3) durch Umklappung allein, 4) durch Verbindung aller drei Lageveränderungen zur Deckung gebracht werden können.

Erkl. 446. Unter Benützung der Ausführungen über Umklappung, Umdrehung und Verschiebung, welche in den Abschnitten B 2, B 3 und B 4 dieses Teiles gemacht werden, kann die im vorstehenden geforderte Konstruktion auch mit Lineal und Zirkel und Winkelmesser ausgeführt werden, entsprechend den punktierten Linien, welche in Fig. 5 bis 9 den Weg der Figuren aus der einen Lage in die andere angeben. Man sehe darüber die zu den genannten Abschnitten gehörigen Aufgaben dieser Sammlung.

Auflösung. Um kongruente Figuren von nebenstehender Eigenschaft zu erzeugen, benütze man entweder die Methode mit Pauspapier oder Scheere oder einer Durchstichnadel und kopiere zunächst eine beliebige auf einem andern Blatte gezeichnet vorliegende Figur. Alsdann nehme man entweder mit demjenigen Blatte, welches die Vorlage enthält, oder mit dem, welches die Kopie enthält, diejenige Ortsveränderung vor, welche die verlangten Figuren aufweisen sollen, und kopiere in dieser neuen gegenseitigen Lage beider Blätter dieselbe Figur noch einmal auf dasselbe Blatt. Dann werden beide Figuren die in Figur 5 bis 9 erkennbaren Lageverschiedenheiten besitzen.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 4. Man zeichne möglichst viele der aus denselben sechs Punkten herstellbaren einfachen Sechsecke.

Aufgabe 5. Man zeichne möglichst viele der aus denselben sechs Geraden herstellbaren einfachen Sechsseite.

Andeutung. Die Auflösung dieser beiden Aufgaben ist analog der Auflösung der Aufgabe 1. Man beziffert die gegebenen Elemente in möglichst verschiedenerlei Reihenfolgen.

Aufgabe 6. Man nehme Bleistifte von zweierlei Farbe, etwa rote und blaue. Damit zeichne man dualistische Figuren, indem man in der ersten alle Punkte rot angibt, in der zweiten alle Geraden rot zieht, in der ersten alle Verbindungsgeraden blau zeichnet, in der zweiten alle Schnittpunkte blau, u. s. w.

Andeutung. Die Aufgabe ist zu lösen durch fortgesetzte Gegenüberstellung der Angaben in den Antworten auf die Fragen 4 bis 6.

Aufgabe 7. Man zeichne einen Punkt, eine Gerade, einen Kreis und ein bebeliebiges Dreieck. Zu diesen vier Gebilden zeichne man die kongruenten Figuren: 1) durch Verschiebung längs der Geraden selbst, 2) durch Drehung um den Punkt selbst, 3) durch Umwendung um die Gerade selbst.

Aufgabe 8. Man zeichne einen Kreis, ein Dreieck und ein Viereck, und zeichne dazu die kongruenten Figuren, 1) durch Verschiebung und Drehung, 2) durch Verschiebung und Umwendung, 3) durch Umdrehung und Umwendung — je um beliebig gewählte Achsen bezw. Mittelpunkte.

Andeutung. Man verfahre nach einer der in Auflösung der Aufgabe 3 angegebenen Methoden.

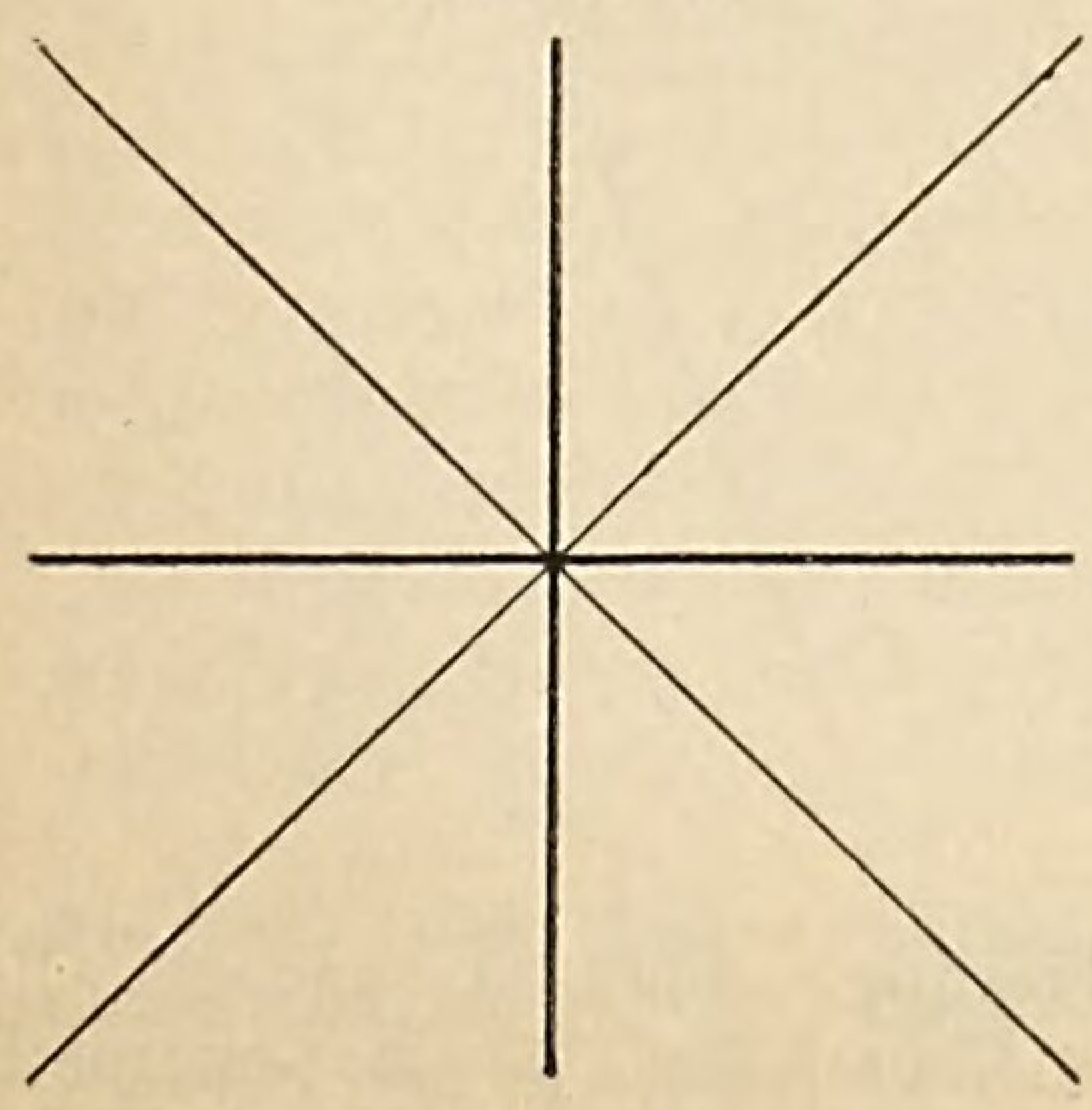
2) Aufgaben über die Umwendung oder achsige Symmetrie.

(Zu Abschnitt B 2.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 9. Man soll beweisen, dass die aus zwei senkrechten Geraden bestehende Figur (Fig. 170) achsig-symmetrisch ist zu beiden Geraden und zu beiden Winkelhalbierenden als Achsen.

Figur 170.



Auflösung. Klappt man um die eine der beiden Geraden selbst um, so ist diese selbst Symmetrieachse, die andere zu ihr senkrechte Gerade aber eine Achsensenkrechte. Da aber nach den Sätzen 6 und 7 sowohl die Symmetrieachse selbst, als auch jede Achsensenkrechte selbstentsprechende Geraden sind, so muss auch die ganze Figur mit sich selbst zur Deckung gelangen, um welche von beiden Geraden man auch umklappt.

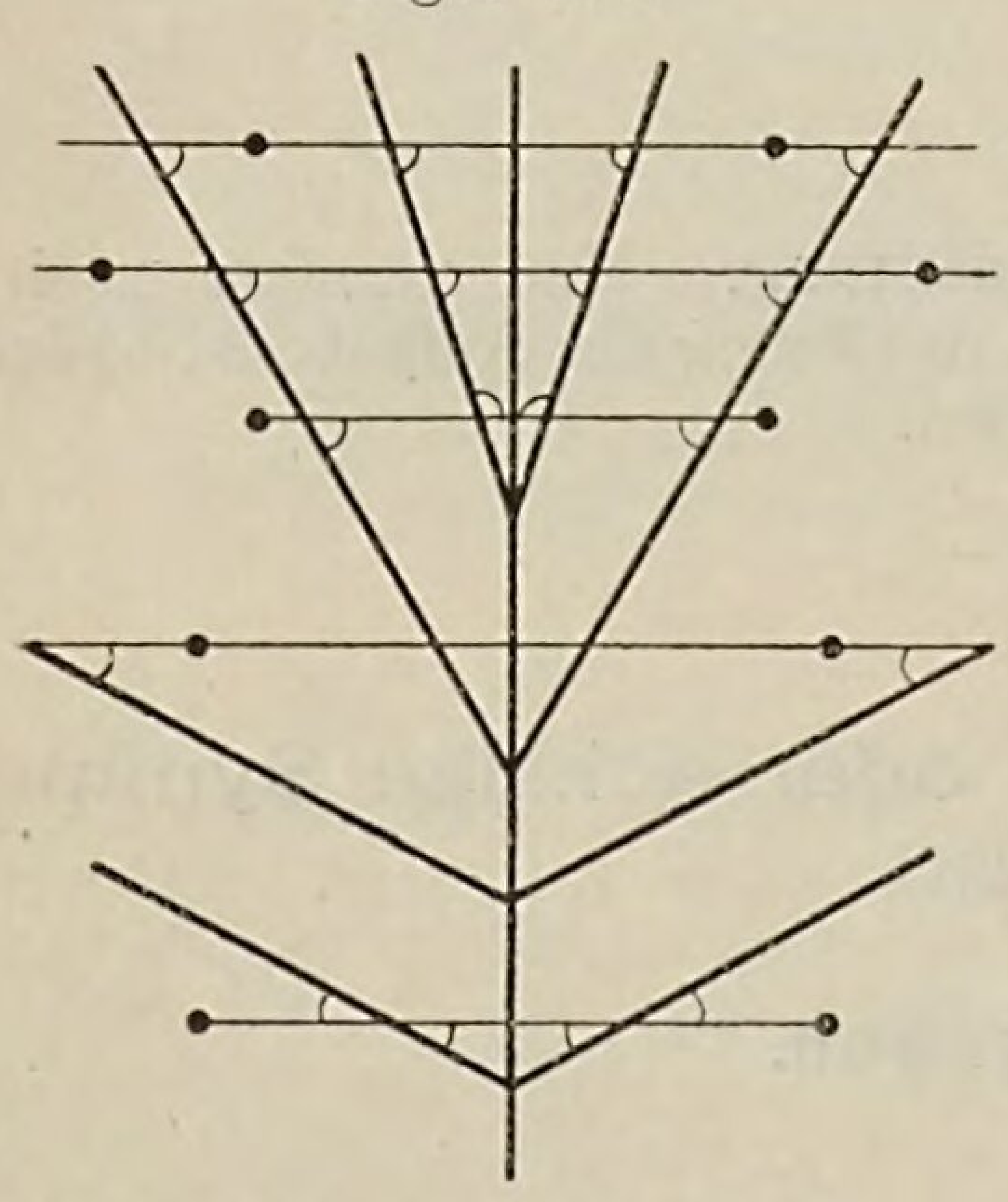
Klappt man um die eine Winkelhalbierende um, so fällt die eine Winkelhälfte von 45^0 auf die andere gleichgrosse Winkelhälfte, also wieder je die eine der senkrechten Geraden auf die andere, so dass die ganze Figur wieder symmetrisch ist.

Erkl. 447. Dass bei jeder der vier verschiedenen Umklappungsweisen, welche in Aufgabe 9 angegeben sind, jede Richtung einer der beiden Geraden auf eine andere Richtung der Figur gelangt, folgt aus der Verschiedenheit des „Selbstentsprechens" einer Achse und einer Achsensenkrechten und aus Antwort der Frage 37.

Erkl. 448. Entsprechend den Sätzen 97 kommt dieselbe aus zwei senkrechten Geraden bestehende Fig. 170 auch mit sich selbst zur Deckung durch Umdrehung um den Schnittpunkt sowohl um den Betrag von 180° (so dass sie also auch zentrisch-symmetrisch ist), als von 90°.

Aufgabe 10. Es seien gegeben die Symmetrieachse und mehrere Paare entsprechender Punkte und Geraden. Man untersuche die Eigenschaften der Verbindungslinien dieser entsprechenden Punkte-Paare.

Figur 171.



Auflösung. Nach Satz 8b stehen sämtliche Verbindungsgeraden entsprechender Punkte auf der Achse senkrecht, also sind dieselben nach Lehrsatz 30 des zweiten Teiles sämtlich parallel. Ferner schneiden sie auf den symmetrischen Geradenpaaren symmetrische Punkte aus (welche auf ihnen selbst und auf den Geraden gleiche Strecken vom Achsenschnittpunkt aus bilden), sie bilden mit ihnen symmetrisch gleiche Winkel, und sind die Senkrechten auf der Winkelhalbierenden je zweier entsprechenden. Also bildet jede dieser Verbindungslinien mit jedem symmetrischen Geradenpaare ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundseite die erstere Linie, dessen Symmetrieachse die gegebene Achse ist.

Erkl. 449. Auf Grund der nebenstehenden Ausführungen könnte man mehrfache Sätze aussprechen, welche eine Weiterführung der in der Antwort der Fragen 30 und 31 enthaltenen bilden. Man erhält insbesondere:

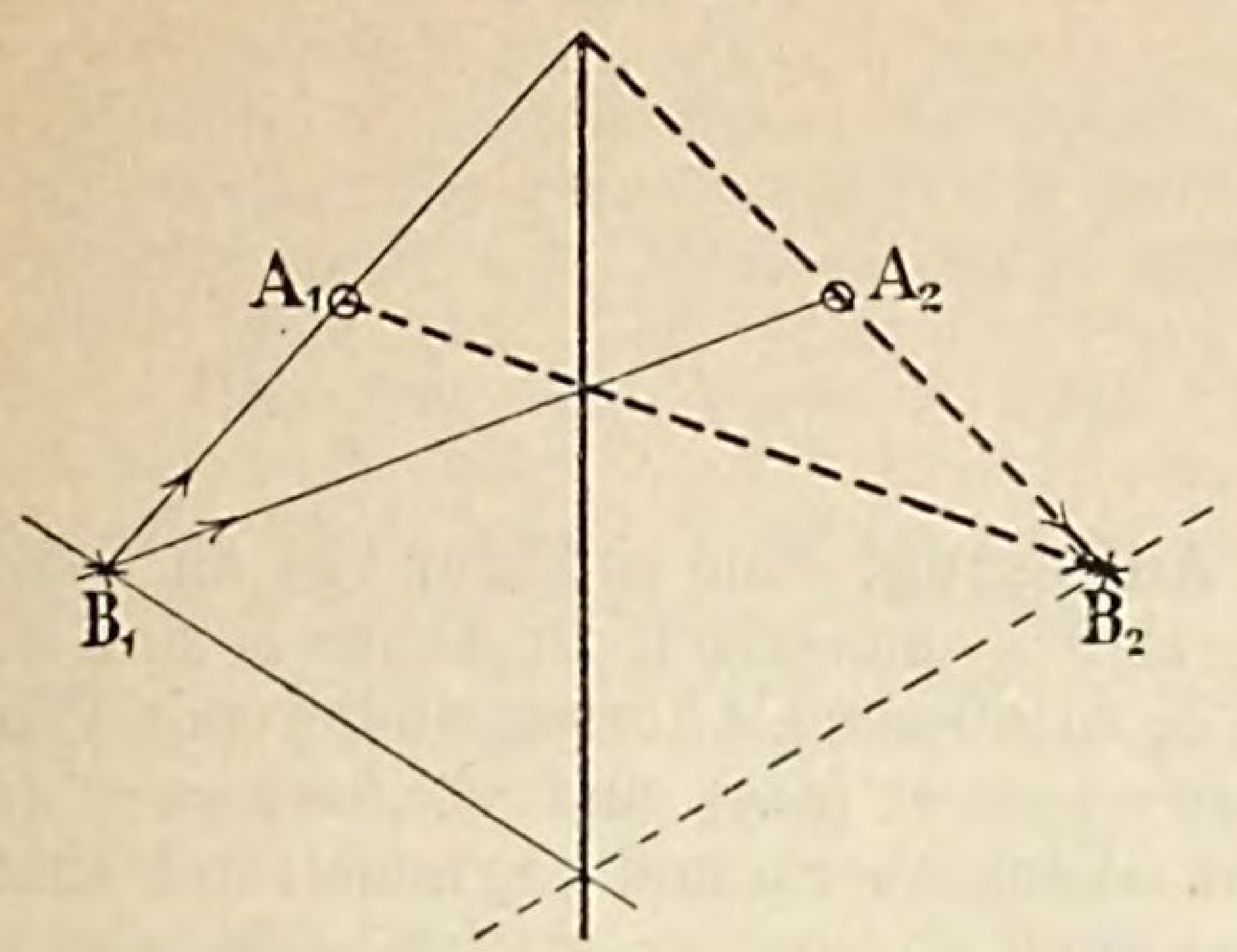
Satz 14b. Die Verbindungsgerade je zweier zu einer Achse symmetrischen Punkte sind parallel — und

Satz 15b. Die Senkrechten auf der Halbierungslinie eines Winkels schneiden auf den Schenkeln stets zwei gleichlange Stücke ab und bilden gleiche Winkel mit ihnen. (Letzteres siehe schon in Aufgabe 146 des zweiten Teiles).

Aufgabe 11. Es seien gegeben die Symmetrieachse und ein Paar entsprechender Punkte. Man soll mittels des Lineals allein (also ohne Zirkel, Massstab, Winkelscheit und Winkelmesser) weitere achsig-symmetrischen Punkte und Geradenpaare konstruieren.

Auflösung. Sind A_1 und A_2 die gegebenen Punkte und B_1 ein weiterer Punkt, dessen symmetrischer gesucht wird, so kann

Figur 172.



man mit dem Lineal den Punkt B_1 verbinden mit A_1 und A_2. Dann muss die symmetrisch entsprechende Gerade zu $B_1 A_1$ durch A_2 gehen und durch denselben Achsenpunkt, wie $B_1 A_1$, kann also mittels Lineals konstruiert werden. Ferner muss die symmetrisch entsprechende Gerade zu $B_2 A_2$ durch A_1 gehen und durch denselben Achsenpunkt, wie $B_2 A_2$, kann also ebenfalls mit dem Lineal gezogen werden. Der Schnittpunkt beider entsprechenden Geraden muss also der gesuchte Punkt B_2 sein.

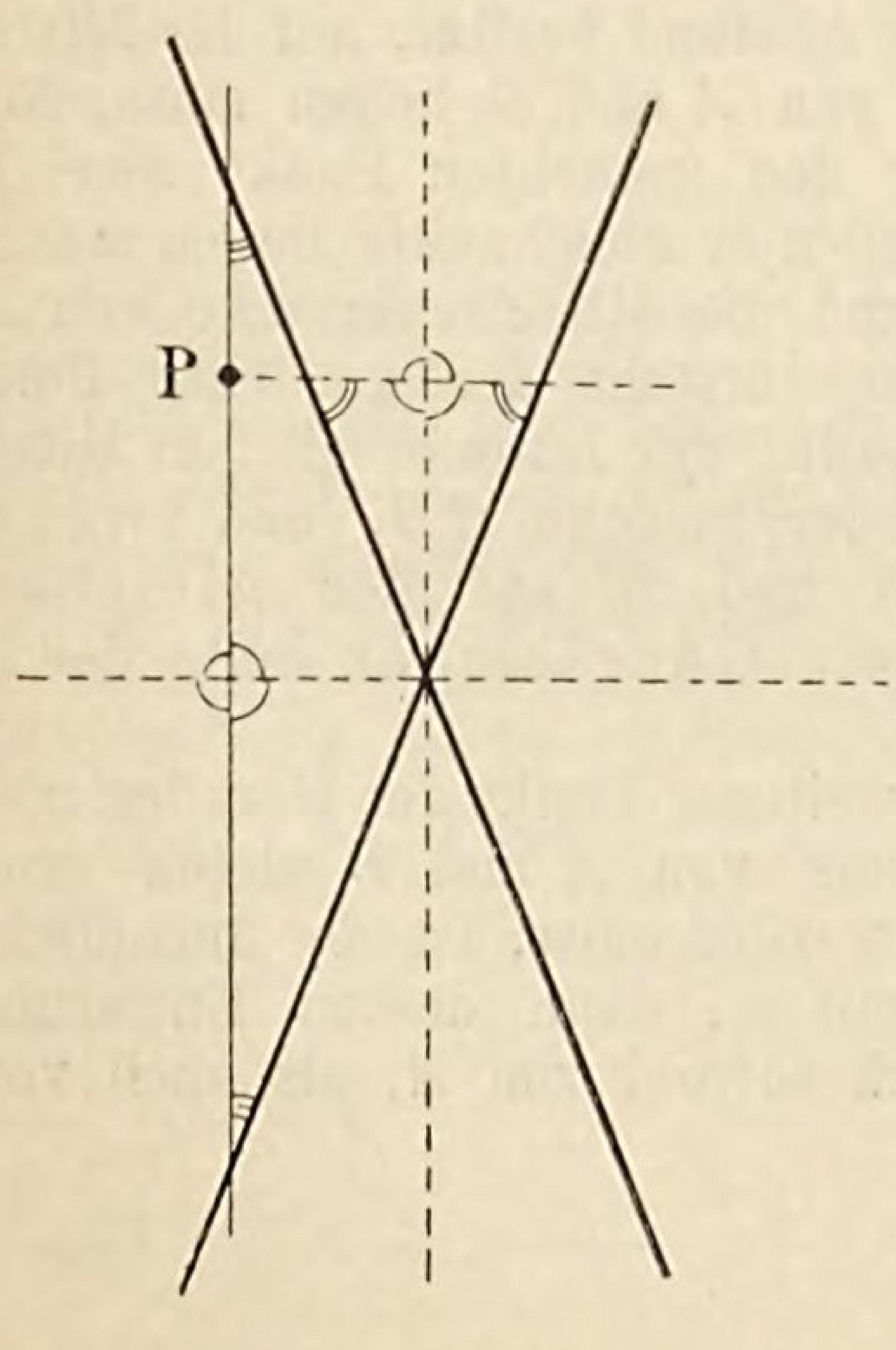
Kennt man aber den Punkt B_2, so kann man die symmetrische Gerade zu irgend einer Geraden durch Punkt B_1 erhalten, indem man B_2 mit dem Achsenschnittpunkte dieser Geraden verbindet.

Erkl. 450. Wird die entsprechende Gerade verlangt zu einer Geraden, welche nicht durch den Punkt B_1 geht, so wählt man auf derselben einen beliebigen Punkt C_1, zeichnet zu demselben, wie oben zu B_1, den entsprechenden Punkt C_2, und verbindet dann C_2 mit dem Achsenpunkte der gegebenen Geraden.

Erkl. 451. Aus dem Besprochenen geht hervor, dass durch die Symmetrieachse und ein einziges entsprechendes Punktepaar eine achsigsymmetrische Lage für sämtliche Figuren einer Ebene eindeutig bestimmt und durch das Lineal allein konstruierbar ist.

Aufgabe 12. Man soll durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden gleiche Winkel bildet.

Figur 173.



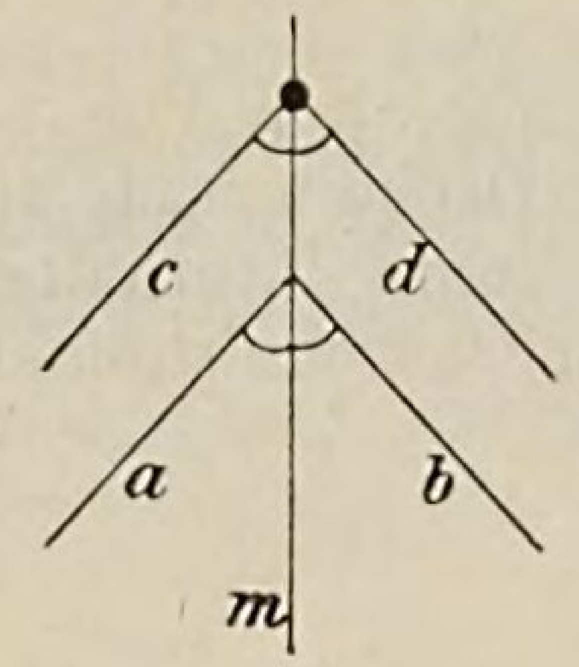
Erkl. 452. Die beiden Geraden bilden zweierlei Winkel, haben also zweierlei Winkelhalbierende, also gibt es auch zweierlei Gerade durch P, welche die verlangte Eigenschaft haben.

Auflösung. Nach Auflösung der Aufgabe 10 bildet die Senkrechte auf der Winkelhalbierenden zweier Geraden gleiche Winkel mit jenen. Man zeichne also die Winkelhalbierende der beiden gegebenen Geraden und fälle auf dieselbe von P aus eine Senkrechte. Zum Beweise klappe man um diese Winkelhalbierende um, dann kommen die Winkelschenkel als symmetrische Geraden, die Senkrechte auf der Winkelhalbierenden als Achsensenkrechte zur Deckung, also sind die beiden Winkel symmetrisch gleich.

Da die beiden Winkelhalbierenden aber senkrecht sind, so müssen auch diese beiden Geraden, welche auf jenen senkrecht sind, auf einander senkrecht sein.

Aufgabe 13. Man soll beweisen, dass zwei Gerade durch einen Achsenpunkt symmetrisch sind, wenn sie zu zwei andern symmetrischen Geraden parallel sind.

Figur 174.

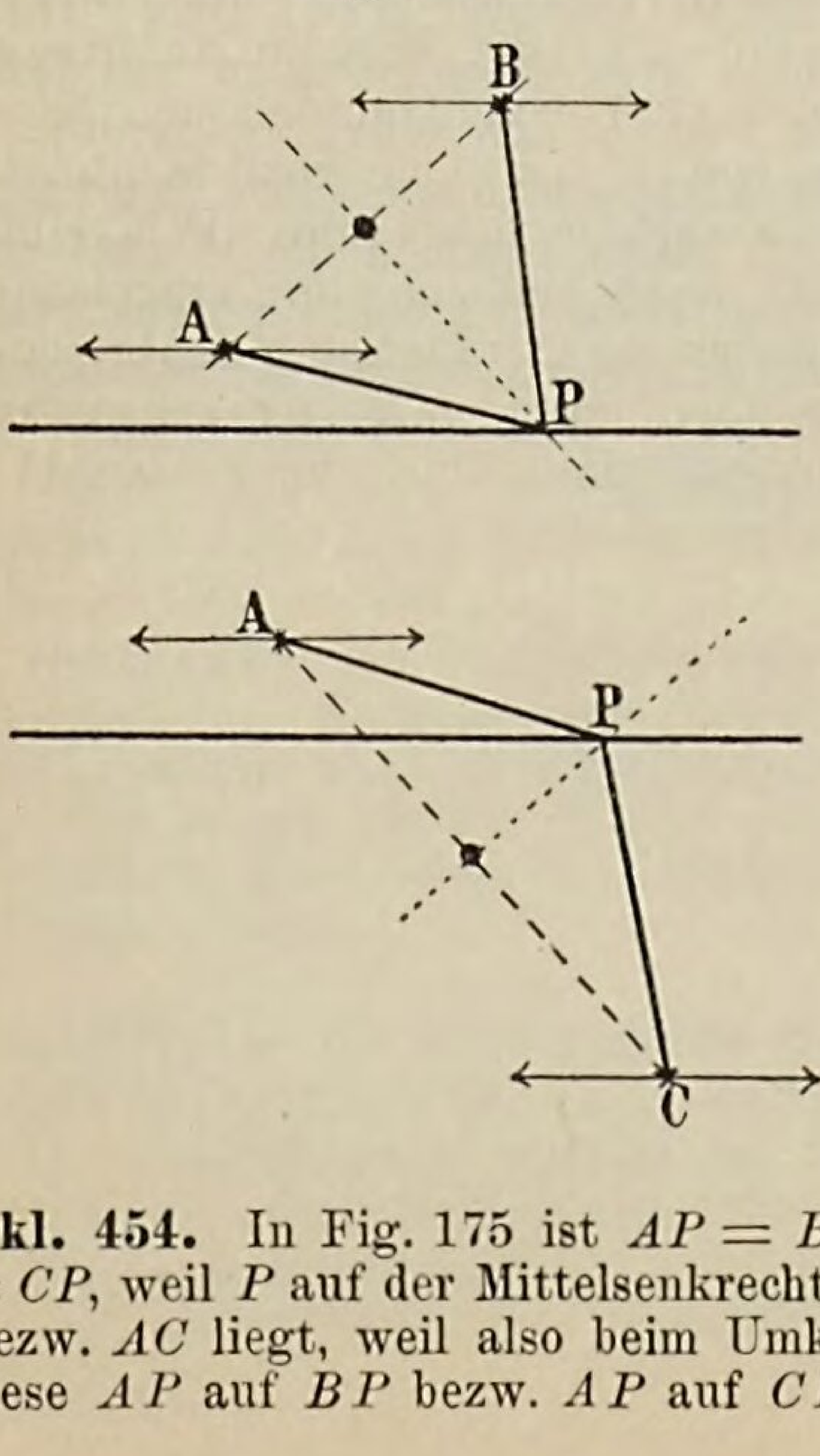


Auflösung. Sind in Figur 174 die Geraden a und b symmetrisch zu Achse m und $c \parallel a$, $d \parallel b$, so müssen als korrespondierende Winkel $\sphericalangle (am) = \sphericalangle (cm)$ und $\sphericalangle (bm) = \sphericalangle (dm)$ sein. Wenn aber a und b symmetrisch sind, so muss auch $\sphericalangle (am) = \sphericalangle (bm)$ sein, also auch $\sphericalangle (cm) = \sphericalangle (dm)$, d. h. die Achse halbiert auch den Winkel (c, d), also sind c und d ebenfalls symmetrisch.

Erkl. 453. Man könnte den verlangten Beweis auch führen auf Grund Satz 14, indem man die Geraden c und d als solche ansieht, welche die unendlich fernen symmetrischen Punkte der symmetrischen Geraden a und b mit einem Achsenpunkt verbinden.

Aufgabe 14. Man soll auf einer gegebenen Geraden a einen Punkt suchen, dessen Verbindungslinien mit zwei weiteren gegebenen Punkten A und B gleiche Strecken bilden.

Figur 175.



Auflösung. Da nach Satz 14 bezw. dessen in Erkl. 44b gegebener Abänderung jeder Punkt, welcher von zwei Punkten A und B gleichen Abstand besitzt, auf der Mittelsenkrechten von A und B liegen muss, so kennt man für den gesuchten Punkt zwei Linien, auf welchen er gleichzeitig liegen muss, nämlich a und die Mittelsenkrechte von AB.

Daher entsteht der gesuchte Punkt als Schnittpunkt der Linie a mit der Mittelsenkrechten der Strecke AB, und zwar sowohl wenn A und B auf der gleichen, als wenn sie auf ungleicher Seite der Linie a liegen.

Ein weiterer Punkt der Geraden a, dessen Entfernung von A und B gleich gross angesetzt werden muss, ist der unendlich ferne Punkt auf a, denn dessen Entfernung ist unendlich sowohl von A, als auch von B.

Erkl. 454. In Fig. 175 ist $AP = BP$ und $AP = CP$, weil P auf der Mittelsenkrechten von AB bezw. AC liegt, weil also beim Umklappen um diese AP auf BP bezw. AP auf CP fällt.

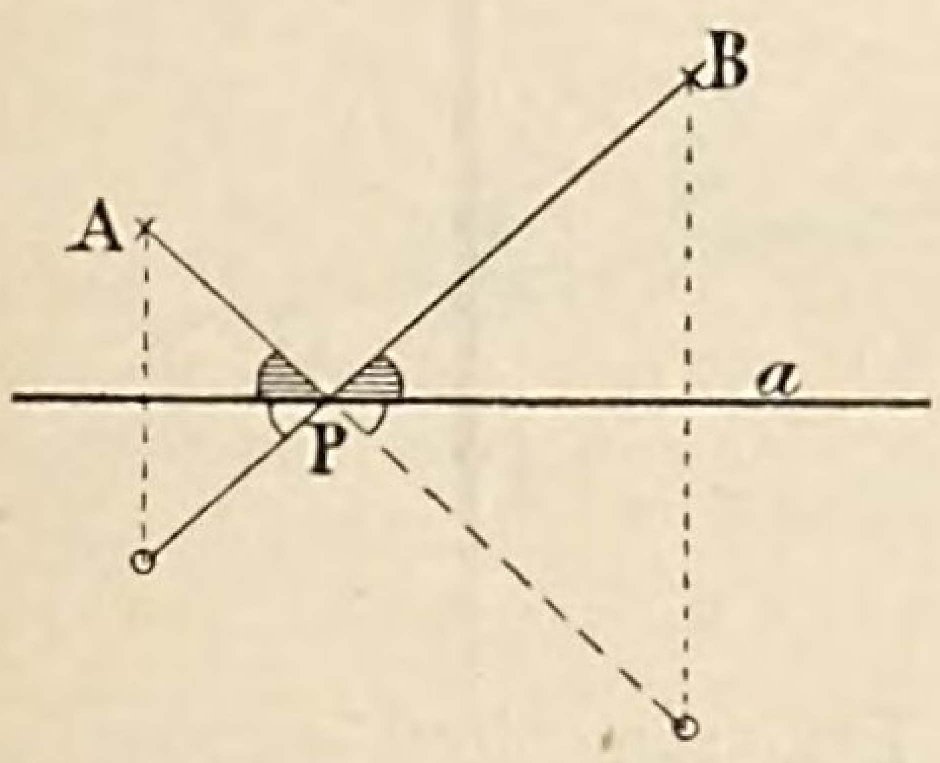
Erkl. 455. Verbindet man den unendlich fernen Punkt auf a mit A und B, so erhält man zwei Parallele zu a durch A und B, beide von derselben Länge ∞. Rückt der Punkt aus dem unendlichen von links her näher in endliche Entfernung, so ist sein Abstand von A kleiner als von B bezw. von C, bis er in den Punkt P gelangt. Hier sind beide Abstände gleich, und von da an nach rechts ist der Abstand von A grösser als von B bezw. C, bis im Unendlichen beide Abstände wieder gleich ∞ werden.

Diese Aufgabe ist eine dualistische zur vorhergehenden Aufgabe 12, indem sie statt durch einen Punkt eine Gerade zu verlangen, auf einer Geraden einen Punkt sucht, und zwar mit gleichen Abstandsstrecken von gegebenen Punkten statt mit gleichen Winkeln gegen gegebene Geraden.

Erkl. 456. Eine andere dualistische Uebertragung dieser Aufgabe verlangt im Punkte P statt gleicher Strecken gleiche Winkel, und ist in der folgenden Aufgabe gegeben.

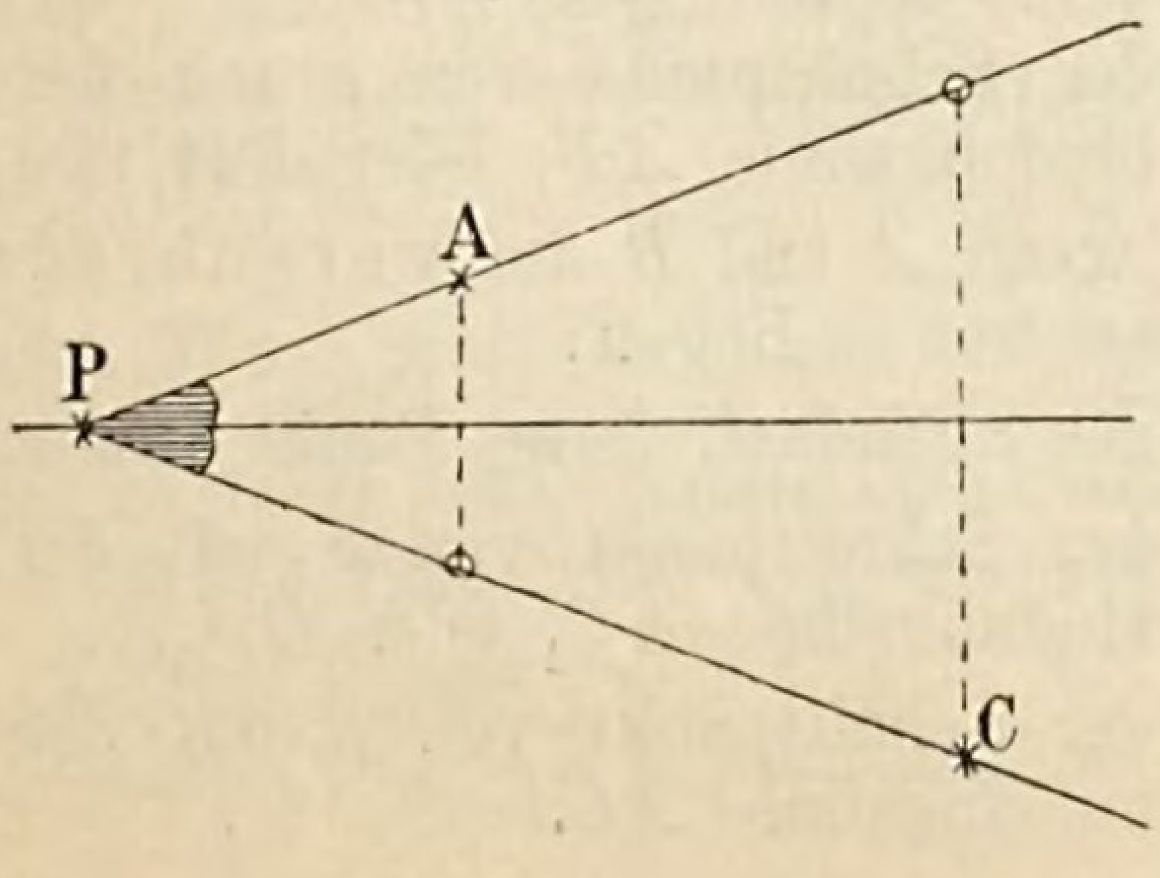
Aufgabe 15. Man soll auf einer gegebenen Geraden a einen Punkt suchen, dessen Verbindungslinien mit zwei weiteren gegebenen Punkten A und B gleiche Winkel mit a bilden.

Figur 176.



Erkl. 457. Liegen die Punkte A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden a, so ist noch leichter, als im nebenstehend behandelten Falle zu erkennen, dass die Linien AP und CP selbst symmetrisch sein müssen, dass man also den Punkt P auf dieselbe Weise findet, wie im Schlusssatze nebenstehender Auflösung angegeben, und aus Figur 177 zu erkennen ist.

Figur 177.



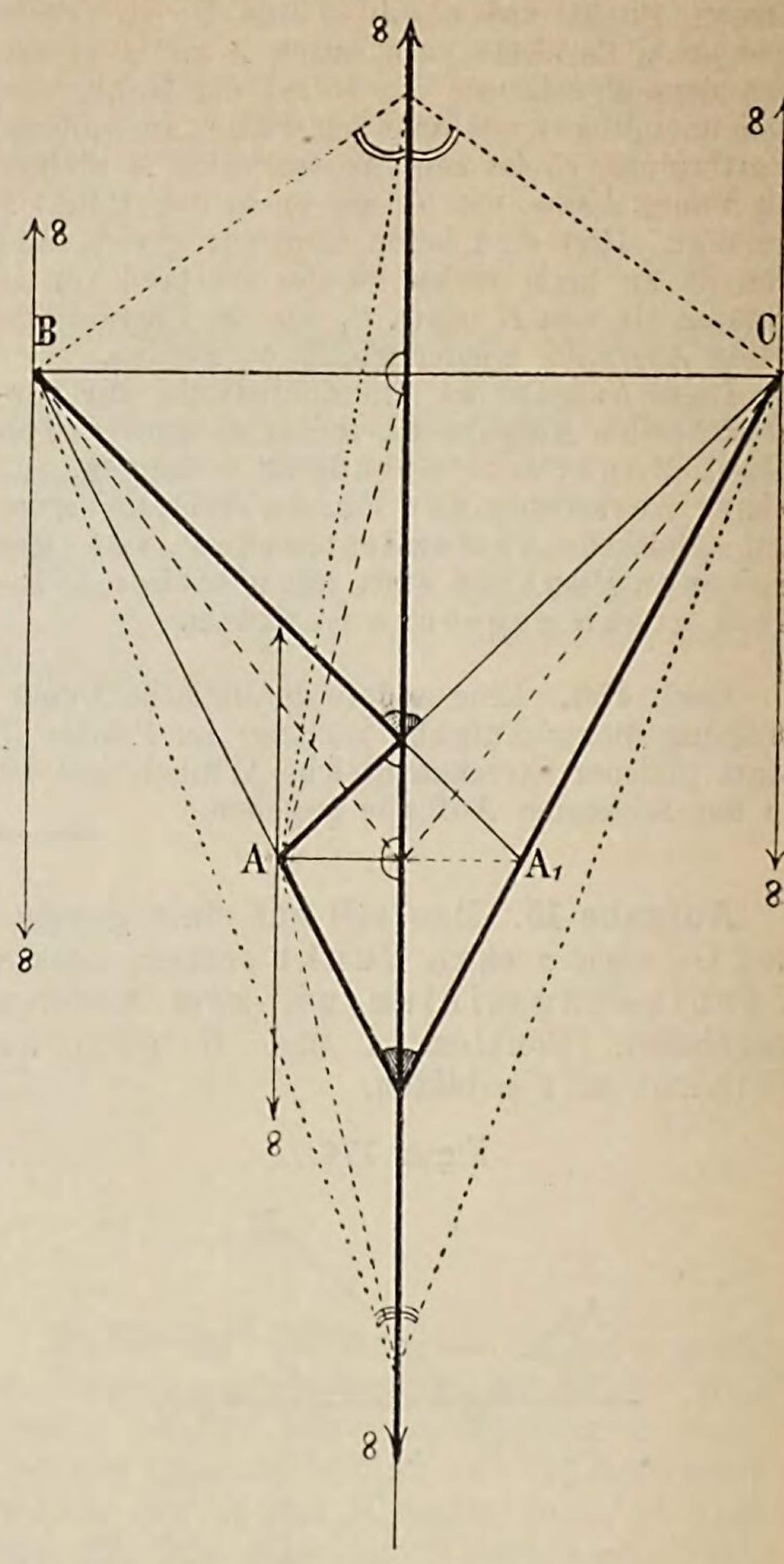
Auflösung. Angenommen, in Figur 176 sei P ein Punkt, für welchen $\sphericalangle (AP, a) = \sphericalangle (BP, a)$ sei. Dann muss auch als Scheitelwinkel zu $\sphericalangle (AP, a)$ oder (BP, a) derjenige Winkel gleich gross sein, welchen die Verlängerung der Linie AP oder BP mit a bildet. Diese Verlängerungen einer Geraden bilden also jeweils mit der andern Geraden einen Winkel, welchen die Linie a halbiert. Demnach ist a Symmetrieachse für AP und die Verlängerung von BP bezw. für BP und die Verlängerung von AP. Diese beiden Geraden sind also symmetrisch, und daher geht die Verlängerung der Linie AP durch den symmetrischen Punkt zu B, und die Verlängerung von BP durch den symmetrischen Punkt zu A in Bezug auf a als Achse.

Man erhält also den gesuchten Punkt P aus der Geraden a ausgeschnitten, indem man den einen der beiden gegebenen Punkte mit dem in Bezug auf a als Achse symmetrischen Punkte des andern gegebenen Punktes verbindet.

Erkl. 458. Man kann aus Figur 178 erkennen, dass wenn A und B auf gleicher Seite liegen, der auf vorstehende Weise gefundene Punkt P innerhalb derjenigen Strecke liegen muss, welche von den Fusspunkten der Senkrechten von A und B auf die Achse begrenzt wird, also nach Erkl. 146 innerhalb der Projektion von AB auf a; dass dagegen P ausserhalb der Projektion liegen muss, wenn A und C auf verschiedenen Seiten von a liegen. Es gibt jedoch ausser dem so gefundenen Punkte immer noch zwei andere von der verlangten Eigenschaft auf a, nämlich den Schnittpunkt der geraden Verbindungslinie von A und B und den unendlich fernen Punkt auf a. Verbindet man den letzteren mit A und B oder A und C, so erhält man zwei Parallelen zu a unter gleichem Winkel von 0°. Rückt der Punkt aus dem Unendlichen von unten her näher, so wird der Winkel seiner Verbindungslinie mit A und B bezw. mit A und C jeweils gebildet mit derselben Richtung der Geraden a; und zwar bleibt der Winkel zu demjenigen Punkte grösser, dessen senkrechter Abstand von a der grössere ist — bis im Schnittpunkt der Verbindungslinie AB bezw. AC mit a die beiden Winkel gleich gross werden. Von da an wird der Winkel zu demjenigen Punkte grösser, welcher einen kleineren senkrechten Abstand von a hat, wächst bis zur Senkrechten selbst an bis zum rechten Winkel von 90° — und schlägt dort um in den rechten Winkel mit der entgegengesetzten Richtung von a. Während nun dieser obengenannte Winkel auf der andern Seite dieses Fusspunktes wieder abnimmt, wächst der andere Winkel immer weiter bis zum Schnittpunkt der Verbindungslinie AC bezw. BA_1 mit a. Dort sind beide Winkel Scheitelwinkel, also gleichgross, aber gebildet mit entgegengesetzter Richtung der Linie a. Dann fällt der erstere Winkel immer weiter, der letztere wächst erst noch weiter — bis er im Schnittpunkt der Senkrechten von seinem zugehörigen Punkte auf a ebenfalls den rechten Winkel erreicht. Und während innerhalb der Projektion von AB bezw. AC auf a die beiden Winkel mit entgegengesetzten Richtungen von a gemessen waren, schlägt jetzt der zweite Winkel im rechten Winkel wieder um in die andere Richtung, so dass ausserhalb der Projektion wieder gleiche Richtungen von a als Winkelschenkel gelten. Beide Winkel aber nehmen jetzt unbegrenzt ab, bis sie im unendlich fernen Punkte bis auf den Winkel 0° wieder herabgesunken sind.

Erkl. 459. Diese Aufgabe findet Anwendung in der Physik bei der Lehre von der Spiegelung oder der Reflexion des Lichtes an ebenen Spiegeln. Man sehe hierüber in demjenigen Lehrbuch dieser Encyklopädie, welches über „Optik oder die Lehre vom Lichte“ handelt.

Figur 178.



Nach Erklärung 458 ergeben sich aber ausser dem so gefundenen Punkte noch zwei andere für jede Lage der Punkte A und B, nämlich

a) wenn A und B auf derselben Seite von a liegen:

1) der unendlich ferne Punkt von a,
2) der Schnittpunkt von a mit der Verbindungslinie AB,
3) der Schnittpunkt von a mit der Verbindungslinie AB_1 oder BA_1;

b) wenn A und B auf verschiedenen Seiten von a liegen:

1) der unendlich ferne Punkt von a,
2) der Schnittpunkt von a mit der Verbindungslinie AC_1 oder CA_1,
3) der Schnittpunkt von a mit der Verbindungslinie AC.

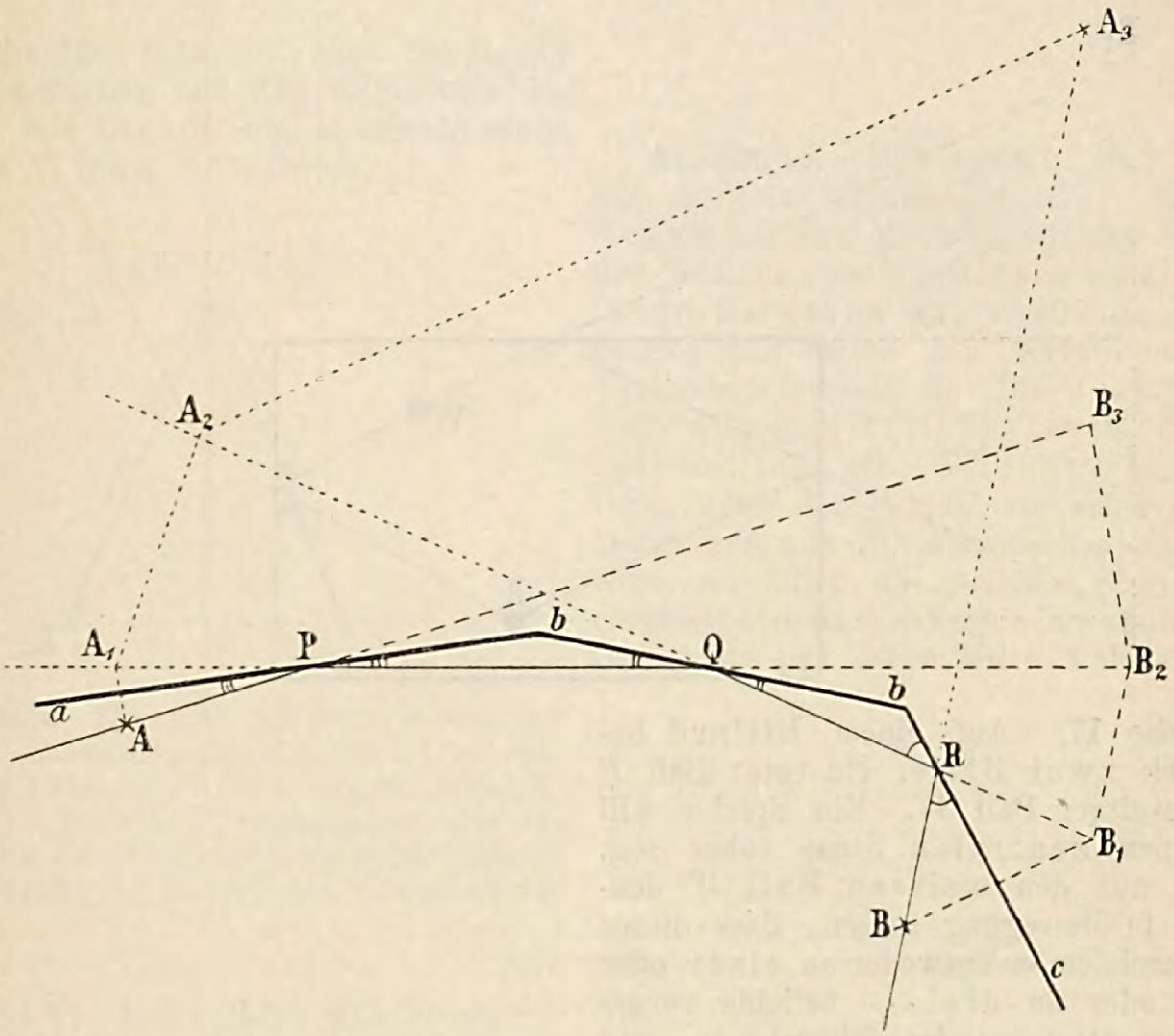
Ferner enthält die Aufgabe die Lösung der Frage, in welcher Richtung ein Billardball, welcher im Punkt A liegt, an die „Bande“ a gestossen werden muss, damit er beim Zurückprallen den in B liegenden zweiten Ball trifft. Weitere Ausführung dieser Anwendung liefern die beiden folgenden Aufgaben.

Und zwar sind die Schenkelrichtungen der Winkel für jeden dieser drei Fälle

1) beliebig gerichtet, weil gleich Null;
2) gleichwendig von a aus, d. h. mit derselben Richtung von a;
3) ungleichwendig von a aus, d. h. mit entgegengesetzten Richtungen von a.

In Figur 178 sind beide Fälle der Lage der Punkte A und B oder A und C gleichzeitig dargestellt.

Figur 179.



Aufgabe 16. Man soll auf mehreren aneinanderstossenden Geraden $a, b, c \cdots$ jeweils einen Punkt $P, Q, R \cdots$ suchen, so dass die Verbindungslinien derselben unter sich und der äussersten unter ihnen mit zwei weiteren gegebenen Punkten A und B auf jeder Geraden zwei gleiche Winkel bilden.

Erkl. 460. Statt die Lage der Linie PA zu suchen durch Aufsuchung der symmetrischen Punkte zu B, B_1, B_2, könnte man ebensowohl auch ausgehen vom Punkte B, und findet die Linie BR, indem man zu Punkt A erst den symmetrischen Punkt A_1 zur Achse a, zu A_1 den symmetrischen Punkt A_2 zur Achse b, zu A_2 den

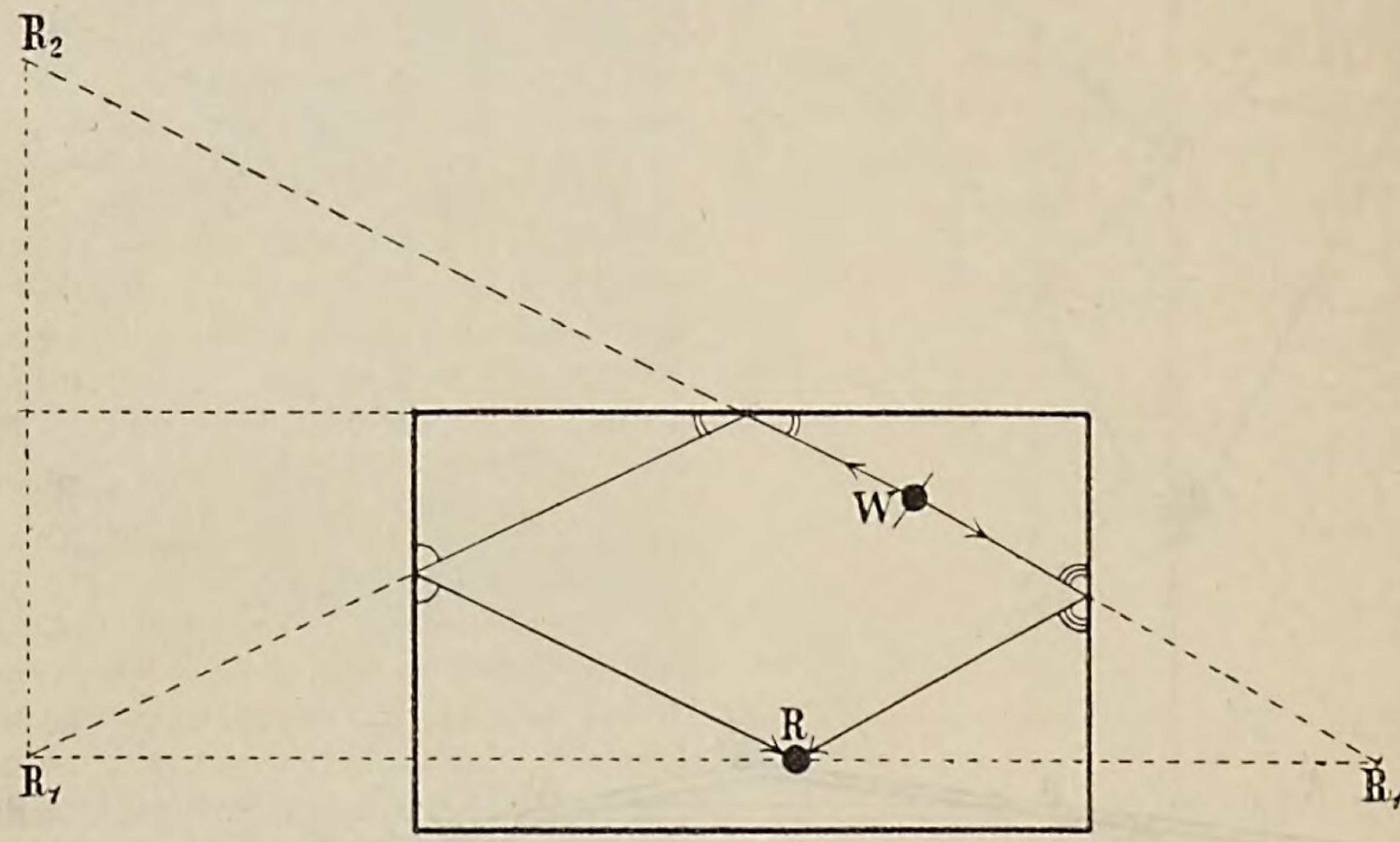
Auflösung. Sind in Fig. 179 a, b, c drei Gerade und P, Q, R die auf ihnen liegenden Punkte, so muss $\sphericalangle (AP, a) = \sphericalangle (a, PQ)$, ferner $\sphericalangle (PQ, b) = \sphericalangle (b, QR)$ und endlich $\sphericalangle (RQ, c) = \sphericalangle (c, RB)$ sein. Nach der Auflösung der vorigen Aufgabe 15 muss daher die Linie QR so gerichtet sein, dass sie durch den für c als Achse symmetrischen Punkt B_1 zu B geht, ebenso muss also auch rückwärts Linie PQ so gerichtet sein, dass sie

symmetrischen Punkt A_3 zur Achse c konstruiert und diesen letzten Punkt A_3 mit B verbindet. Ist dann die Linie BR gezogen, so finden sich die übrigen Strecken RQ, QP, PA durch Konstruktion der Winkel nach der Aufgabe.

durch den für b als Achse symmetrischen Punkt B_2 zu B_1 geht, und endlich muss Linie AP so gerichtet sein, dass sie durch den für a als Achse symmetrischen Punkt B_3 zu B_2 geht.

Man erhält also die erste Linie PA, indem man zu B erst den zur Achse c symmetrischen Punkt B_1 sucht, dann zu B_1 den zur Achse b symmetrischen Punkt B_2, endlich zu B_2 den zur Axe a symmetrischen Punkt B_3, und zuletzt den Punkt A mit dem Punkte B_3 verbindet und von da aus die gleichen Winkel anträgt an jeder der drei Geraden a, b, c.

Figur 180.



Aufgabe 17. Auf einem Billard befinden sich zwei Bälle, ein roter Ball R und ein weisser Ball W. Ein Spieler will durch einen zentralen Stoss (ohne sog. „Effekt") auf den weissen Ball W denselben so in Bewegung setzen, dass dieser Ball W, nachdem er entweder an einer oder an zwei oder an drei ··· beliebig vorgeschriebenen Banden des Billards an- und abgeschlagen, sich also der Reihe nach in zwei oder drei oder vier ··· Richtungen bewegt hat, schliesslich den roten Ball trifft.

Unter welchem Winkel gegen die Bande, an welchen der Ball zuerst abschlagen soll, muss das „Queue" (Stossstange) gerichtet werden, also unter welchem Winkel muss der Ball W an die erste Bande anschlagen, damit er nach Durchlaufung des verlangten Weges den roten Ball trifft?

Erkl. 461. Wenn ein Ball den in Figur 180 rechts dargestellten Lauf beschreibt, wird er ein „Einbander" genannt, ein den links dargestellten Lauf beschreibender Ball würde „Zweibander" heissen. Von W nach R kann der

Auflösung. Die vier Banden des Billards bilden vier gegebene Geraden, wie in der vorigen Aufgabe. Nach den Gesetzen des elastischen Stosses schlägt die Kugel an der Billardbande unter dem gleichen Winkel ab, unter welchem sie angeschlagen hatte, beschreibt also Linien, welche gleiche Winkel mit den gegebenen Geraden bilden. Nach der vorigen Aufgabe kann man daher die An-

Ball also in vierfacher Weise als Einbander gelangen, nämlich durch Abschlagen an jeder einzelnen der vier Banden. Als Zweibander könnte der Ball von W nach R gelangen auf ebenso vielfache Weise, als die vier Banden zu zweien zusammengestellt werden können.

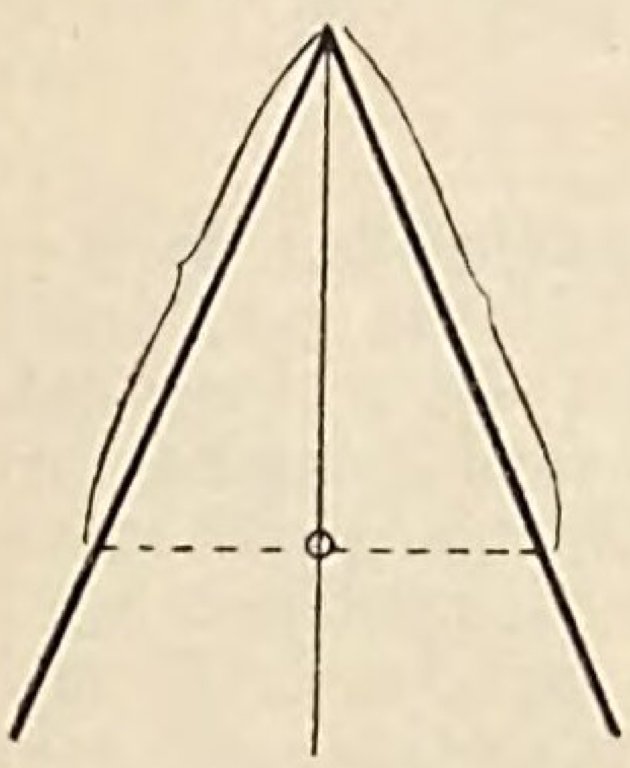
Erkl. 462. Ein Ball, welcher überhaupt vorher an die Banden geht, bevor er einen andern Ball trifft, wird „Vorbander" genannt. (Ueber eine ziffernmässige Berechnung eines solchen sehe man Aufgabe 1227 in Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.)

fangsrichtung des weissen Spielballs erhalten, wenn man vom roten Ball R der Reihe nach die symmetrischen Punkte R_1, $R_2 \cdots$ konstruiert in Bezug auf die letzte, vorletzte $\cdots$ u. s. w. Bande, welche der Ball berühren soll, und die Richtung nach dem symmetrischen Punkte in Bezug auf die erste der vorgeschriebenen Bande als Anfangsrichtung wählt. (Oder umgekehrt nach Erkl. 460).

In Fig. 180 ist der Weg des Balles W zum Ball R in zweifacher Weise dargestellt: rechts durch einmaliges Abschlagen an der rechten Bande, links durch zweimaliges Abschlagen an der oberen und linken Bande.

Aufgabe 18. Man soll ohne Benützung des Winkelmessers und des Winkelscheites, also bloss mit Lineal (und Massstab) einen gegebenen Winkel halbieren.

Figur 181.

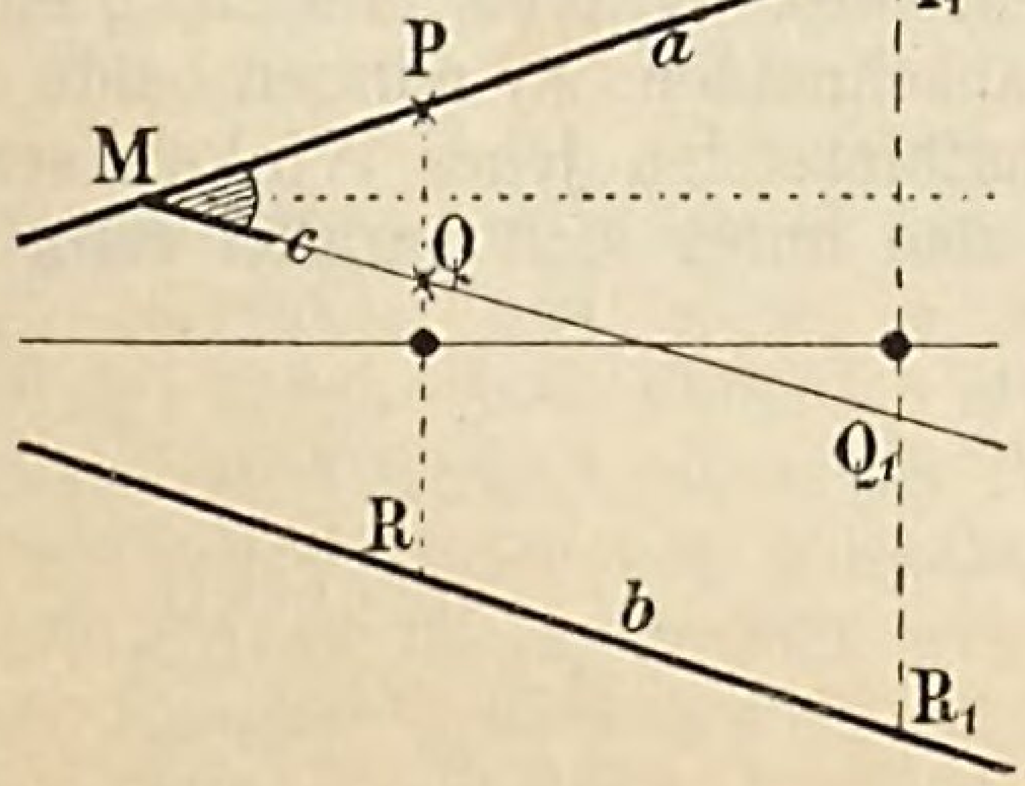


Auflösung. Man benütze die Ergebnisse der Aufgabe 10 und Fig. 171. Man trage nämlich mit dem Massstab auf den Schenkeln des Winkels vom Scheitel aus zwei gleichlange Strecken an, verbinde die Endpunkte und messe den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke ab. Die Verbindungslinie dieses Mittelpunktes mit dem Winkelscheitel ist Winkelhalbierende. Denn wenn der Winkel um seine für unbekannt geltende Symmetrieachse umgeklappt wird, so fallen die gleichen Strecken aufeinander, also ist ihre Verbindungslinie Achsensenkrechte und deren Mitte Achsenpunkt.

Erkl. 463. Ein noch kürzerer Beweis der Richtigkeit nebenstehender Lösung ist zu entnehmen aus Lehrsatz 57c über das gleichschenklige Dreieck. Denn die Verbindungsstrecke des Scheitels mit der Mitte der Gegenseite halbiert im gleichschenkligen Dreieck den Winkel an der Spitze.

Aufgabe 19. Man soll die Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkt unzugänglich ist.

Figur 182.



Auflösung. Sind a und b in Fig. 182 die beiden Geraden, deren Schnittpunkt nicht auf dem Zeichnungsblatte enthalten ist, so erhält man doch an der Geraden a einen gleichgrossen Winkel, wenn man durch einen beliebigen Punkt derselben eine Parallele c zu b zieht. Dann muss (vergl. Erkl. 464) die gesuchte Winkelhalbierende des $\sphericalangle (a, b)$ zu der Winkelhalbierenden des $\sphericalangle (a, c)$ parallel sein, also eine Senkrechte auf ihr auch senkrecht auf dieser sein. Eine solche Senkrechte kann aber entweder nach Konstruktion der Winkelhalbierenden des $\sphericalangle (a, c)$ selbst gezeichnet werden, oder nach der vorigen Aufgabe 18 erhalten werden als Verbindungslinie der Endpunkte zweier gleich-

Erkl. 464. Winkel (a, c) muss gleich Winkel (a, b) sein, da der Lage nach beide Winkel korrespondierende sind, und die Schenkel a und c parallel sind. — Nach Aufgabe 134 des zweiten Teiles dieses Lehrbuchs gilt der Satz: Die Halbierungslinien von korrespondierenden Winkeln an einer durch zwei Parallelen gehenden Transversalen sind gleichgross.

Erkl. 465. Statt die Mittelsenkrechte von PR als solche zu konstruieren, kann man sich auch einen zweiten Punkt dieser Geraden verschaffen, indem man ein zweitesmal gleiche Strecken $MP_1 = MQ_1$ anträgt, eine zweite Strecke P_1R_1 zieht, und deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt von PR selbst verbindet; denn auch ihre Mittelsenkrechte muss den Winkel (a, b) halbieren.

Erkl. 466. Wird die Konstruktion der Parallelen c zu b ohne Benutzung von Winkelmesser und Winkelscheit gemacht, so kann nach Erkl. 465 auch diese Aufgabe 19 allein mit dem Lineal (und Massstab) gelöst werden. Wie auch die Parallele mit diesen Hülfsmitteln allein zu finden sei, zeigt die nächste Aufgabe 20.

Erkl. 467. Aufgabe 19 ist ein besonderer Fall einer allgemeineren Aufgabe, nämlich durch einen gegebenen Punkt eine Linie nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden a und b zu ziehen. Diese wird besonders einfach behandelt in der „Geometrie der Lage“ (siehe dieses Lehrbuch in Kleyers Encyklopädie).

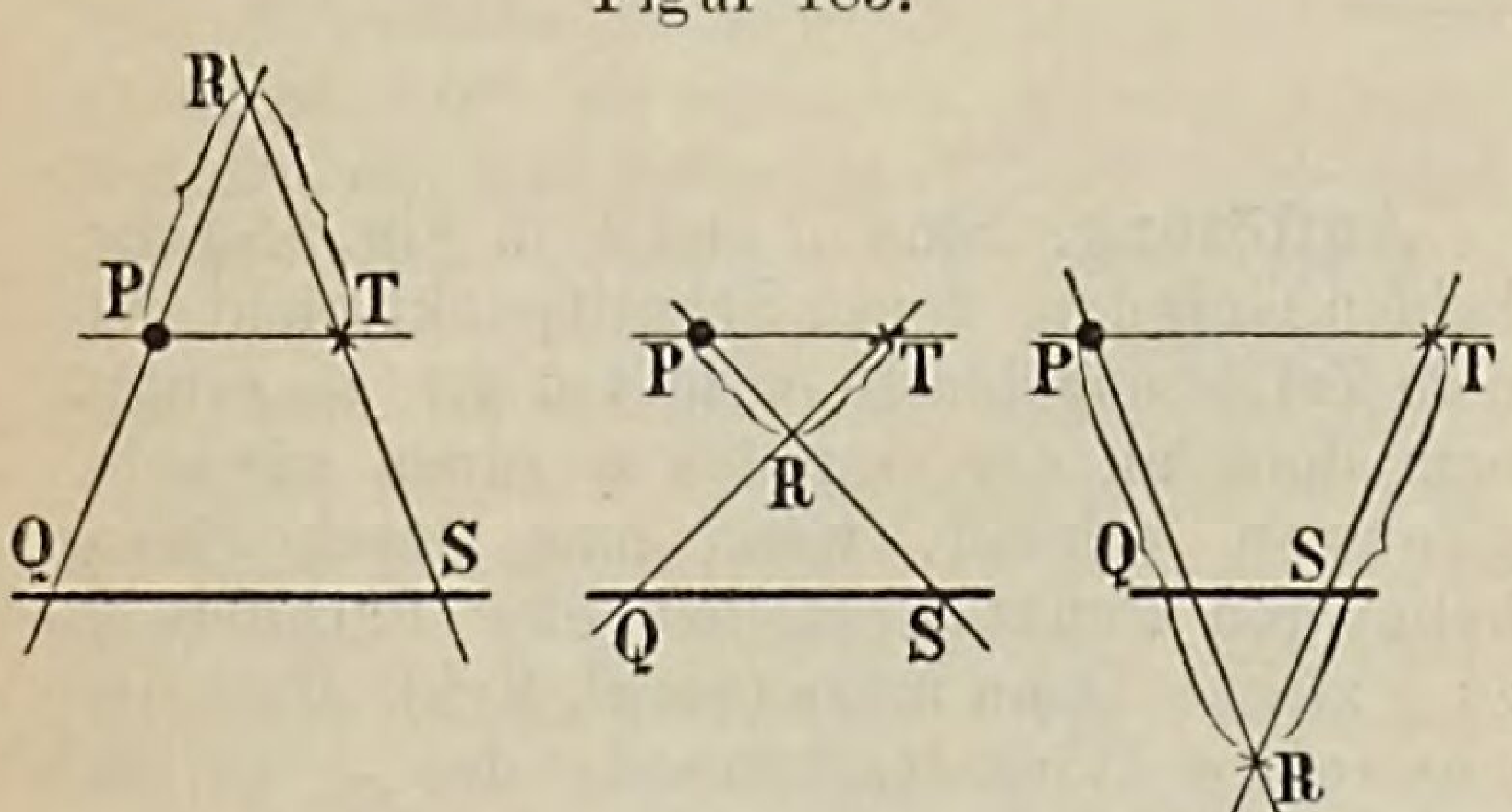
langen Schenkelstrecken des Winkels (a, c). Kennt man aber eine Senkrechte auf der Winkelhalbierenden des $\sphericalangle (a, b)$, so erhält man diese selbst als Mittelsenkrechte derselben.

Um also die Winkelhalbierende des $\sphericalangle (a, b)$ zu erhalten, ziehe man erst $c \parallel b$, trage auf a und c vom Schnittpunkt die gleichen Strecken $MP = MQ$ ab, ziehe PQ bis zum Schnittpunkt R mit a und errichte auf der Strecke PR die Mittelsenkrechte.

Diese geht durch den Schnittpunkt von a und b und halbiert den Winkel daselbst; denn klappt man um dieselbe um, so fällt P auf R und wegen der gleichen Winkel bei P und R fällt auch Schenkel a auf b, also sind auch die Winkelhälften am Schnittpunkte gleichgross.

Aufgabe 20. Man soll ohne Benützung des Winkelmessers und Winkelscheites eine Parallele durch einen gegebenen Punkt P zu einer gegebenen Geraden a zeichnen.

Figur 183.



Auflösung. Man benütze wieder die Ergebnisse der Aufgabe 10 und Fig. 171. Man ziehe nämlich durch P eine beliebige Transversale PQ gegen a, wähle auf derselben einen zweiten Punkt R, und trage die Strecke RQ ein zweitesmal von R aus gegen a an, so dass also $RS = RQ$ ist. Dann mache man auf RS eine Strecke $RT = RP$ und verbinde R und T.

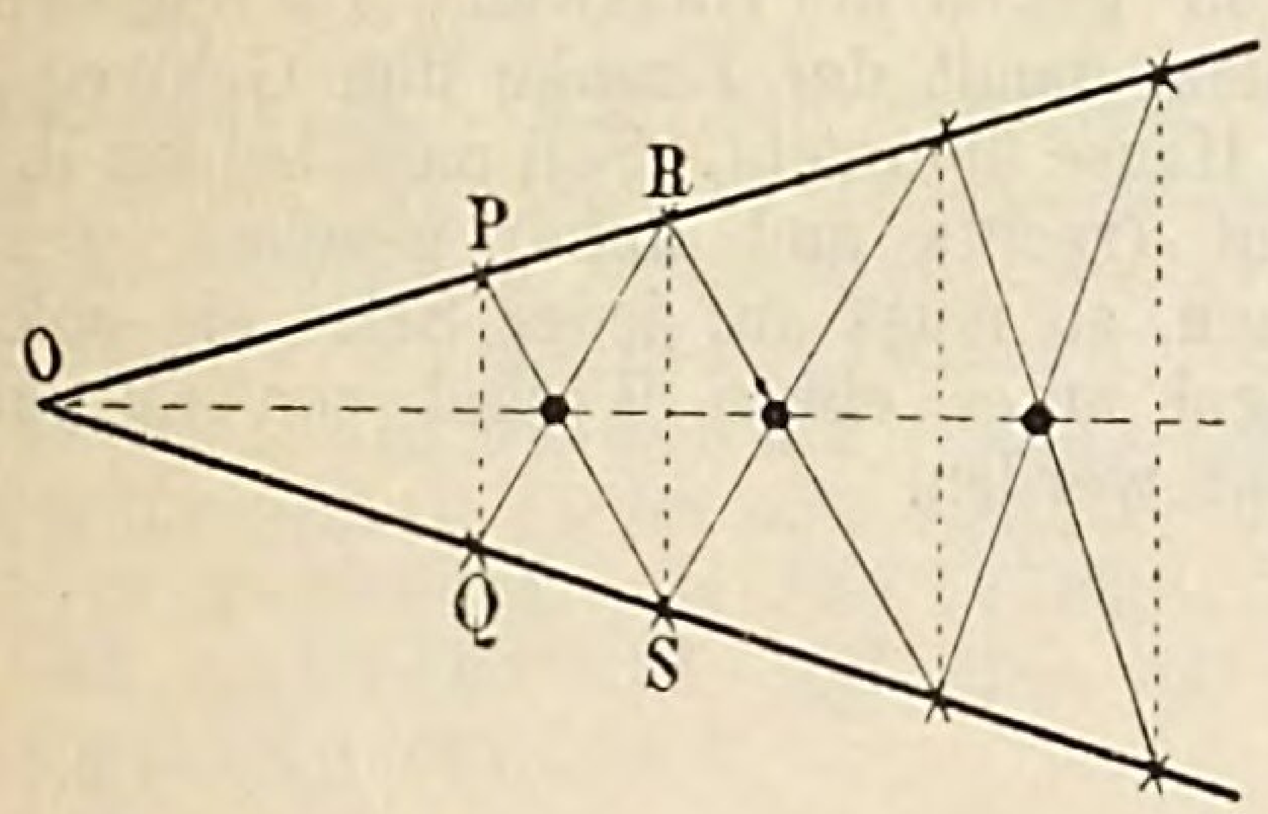
Diese Linie RT ist die Parallele zu QS. Denn da beide Linien PT und QS auf den Schenkeln des Winkels bei R gleichlange Stücke abschneiden, so müssen beide auf der Winkelhalbierenden jenes Winkels senkrecht stehen, also unter sich parallel sein.

Erkl. 468. Der in nebenstehender Auflösung gegebene Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion stützt sich auf die Aufgabe 18 und 10; derselbe könnte aber auch mittels der Sätze von Dreieck und Parallelogramm geführt werden, welche im Abschnitt C, 2, β dieses Lehrbuches enthalten sind.

Erkl. 469. Wie aus Figur 183 zu erkennen ist, kann Punkt R sowohl innerhalb als ausserhalb der Strecke PQ selbst gewählt werden, und zwar ausserhalb sowohl oberhalb als unterhalb der Geraden a selbst.

Aufgabe 21. Man soll beweisen, dass die nicht parallelen Verbindungslinien je zweier entsprechenden Endpunkte gleicher Schenkelstrecken vom Scheitel eines Winkels aus einander auf der Halbierungslinie des Winkels treffen.

Figur 184.



Auflösung. Sind in Fig. 184 die Schenkelstrecken $OP = OQ$, $OR = OS$, so ist auch als ihre Differenz $PR = QS$. Nach den bisherigen Aufgaben ist dann $PQ \parallel RS$; und die Linien PS und QR sollen sich auf der Winkelhalbierenden schneiden. Zum Beweise klappe man die Figur um diese als unbekannt geltende Symmetrieachse um. Dann fällt P auf Q, S auf R, die Gerade PS auf die Gerade QR. Also sind PS und QR symmetrisch entsprechende Geraden, folglich ihr Schnittpunkt ein Achsenpunkt.

Erkl. 470. Nach nebenstehendem Beweise kann die Halbierung eines Winkels auch dadurch gefunden werden, dass man zwei oder mehrere Paare gleicher Schenkelstrecken vom Scheitel aus abträgt, ihre Endpunkte übers Kreuz verbindet und den Schnittpunkt eines solchen Kreuzes mit dem Winkelscheitel oder auch mit dem Schnittpunkt eines andern solchen Kreuzes verbindet. Jedesmal wird diese Verbindungslinie die Winkelhalbierende.

Aufgabe 22. Man soll die Halbierungslinie des Parallelstreifens zwischen zwei gegebenen parallelen Geraden konstruieren.

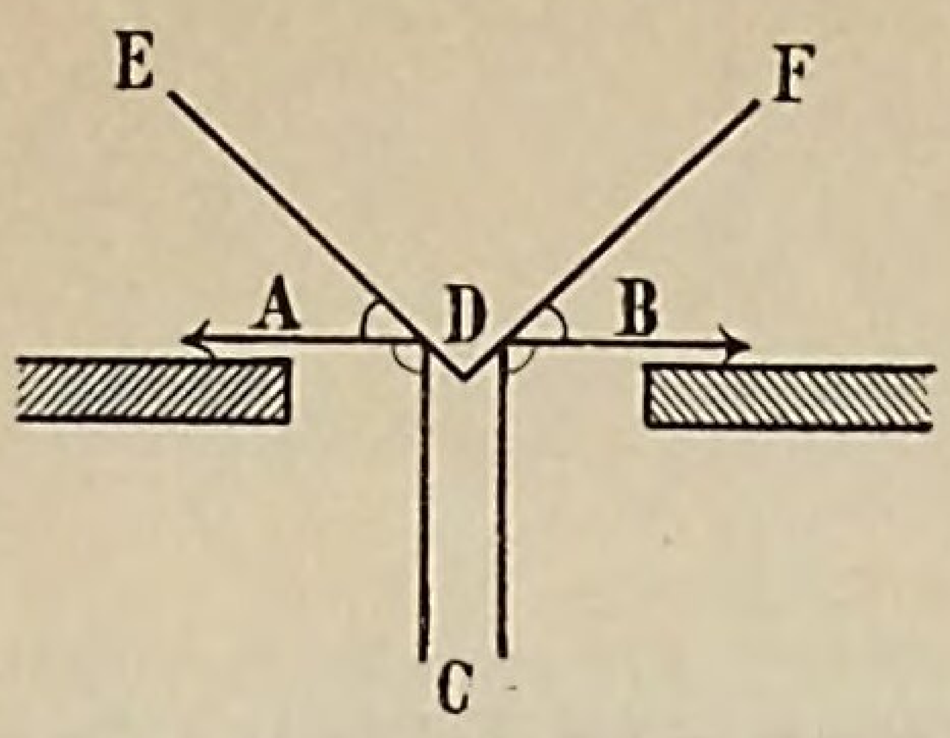
Auflösung. Der Parallelstreifen wird halbiert durch diejenige Symmetrieachse, um welche die eine Gerade auf die andere umgeklappt werden kann. Diese ist aber nach Satz 16a die Mittelparallele und halbiert sämtliche senkrechten und nach Satz 31 auch sämtliche schiefen Transversalen des Parallelstreifens. Um also diese Mittelparallele zu erhalten, ziehe man zwei beliebige senkrechten oder schiefen Transversalen und verbinde deren Mittelpunkte.

Erkl. 471. Die nebenstehende Auflösung bildet eine Anwendung der Aufgaben 14 und 16. Denn die Parallelen bilden einen Winkel von 0^0 mit Scheitel im Unendlichen, und die senkrechte Transversale ist Verbindungslinie der Endpunkte zweier Strecken, welche vom Scheitel aus gemessen beide die Länge unendlich haben. Also muss ihr Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden liegen, und die Winkelhalbierende selbst ist ihre Mittelsenkrechte.

Aufgabe 23. An einem Fenster AB sitzt ein Kranker und sieht in gerader Richtung durch das Fenster ins Freie. Unter welchem Winkel gegen die Linie AB muss vor dem Fenster ein einfacher bezw. doppelter Spiegel angebracht werden, damit der Kranke den Gehweg längs des Hauses übersehen kann?

Auflösung. Nach den Gesetzen der Spiegelung bildet die Sehlinie an einem Spiegel zwei gleichgrosse Winkel

Figur 185.



Erkl. 472. Es ist selbstverständlich, dass in derselben Gesichtslinie, in welcher das Auge des Kranken einen Gegenstand vor dem Hause sieht, auch umgekehrt ein Auge vor dem Hause rückwärts nach der Person des Kranken sehen kann.

Erkl. 473. Wird durch feste Verbindung zweier Spiegel ein Doppelspiegel von der verlangten Eigenschaft hergestellt, so lässt sich auch der Winkel seiner beiden Seiten gegeneinander angeben. Da nämlich $\sphericalangle EDA = \sphericalangle FDB = 45^0$ ist, aber $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADE + EDF + FDB = 180^0$, so muss sein:

$$2 \cdot 45^0 + \sphericalangle D = 180^0, \text{ also } D = 90^0.$$

Die beiden Spiegel müssen daher unter einem rechten Winkel aneinanderstossen.

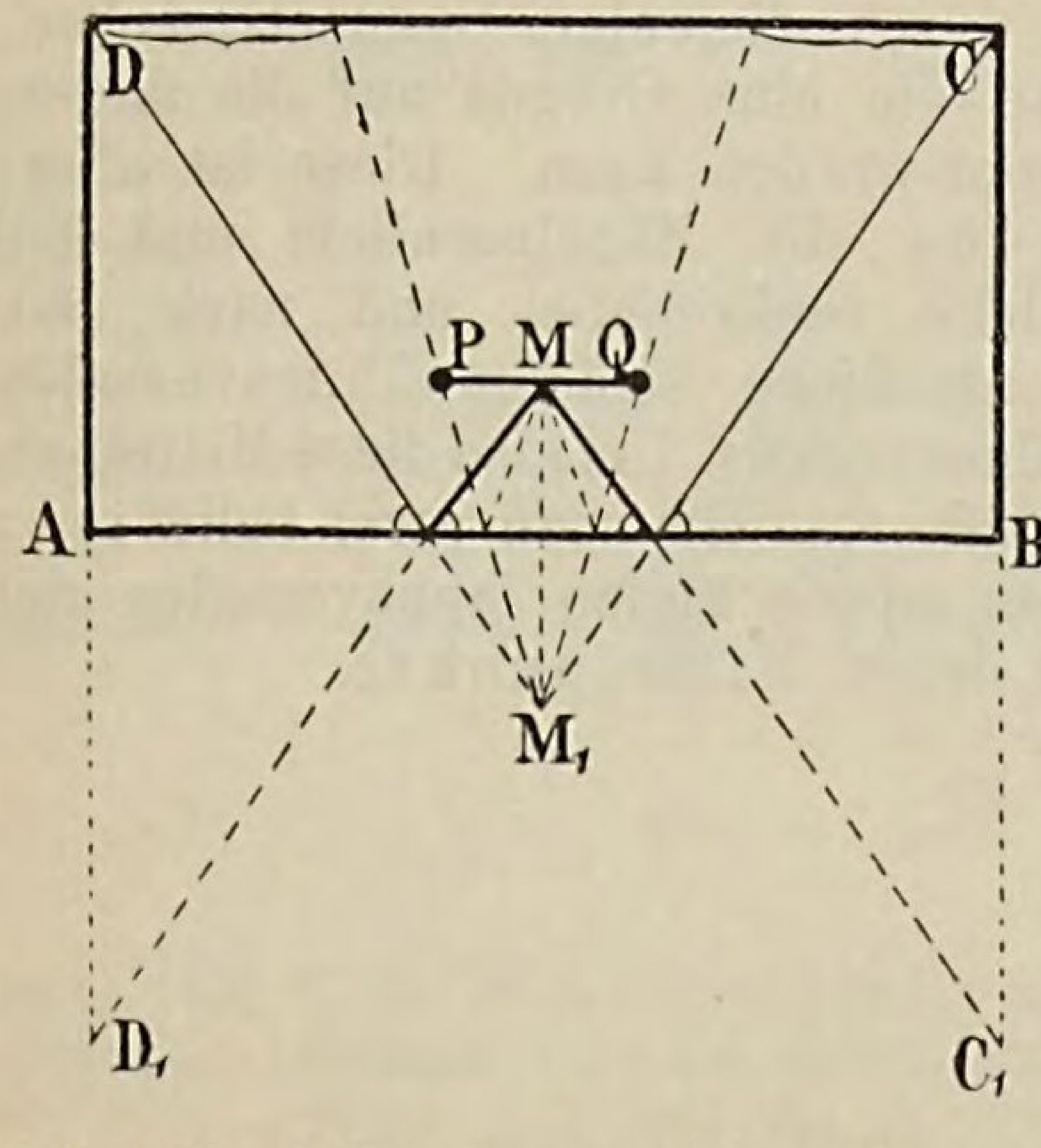
(siehe Aufgabe 15 bis 17). Damit also die Sehlinie für den Beschauer aus der Richtung CD in die dazu senkrechte Richtung DB abgelenkt wird, muss der Spiegel zu CD und DB gleichgrosse Winkel bilden. Nennt man die Grösse eines solchen Winkels φ, so muss für den ebenen Spiegel ein gestreckter Winkel entstehen, wenn man die Winkel $\varphi + CDB + \varphi$ addiert. Da also $\sphericalangle CDB = 90^0$ ist, so wird

$$2\varphi + 90^0 = 180^0, \text{ also } \varphi = 45^0 = \frac{R}{2}.$$

Daher muss ein Spiegel unter dem Winkel von 45^0 gegen die Hauswand AB angebracht werden, damit der Kranke den Gehweg vor dem Hause übersieht. Soll nach beiden Richtungen (rechts und links) gesehen werden können, so muss auf jeder Seite ein solcher Spiegel unter einem Winkel von 45^0 angebracht werden.

Aufgabe 24. An der Wand AB eines viereckigen Raumes $ABCD$ (Figur 186) soll ein Spiegel angebracht werden, gerade so gross, dass man von den Ecken C und D der gegenüberliegenden Wand aus hinsehen kann nach dem Mittelpunkte M eines in dem Raume aufgestellten Schirmes PQ.

Figur 186.



Erkl. 474. Man kann nicht nur von dem Eckpunkte C und D der gegenüberliegenden Wand CD des Raumes im Spiegel nach M sehen, sondern auch von diesen Ecken einwärts

Auflösung. Nach den Ausführungen der Aufgaben 23 und 15 bis 17 muss die Sehlinie von C nach M an der Wand AB gleiche Winkel bilden, also von dem Punkte C ausgehen in der Richtung nach dem symmetrischen Punkte M_1 zu M in Bezug auf AB als Symmetrieachse. Um daher auf der Strecke AB die Grenzpunkte der Spiegelfläche zu finden, konstruiert man zu AB als Achse den symmetrischen Punkt (das sogenannte „Spiegelbild") zu M. Dann ist der Schnittpunkt der Verbindungslinie CM_1 mit der Geraden AB der Punkt bis zu welchem der Spiegel auf AB reichen muss, und ebenso der Schnittpunkt von DM_1 mit AB sein anderer Endpunkt. Jedoch braucht der Spiegel nicht von einem dieser Endpunkte bis zum andern zu reichen, sondern sein mittlerer Teil kann frei bleiben, so dass nur wirklich belegt sein müssten die Zwischenräume zwischen den Schnittpunkten von AB einerseits mit M_1C und M_1D, anderseits mit M_1D und M_1P.

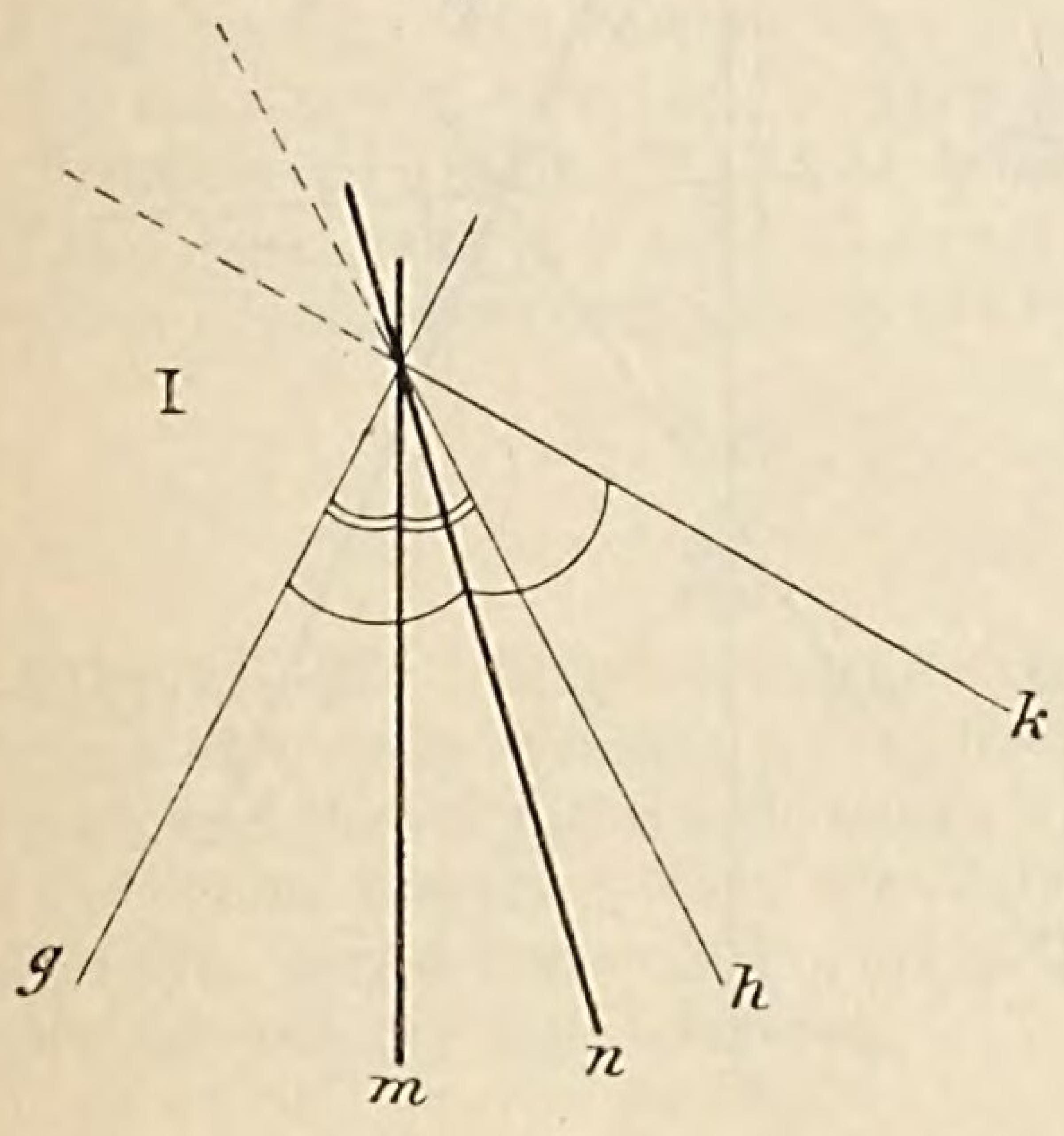
von allen Punkten aus bis zum Schnittpunkt der Verbindungslinien des Punktes M_1 mit den Endpunkten P und Q des Schirmes. Um von einem Punkte zwischen diesen beiden Schnittpunkten doch im Spiegel nach M sehen zu können, müssten auf den Seitenwänden AD und BC des Raumes auch noch Spiegel angebracht werden.

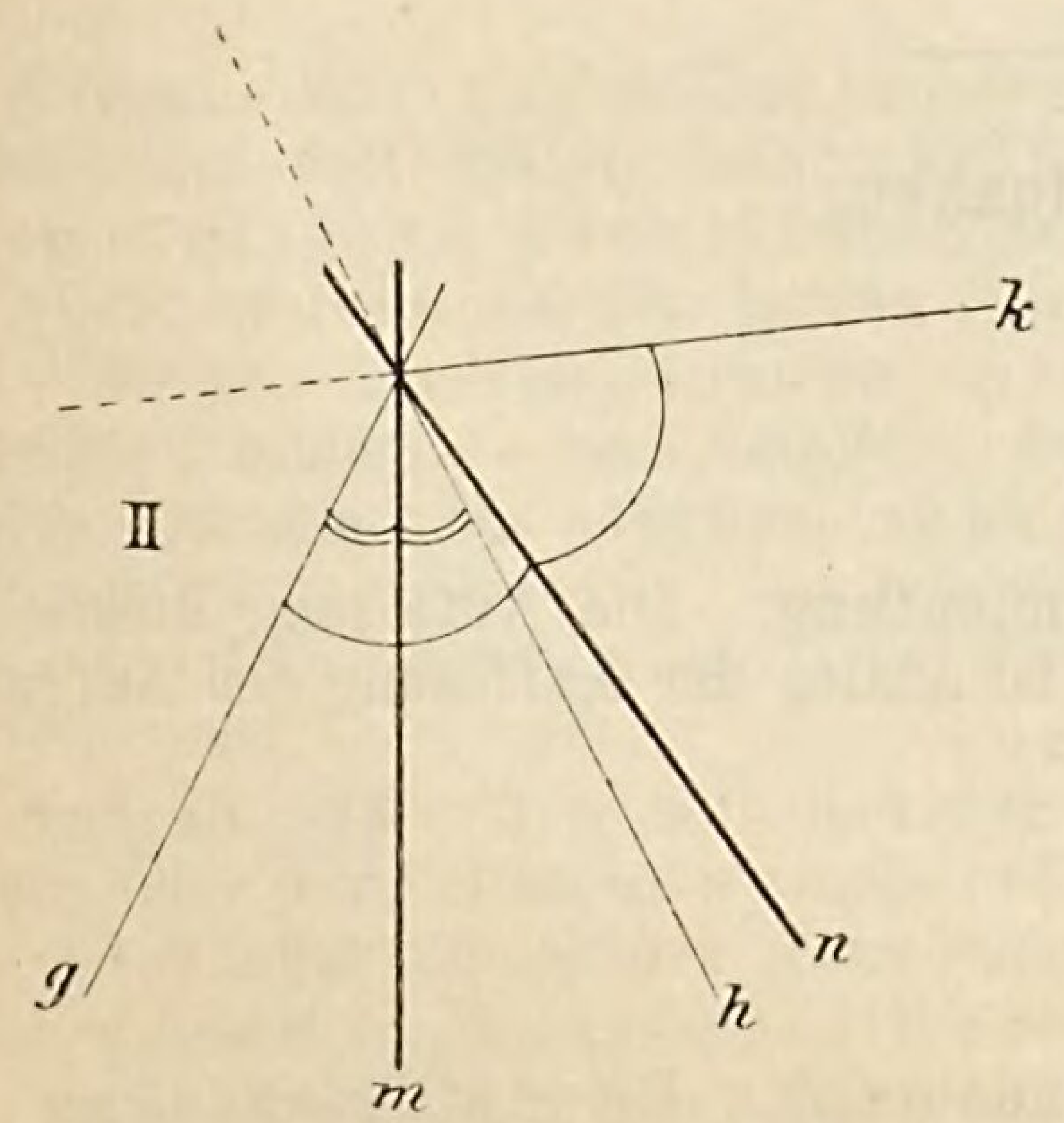
Erkl. 475. Statt C und D mit dem symmetrischen Punkte (dem Spiegelbilde) von M zu verbinden, hätte man M mit den symmetrischen Punkten von C und D zu Achse AB verbinden können, und dieselben Schnittpunkte auf AB erhalten.

Erkl. 476. Der im Winkel PM_1Q liegende Teil der Wand AB braucht nicht mit Spiegel belegt zu sein, da die Verbindungslinien seiner Punkte mit M und den sichtbaren Stellen von CD keine gleichen Winkel mit AB bilden.

Aufgabe 25. Man soll beweisen, dass wenn zu einer Linie die symmetrische gezeichnet wird in Bezug auf zwei verschiedene Symmetrieachsen, dann der Winkel der beiden zur ersten Geraden symmetrischen Linien mit einander doppelt so gross ist, als der Winkel der beiden Achsen, und soll dies auf die Spiegelung anwenden.

Figur 187.





Auflösung. 1) Zum Beweise der nebenstehenden Behauptung nehme man zunächst an, die gegebene Gerade g und die beiden Achsen m und n in Figur schneiden sich im gleichen Punkte. Dann bilden mit der Achse m die Gerade g und ihre symmetrische h gleich grosse Winkel, nämlich $\sphericalangle(mg) = \sphericalangle(mh)$. Ebenso bilden mit der Achse n die Gerade g und ihre neue symmetrische k gleich grosse Winkel, also $\sphericalangle(ng) = \sphericalangle(nk)$. Demnach ist in Figur 187 I. und II. der Reihe nach

$$\sphericalangle(hk) = \sphericalangle(mk) - \sphericalangle(mh),$$

also, da

$$\sphericalangle(mk) = \sphericalangle(mn) + \sphericalangle(nk) = \sphericalangle(mn) + \sphericalangle(ng),$$

$$\sphericalangle(hk) = \sphericalangle(ng) + \sphericalangle(mn) - \sphericalangle(mh),$$

und da

$$\sphericalangle(ng) = \sphericalangle(mn) + (mg) = \sphericalangle(mn) + (mh),$$

$$\sphericalangle(hk) = \sphericalangle(mn) + \sphericalangle(mh) + \sphericalangle(mn) - \sphericalangle(mh)$$
$$= 2 \cdot \sphericalangle(mn).$$

2) Wenn sich die gegebene Gerade g und die beiden Achsen m und n nicht im gleichen Punkte schneiden (Fig. 188), so gelten ganz genau die gleichen Entwicklungen. Denn im Dreieck aus den Linien (mhk) ist der Aussenwinkel

$$\sphericalangle(mk) = (mh) + \sphericalangle(hk),$$

und in dem Dreieck mit den Stücken (mng) ist Aussenwinkel

$$(ng) = \sphericalangle(mn) + (mg)$$

und im $\triangle\ (mnk)$ ist Aussenwinkel

$$(mk) = \sphericalangle(mn) + (nk).$$

Also erhält man aus unveränderter Durchführung obiger Gleichungen wieder

$$\sphericalangle(hk) = 2 \cdot \sphericalangle(mn).$$

Erkl. 477. Die beiden Fälle in Figur 187 unterscheiden sich dadurch, dass bei I $\sphericalangle$ (mn) kleiner, bei II aber grösser als $\sphericalangle$ (mh) ist, d. h. die Drehung der Achse ist erst kleiner, dann grösser als der Winkel der Geraden g mit ihr. Für beide Fälle passt genau die nebenstehende Ableitung, in welcher eben zur Erreichung dieses Zieles die Winkel stets mit den beiden kleinen Buchstaben ihrer Schenkel bezeichnet sind. Denn die Bezeichnung mittels griechischer Buchstaben würde verschiedene Behandlung beider Fälle erfordern.

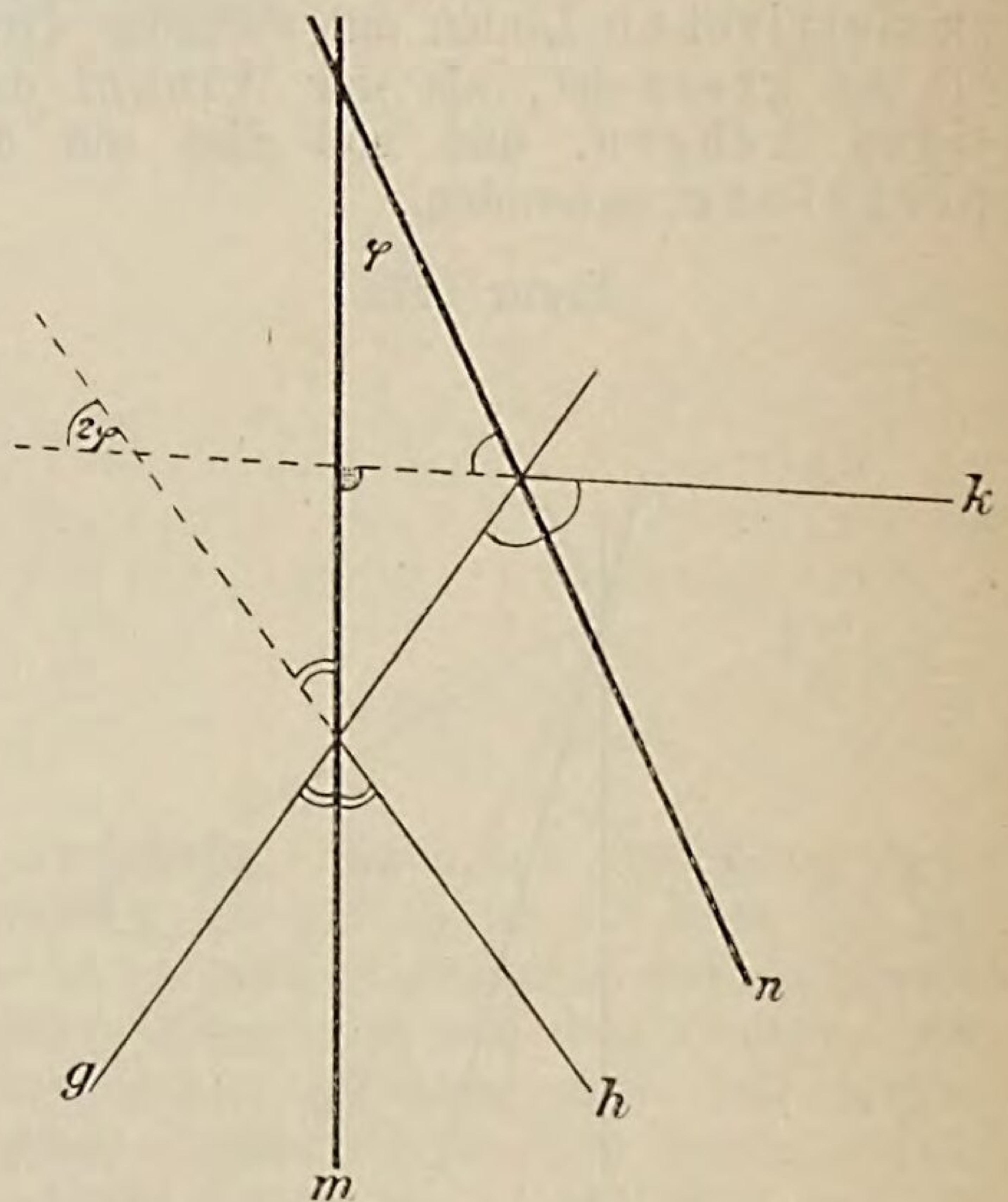
Erkl. 478. Der im nebenstehenden durchgeführte Beweis lässt sich auch als eine Erweiterung der Aufgabe 126 des zweiten Teiles ansehen. Dort sind es auch in Figur 101 die Geraden SB und SD, welche einen doppelt so grossen Winkel einschliessen, als SC und SE.

Erkl. 479. Die in Figuren 187 und 188 als punktierte Linien dargestellten Verlängerungen der Linien h und k bilden nach Aufgabe 23 mit den die Spiegelflächen darstellenden Linien m und n gleichgrosse Winkel, wie g. Daher sind diese punktierten Linien die Richtungen, in welchen ein Auge im Spiegel zu sehen glaubt, wenn es längs der Richtung g auf den Spiegel schaut. Wird also der Spiegel um den Winkel (mn) gedreht, so bestreicht die Gesichtslinie alle Gegenstände, welche im Winkelraume (h, k) liegen.

Erkl. 480. Die Betrachtung von Gegenständen in einem sich drehenden Spiegel erfährt häufige und sehr wichtige Anwendung in verschiedenen Teilen der Physik, besonders beim sogenannten Spiegelgalvanometer. Man sehe hierüber bei den Abschnitten über die Lehre vom Licht und vom Magnetismus in den Lehrbüchern der Physik von Klimpert. — Auch im täglichen Leben wird diese Beobachtung dadurch berücksichtigt, dass das Tragen eines Spiegels mit abgewendeter Fläche geschieht, um die Schwindel erregende Betrachtung der heftig schwankenden Bilder der Umgebung zu vermeiden.

3) Da bei der Spiegelung die Spiegelfläche die Symmetrieachse enthält für den Gegenstand und sein Spiegelbild, so kann man nach der vorigen Ausführung die vorliegende Aufgabe auch so auffassen, dass man g als eine Linie ansieht, welche in zwei Spiegeln m und n gespiegelt wird. Dann bilden die beiden Spiegelbilder der Linie einen doppelt so grossen Winkel, als die beiden Spiegel. Oder man kann sagen: Wenn ein Spiegel gedreht wird, so erfährt das Spiegelbild einer Linie die doppelte Drehung. Daher scheinen die in einem Spiegel gesehenen Gegenstände sich stets doppelt so rasch zu bewegen, als die Bewegung des Spiegels selbst vor sich geht.

Figur 188.



b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Man beweise, dass die aus zwei senkrechten Geraden und aus deren Winkelhalbierenden bestehende Figur 170 achsig symmetrisch ist, 1) zu jeder dieser vier Geraden als Achse, 2) zu jeder neuen Winkelhalbierenden derselben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 9.

Aufgabe 27. Es sei die Symmetrieachse und ein Paar symmetrischer Punkte gegeben. Man zeichne ein beliebiges Dreieck und zu demselben mittels Lineal allein das symmetrische.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 11.

Aufgabe 28. Es sei ein Paar symmetrischer Geraden gegeben ohne die Symmetrieachse. Man zeichne mittels Massstab und Lineal zu einem gegebenen Dreiseit das symmetrische.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe benützt den Satz, dass symmetrische Geraden auf andern gleiche Strecken vom Achsenschnittpunkte aus abschneiden.

Aufgabe 29. Man beweise, dass eine Senkrechte auf einer Halbierungslinie eines Winkels auf den Schenkeln gleiche Strecken abschneidet und mit ihnen gleiche Winkel bildet.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Umwendung um die Winkelhalbierende.

Aufgabe 30. Man schneide auf den Schenkeln eines Winkels gleiche Strecken vom Scheitel aus ab und beweise, dass deren Verbindungslinien unter sich parallel sind und mit den Schenkeln gleiche Winkel bilden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Umklappung um die Winkelhalbierende.

Aufgabe 31. Man zeichne eine Gerade, welche mit zwei Schenkeln eines gegebenen Winkels gleiche Winkel bildet und beweise, dass jede zweite Gerade von derselben Eigenschaft mit jener parallel ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Umklappung um die Mittelsenkrechte der Strecke.

Aufgabe 32. Man schneide auf den Schenkeln eines Winkels gleiche Strecken ab und ebenso auf denen seines Nebenwinkels und beweise, dass die Verbindungslinie der ersteren Endpunkte senkrecht ist auf der der letzteren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog derjenigen der Aufgabe 30.

Aufgabe 33. Man zeichne eine Gerade, welche mit den beiden Schenkeln eines Winkels gleiche Winkel bildet, und eine zweite, welche mit den beiden Schenkeln von dessen Nebenwinkeln gleiche Winkel bildet, — und beweise, dass die beiden Geraden auf einander senkrecht stehen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog derjenigen der Aufgabe 31.

Aufgabe 34. Man soll beweisen, dass wenn unter zwei Paaren symmetrischer Geraden eine Gerade des einen Paares mit einer des anderen Paares parallel ist, auch die anderen beiden parallel sein müssen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog derjenigen der Aufgabe 13.

Aufgabe 35. Man zeichne zwei symmetrische Geraden, wähle auf ihnen zwei symmetrische Punkte und ziehe durch jeden die Parallele zur andern Geraden. Es soll bewiesen werden, dass diese Parallelen ebenfalls symmetrisch sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 13 und 34.

Aufgabe 36. Es seien die Symmetrieachse und zwei symmetrische Geraden gegeben. Man beweise, dass je zwei Geraden symmetrisch sind, welche von einem Achsenpunkte ausgehen und jene beiden unter gleichwendig gleichen Winkeln schneiden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht mittels Umwendung um die Mittelsenkrechte der beiderseitigen Schnittpunkte der vier Geraden.

Aufgabe 37. Man beweise wie in voriger Aufgabe, dass zwei weitere Geraden symmetrisch sind, wenn sie von einem Achsenpunkt im Scheitelwinkel der gegebenen symmetrischen Geraden bis zum Schnittpunkt mit denselben gleiche Strecken enthalten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 36.

Aufgabe 38. Es seien die Symmetrieachse und zwei symmetrische Punkte gegeben. Man beweise, dass je zwei Punkte auf einer Achsensenkrechten symmetrisch sind, deren Verbindungslinien mit den gegebenen Punkten gleiche Winkel bilden mit Richtung und Verlängerung der Achsensenkrechten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Umwendung um die Mittelsenkrechte der erhaltenen Punkte.

Aufgabe 39. Man beweise wie in voriger Aufgabe, dass zwei Punkte der Achsensenkrechten symmetrisch sind, wenn sie gleiche Abstandsstrecken von den gegebenen haben, und wenn diese Strecken beide spitze oder beide stumpfe Winkel mit der Richtung und Verlängerung der Achsensenkrechten bilden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der drei vorigen Aufgaben und geschieht durch Umwendung um die gegebene Achse.

Aufgabe 40. Man soll zu einer gegebenen Geraden, deren Schnittpunkt mit der gleichfalls gegebenen Achse unzugänglich ist, die symmetrische zeichnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch wiederholte Anwendung des Satzes 14.

Aufgabe 41. Man denke sich ein dreiseitiges Billard und suche die Richtung, in welcher ein gegebener Ball die erste Bande treffen muss, um nach Abschlagen an dieser und der zweiten einen gegebenen andern Ball zu treffen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 16 und 17.

Aufgabe 42. In welcher Richtung müsste in voriger Aufgabe ein Ball gestossen werden, um nach Abschlagen an allen drei Banden wieder auf denselben Platz zu gelangen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog derjenigen der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 43. Man zeichne drei parallele Linien, suche die Symmetrieachsen je zweier derselben und beweise, dass auch diese parallel sind und Parallelstreifen von halber Breite bilden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Antwort der Frage 34. Man beachte die gegenseitige Lage entsprechender Streifen.

Aufgabe 44. An welchem Orte einer Zimmerwand muss ein Spiegel angebracht werden, damit man von einem dieser Wand zugekehrten Sitze aus die seitlich rückwärts befindliche Thüre übersehen kann?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 23 und 24.

Aufgabe 45. Vor einer Spiegelwand eines Saales soll ein Zierbaum so aufgestellt werden, dass er den durch ein bestimmtes Fenster auf diese Wand sehenden Blicken einen zu verbergenden Gegenstand im Saale verdeckt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist genau analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 46. Ein drehbarer Spiegel soll soweit gedreht werden, dass die neue Sehrichtung nach der Spiegelung mit der vorigen einen rechten Winkel bildet.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht nach der Auflösung der Aufgabe 25.

3) Aufgaben über die Umdrehung oder zentrische Symmetrie.

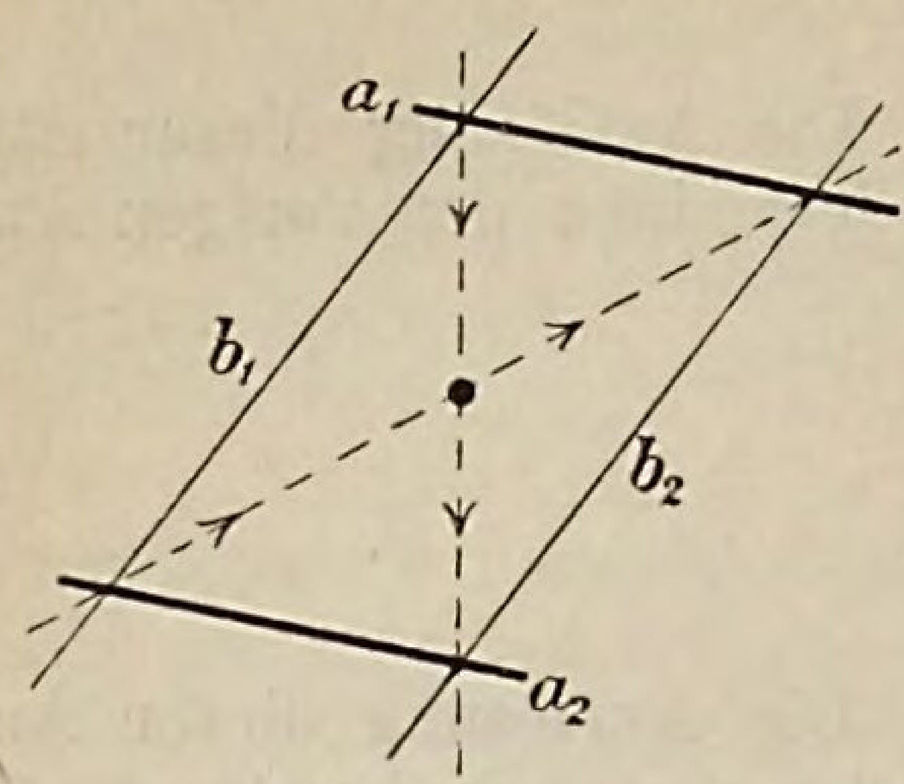
(Zu Abschnitt B 3.)

a) Gelöste Aufgaben.

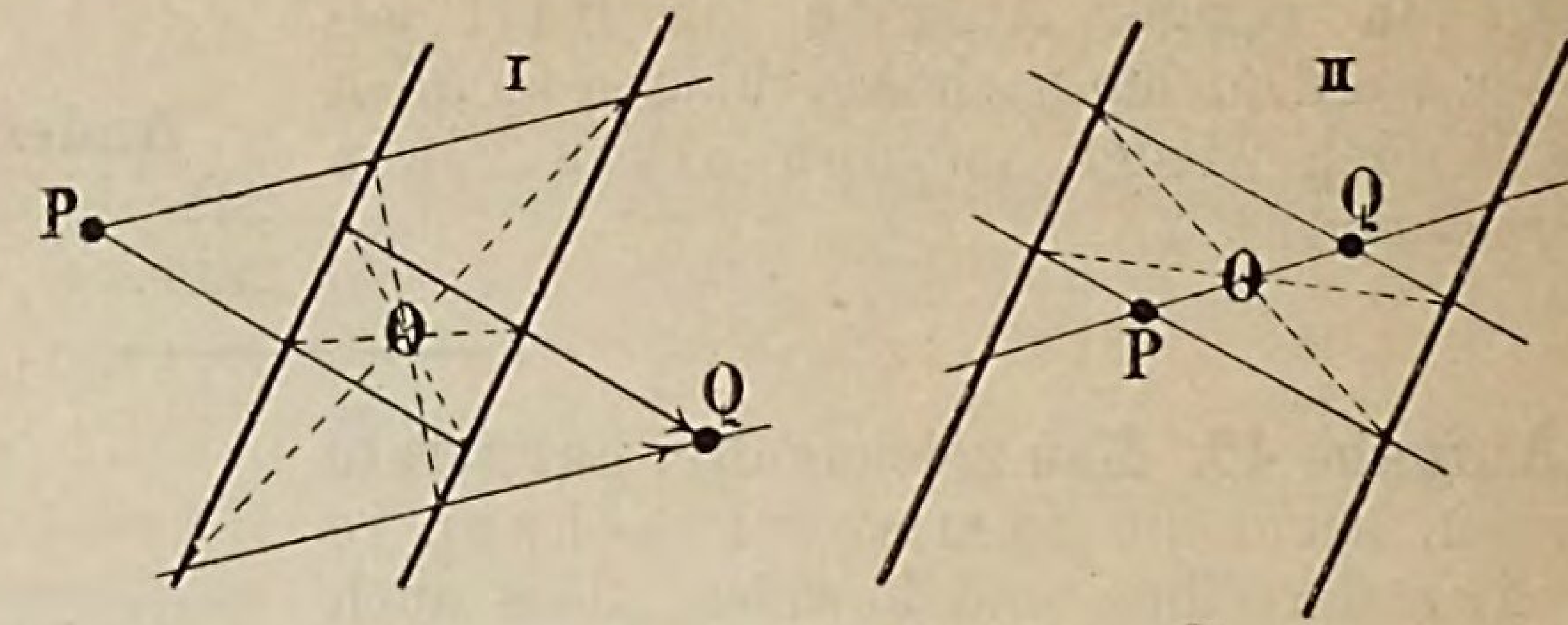
Aufgabe 47. Es seien gegeben das Symmetriezentrum und ein Paar entsprechender zentrisch-symmetrischen Geraden. Man soll mittels des Lineals allein (also ohne Zirkel, Massstab, Winkelscheit und Winkelmesser) zu weiteren Punkten und Geraden die zentrisch-symmetrischen Punkte und Geraden konstruieren.

Auflösung. Sind a_1 und a_2 (s. Fig. 189) die gegebenen Geraden, und b_1 eine weitere Gerade, deren symmetrische gesucht wird, so erhält man auf b_1 zwei Schnittpunkte mit a_1 und a_2. Dann muss die entsprechende Gerade auf b_1 durch die beiden Punkte gehen, welche zu diesem Schnittpunkt auf b_1 symmetrisch liegen. Der zentrisch-symmetrische

Figur 189.



Figur 190.



Erkl. 481. Aus dem Besprochenen geht hervor, dass durch das Symmetriezentrum und ein einziges entsprechendes Geradenpaar eine zentrisch symmetrische Lage für sämtliche Figuren einer Ebene eindeutig bestimmt und durch das Lineal allein konstruierbar ist.

Erkl. 482. Um zu einem Punkt den zentrisch-symmetrischen zu erhalten, wird man meist die Zentrale um ihre eigene Strecke zwischen Punkt und Zentrum verlängern. Jedoch muss dazu das Abmessen der Länge benutzt werden. Auch dies kann aber auf nebenstehende Weise umgangen werden. Als die eine der beiden Geraden durch den Punkt wird man allerdings in der Regel die Zentrale des Punktes wählen, die andere Gerade aber ist vollständig beliebig, und es können auch beide willkürlich gewählt werden (siehe Figur 190, I und II).

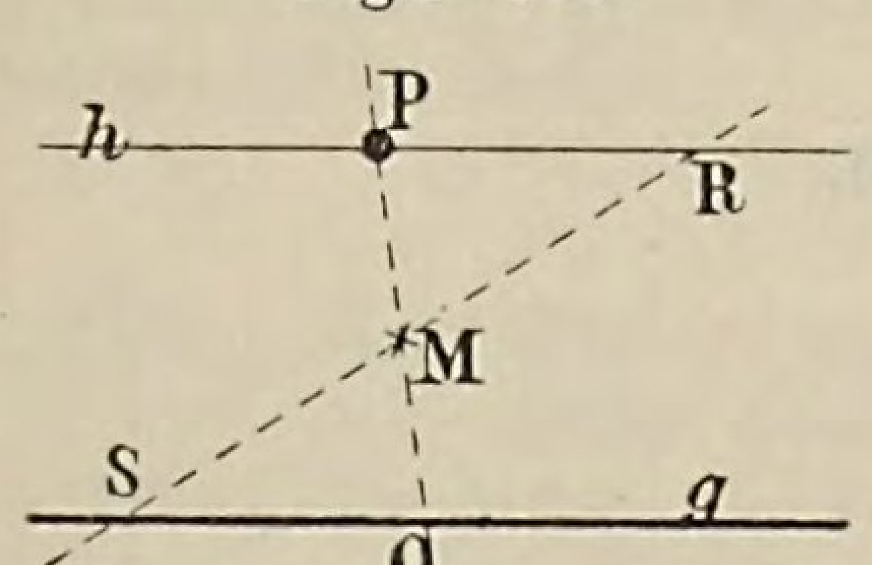
Punkt zum Schnittpunkt $(a_1 b_1)$ liegt aber 1) auf derselben Zentralen, wie dieser, 2) auf a_2: er wird also erhalten als Schnittpunkt der Geraden vom Punkte $(a_1 b_1)$ durch das Symmetriezentrum mit a_2. Ebenso erhält man den symmetrischen Punkt zum Schnittpunkt $(a_2 b_1)$ als Schnittpunkt der Zentralen dieses Punktes mit a_1. Verbindet man also diese beiden Schnittpunkte, so ist deren Verbindungslinie die zentrisch-symmetrische Gerade b_2 zu b_1.

Zum Beweise braucht bloss um das Zentrum eine halbe Umdrehung ausgeführt zu werden, dann fällt Punkt $(a_1 b_1)$ auf $(a_2 b_2)$ und Punkt $(a_2 b_1)$ auf $(a_1 b_2)$, also b_2 auf b_1.

Soll zu einem beliebigen Punkte (Figur 190) der zentrisch-symmetrische konstruiert werden, so legt man durch ihn zwei Gerade, bestimmt deren entsprechende, und erhält als ihren Schnittpunkt den zentrisch-symmetrischen zum gegebenen Punkte.

Aufgabe 48. Man soll durch einen Punkt P eine Parallele zu einer Geraden g ziehen unter Anwendung der vorigen Aufgabe 47 (mittels Lineal und Massstab).

Figur 191.

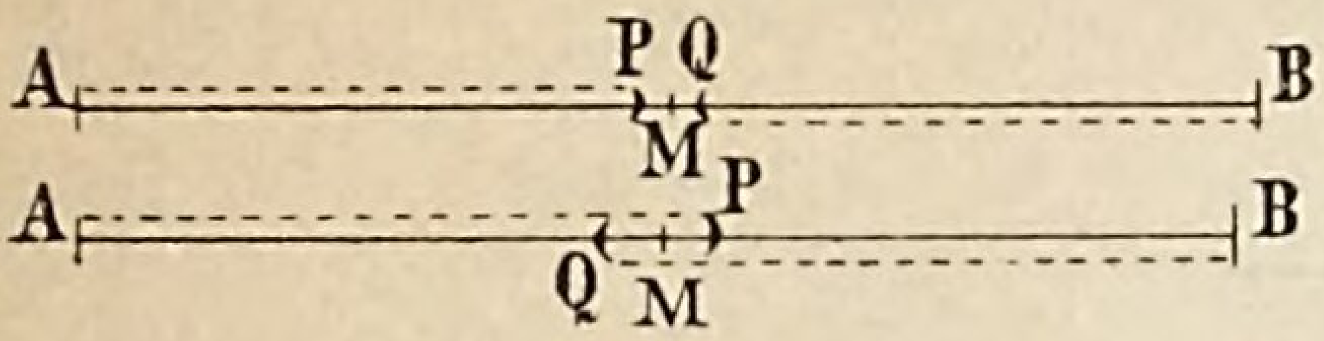


Erkl. 483. Die Konstruktionen der Parallelen zu einer gegebenen Geraden mittels Lineal allein oder doch ohne Winkelmesser oder Winkelscheit sind meist zuverlässiger als die mit diesen Hilfsmitteln vorgenommenen. Um die Figur nicht unnötig zu überladen, zeichnet man von den Geraden nur die gerade nötigen kurzen Strecken.

Auflösung. Um diese Aufgabe mit der vorigen in Einklang zu bringen, betrachte man g und die Parallele h in Figur 191 als die Geraden b_1 und b_2 in der vorigen Figur 189. Man ziehe also durch P eine beliebige Transversale PQ gegen g, und messe deren Mittelpunkt M ab. Dann ziehe man durch diesen Mittelpunkt M eine zweite Transversale MS gegen g, messe MS und trage dieselbe Länge über M hinaus noch einmal ab als $MR = MS$. Dann muss Linie PR oder h die verlangte Parallele sein. Denn bei halber Umdrehung um M kommt P auf Q, R auf S, also ist h zentrisch-symmetrisch zu g. (Vergleiche die minder allgemeine Lösung der gleichlautenden Aufgabe 20.)

Aufgabe 49. Man soll mit dem Zirkel ohne Massstab das Symmetriezentrum zweier Punkte oder den Mittelpunkt einer gegebenen Strecke suchen.

Figur 192.



Erkl. 484. Dass M die Mitte von PQ sein muss, ob nun AP und BQ über M hinausragen, oder M nicht ganz erreichen, lässt sich sehr einfach beweisen, wie folgt:

Bezeichnet man den gesuchten Mittelpunkt mit M, so ist für die beiden Fälle:

$\pm MP = AM - AP$ und $\pm MQ = BM - BQ$.

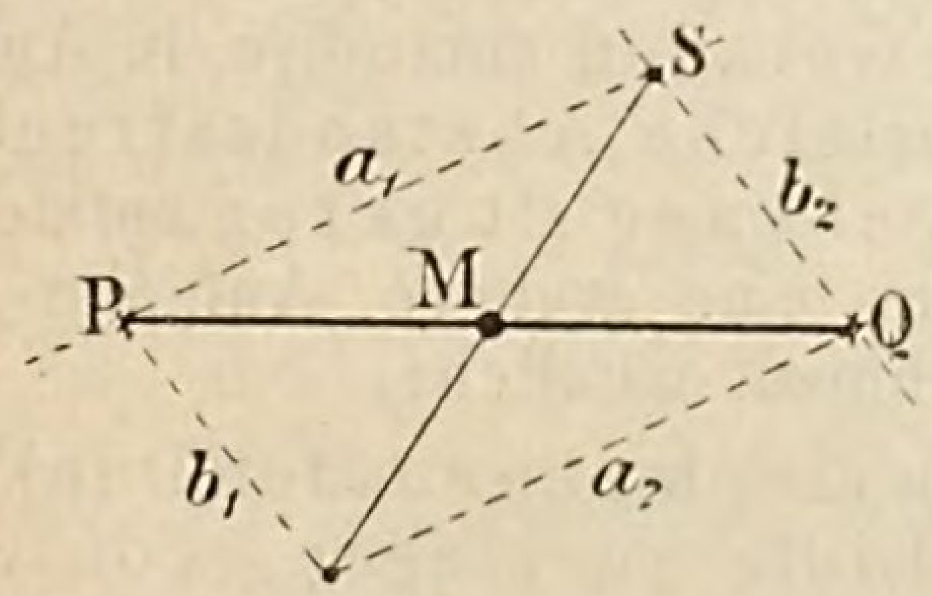
Wenn also $AP = BQ$ abgetragen ist, so muss wegen $AM = BM$ auch $MP = MQ$ werden, d. h. M auch Mittelpunkt von PQ sein. Von einer kurzen Strecke PQ ist aber der Mittelpunkt leichter richtig zu erraten, als von einer langen Strecke AB.

Erkl. 485. Die vorliegende Aufgabe 49 bildet eine die Ausführung der Halbierung erleichternde Abänderung der Aufgabe 33, 1 des ersten Teiles.

Auflösung. Um den Mittelpunkt einer gegebenen Strecke zu suchen, wähle man eine Zirkelöffnung, welche man ungefähr gleich der Hälfte der gegebenen Strecke schätzt, setze damit in beiden Endpunkten ein und trage diese Länge von beiden Seiten her in entgegengesetzter Richtung nach dem Innern der gegebenen Strecke ab. Hat man zufälligerweise genau die richtige Hälfte erraten, so fallen die Endpunkte beider abgetragenen Strecken in dem gesuchten Mittelpunkte zusammen. Hat man etwas zu viel oder zu wenig geschätzt, so erhält man als Endpunkte der beiden abgetragenen Längen zwei Punkte P und Q, deren Abstand von den Endpunkten der gegebenen Strecke, also auch von deren Mittelpunkt gleichgross ist. Da aber P und Q nur um weniges diesseits oder jenseits des richtigen Mittelpunktes liegen werden, so ist ihr Abstand von einander auch nur so klein, dass mit freiem Auge der richtige Mittelpunkt in ihrer Mitte gefunden werden kann.

Aufgabe 50. Man soll ohne Zirkel mittelst Winkelscheit und Lineal den Mittelpunkt einer gegebenen Strecke suchen.

Figur 193.



Erkl. 486. Ist die Benutzung des Massstabes gestattet, so kann man auch genau nach Figur 191 der Aufgabe 48 verfahren, nämlich nur das eine Paar von Parallelen g, h durch P und Q ziehen, auf diesen mittels Massstab die gleichen Strahlen PR und QS in entgegengesetzter Richtung abtragen und die entstehenden zentrisch-symmetrischen Punkte R und S verbinden. Diese schneiden wieder PQ im Mittelpunkte M.

Erkl. 487. Für das Abtragen gleicher Strecken kann jedes Lineal als Massstab dienen, indem man dasselbe auf einer solchen Strecke anlegt und diejenigen beiden Punkte des

Auflösung. Um den Mittelpunkt einer Strecke zu finden, betrachte man nach Aufgabe 48 diese Strecke als die Zentrale PQ, ziehe mittels Verschiebung des Winkelscheits längs des Lineals durch die beiden Endpunkte P und Q erst zwei entgegengesetzt parallele Linien a_1 und a_2 als zentrisch-symmetrische Geraden in Bezug auf den gesuchten Mittelpunkt M als Zentrum, und dann auch noch zwei weitere Parallelen b_1 und b_2 durch P und Q. Da auch diese beiden Geraden zentrisch-symmetrisch sind, so schneiden sich a_1 und b_1, sowie a_2 und b_2 auch in zwei zentrisch-symmetrischen Punkten, deren Verbindungslinie Zentrale ist. Zieht man also diese Verbindungslinie, so schneidet sie die vorige Zentrale PQ im Mittelpunkte M.

Denn wenn man um den als unbekannt geltenden Mittelpunkt von PQ umdreht, so fällt a_1 auf a_2 und b_1 auf b_2, also auch Schnittpunkt $(a_1 b_1)$ auf Schnittpunkt $(a_2 b_2)$. Da aber die Verbindungslinie entsprechender Punkte durchs Zentrum gehen muss, so geht sowohl die Verbindungslinie der Punkte

Lineals bezeichnet, an welchen die Endpunkte der abzutragenden Strecke anliegen. Legt man dann das Lineal an einer andern Geraden an, und bezeichnet auf dieser wieder die beiden angemerkten Punkte, so liegt zwischen ihnen auch wieder dieselbe Strecke.

Erkl. 488. Die Parallelenkonstruktion mittels Verschiebung des Winkelscheits am Lineal ist in Aufgabe 103 des zweiten Teils ausführlich besprochen.

Erkl. 491. Dass die Senkrechten von P und Q auf jede durch ihren Mittelpunkt gehende Gerade gleichlang sind, geht hervor aus der Umdrehung um diesen Mittelpunkt. Dabei fällt Q auf P, Linie SM auf ihre Verlängerung, also $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$, als auch PQ durchs Zentrum, also muss ihr Schnittpunkt Zentrum und Mittelpunkt von PQ sein.

Aufgabe 51. Man soll von einem gegebenen Punkte ausserhalb einer gegebenen Strecke PQ eine Gerade durch den Mittelpunkt von PQ zeichnen, ohne diesen erst zu suchen.

Auflösung. Man führt diese Aufgabe auf die vorige zurück, indem man die Strecke PQ und den Punkt S als die ebenso bezeichneten Elemente der Figur 191 oder 193 betrachtet. Man zieht also entweder durch S eine Gerade nach Q, dazu eine Parallele durch P, trägt auf dieser die Strecke $PR = QS$ in entgegengesetzter Richtung ab und verbindet R und S (siehe Figur 191).

Oder man zieht von S aus sowohl SP als SQ, zu beiden eine Parallele durch Q und S, und verbindet den Punkt S mit dem Schnittpunkt dieser Parallelen (s. Fig. 193).

Erkl. 489. Von den nebenstehenden Konstruktionen bedarf die erste die Anwendung des Massstabs, die zweite nicht, wohl aber der Parallelenkonstruktion. Der Beweis ist für beide genau so zu führen, wie in der vorigen Aufgabe, dass man um den als unbekannt geltenden Mittelpunkt von PQ umdreht. Dann fällt je eine der Parallelen von P auf eine durch Q, SM und ebenso PQ werden Zentralen und treffen sich im Zentrum.

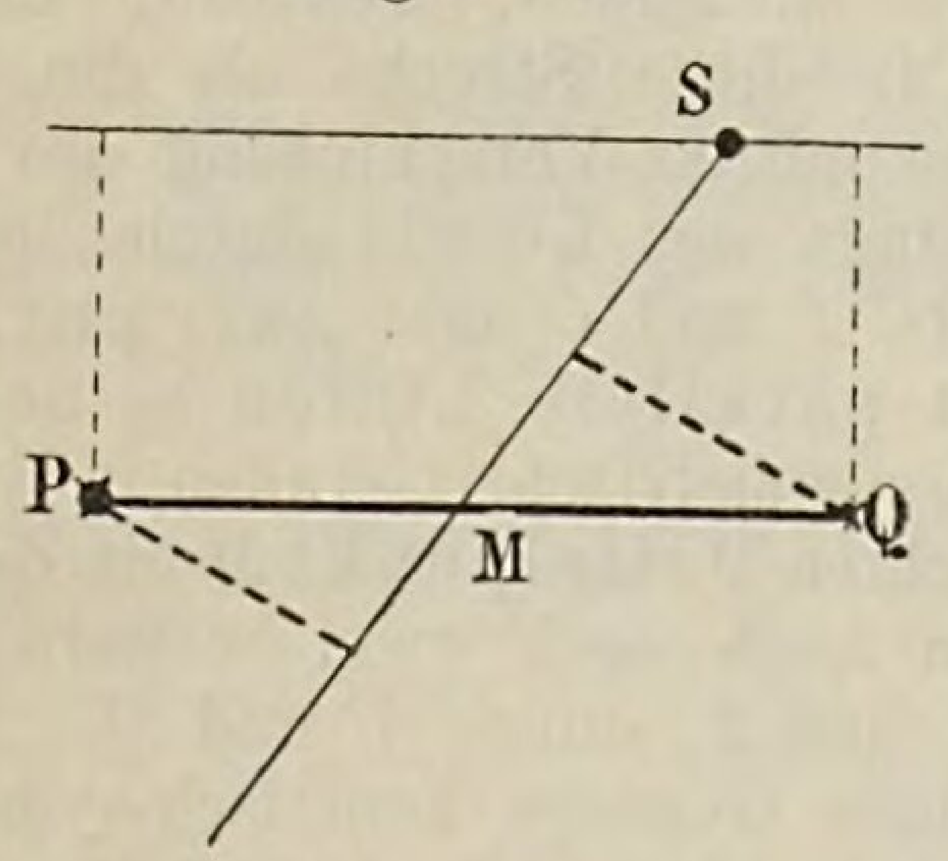
Aufgabe 52. Man soll diejenigen Aufgaben stellen und lösen, welche zu den Aufgaben 12, 14 und 15 als weitere dualistische hinzutreten.

Auflösung. In Aufgabe 12 ist verlangt eine Gerade durch einen Punkt, in Aufgabe 14 und 15 ein Punkt auf einer Geraden, und zwar in Aufgabe 12 und 15 so, dass gleiche Winkelabstände von zwei gegebenen Geraden entstehen, in Aufgabe 14 so, dass gleiche Abstandsstrecken von zwei gegebenen Punkten entstehen. Es tritt daher eine weitere Aufgabe zu Aufgabe 12 hinzu, nämlich:

Durch einen gegebenen Punkt S eine gerade Linie zu ziehen, von welcher zwei weitere gegebenen Punkte P und Q gleichen Abstand haben.

Dieser Forderung genügen aber zwei Linien durch den Punkt S, und zwar erstens eine Parallele zur Geraden PQ durch S und zweitens die Linie, welche von S durch den Mittelpunkt von PQ geht. Nach Satz 52 wird nämlich der Abstand eines Punktes von einer Geraden gemessen durch die Länge der Senkrechten von diesem Punkte auf die Gerade; und durch Anwendung der Sätze 32 und 25 lässt sich nachweisen (siehe Erkl. 490 und 491), dass die Senkrechten von P und Q auf die

Figur 194.



Erkl. 490. Dass die Senkrechten von P und Q auf die Parallele zu PQ durch S gleichlang sind, geht hervor aus Satz 32, indem diese beiden Senkrechten auf einer und derselben Linie selbst parallel sein müssen, also parallele Strecken zwischen Parallelen bilden. Solche sind aber nach Satz 32 gleichlang, also haben auch P und Q gleichen Abstand von der Parallelen.

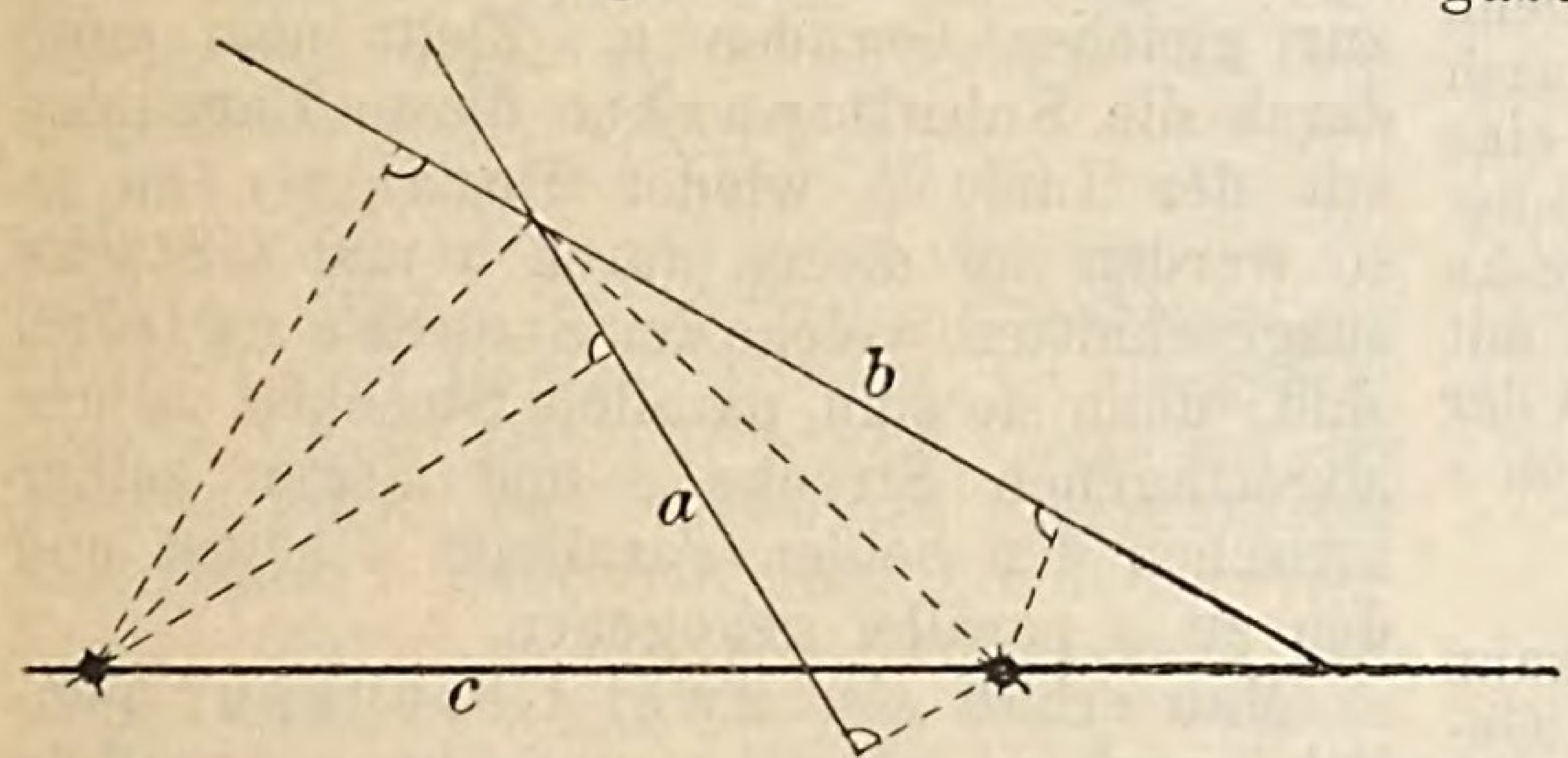
muss eine Senkrechte von Q auf SM wieder fallen auf die Senkrechte von P auf die Verlängerung von SM. Dabei fällt aber auch der Schnittpunkt der einen Senkrechten mit SM auf den Schnittpunkt der andern mit der Verlängerung, also sind auch die Strecken von P und Q bis zu diesem Schnittpunkte zentrisch-symmetrisch gleich, und P wie Q haben gleichen Abstand von dieser Linie SM.

Erkl. 492. Würde Punkt S in die Gerade durch P und Q selber zu liegen kommen, so fiele die Linie parallel PQ und durch die Mitte von PQ mit PQ selbst zusammen.

beiden genannten Geraden gleichlang sind. Beide Linien aber sind nach den bisherigen Aufgaben zu konstruieren.

Aufgabe 53. Welche Aufgabe entsteht aus Aufgabe 52, wenn statt der drei gegebenen Punkte drei gegebene Geraden eintreten?

Figur 195.



Erkl. 493. Der Dualismus dieser Aufgabe samt ihrer Lösung mit der vorigen Aufgabe 52, welcher nicht unmittelbar klar wird, ist bis aufs einzelne zu erkennen unter Beiziehung der Anschauungsweise der Erkl. 11a. Wie nämlich in Aufgabe 52 der Punkt S verbunden wird mit dem Mittelpunkt der Strecke PQ, so wird in Aufgabe 27 die Gerade c zum Schnitt gebracht mit der Winkelhalbierenden von a und b. Die zweite Gerade in Aufgabe 52 ist dann die Parallele zu PQ, diese aber ist anzusehen als Verbindungslinie von S mit dem unendlich fernen Punkte PQ oder mit dem Mittelpunkte des ausserhalb der Strecke PQ auf deren Verbindungslinie von P und Q begrenzten Stückes. Dieser Linie nach dem unendlich fernen Punkte entspricht aber nach Erkl. 11a dualistisch die Halbierungslinie des Nebenwinkels: also der Verbindungslinie von P mit jenem Punkte der Schnittpunkt von c mit dieser Linie.

Auflösung. Wenn statt der drei Punkte S, P, Q in Aufgabe 52 drei gegebene Geraden eintreten, so kann man folgende Aufgaben stellen:

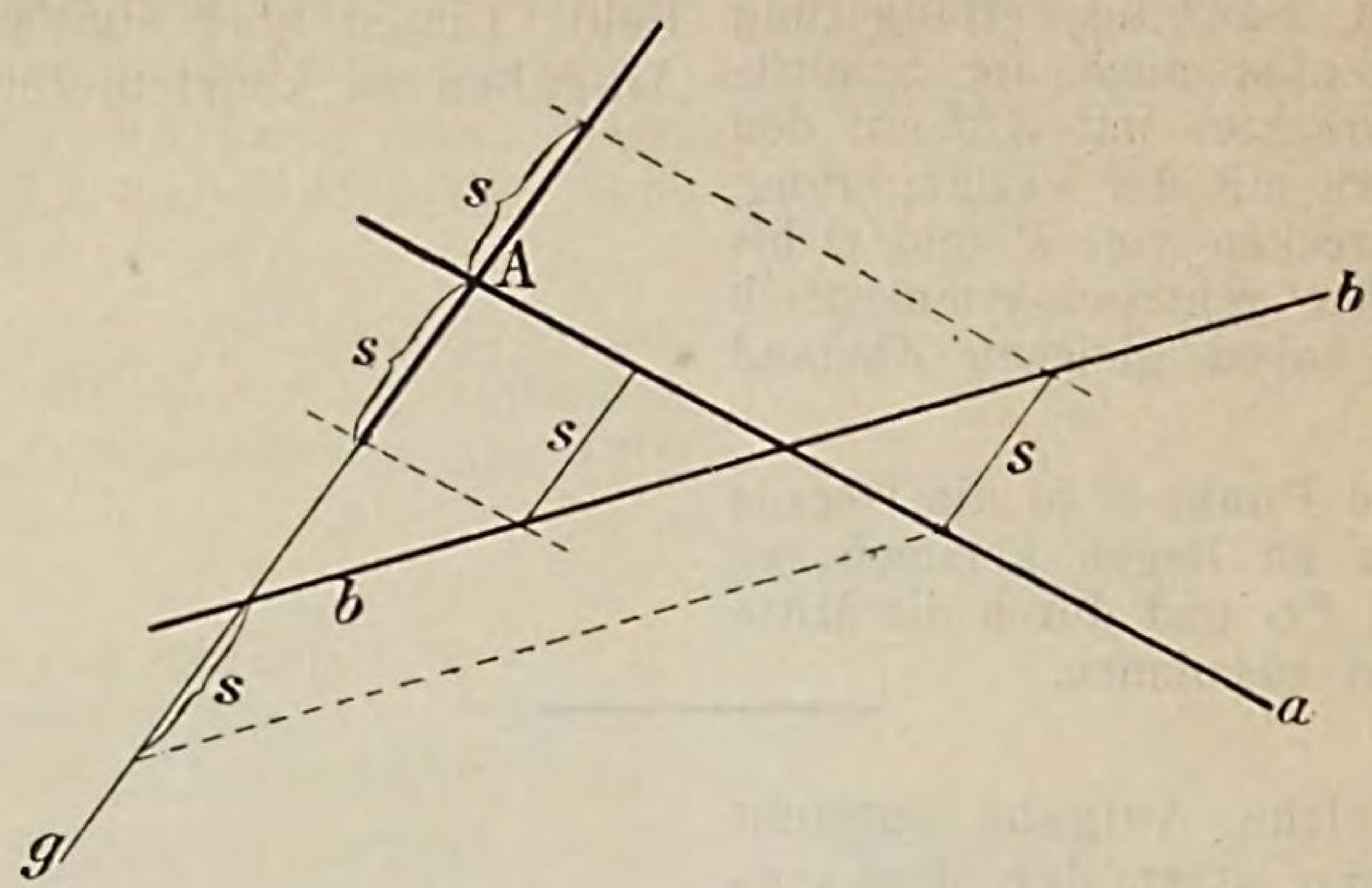
Auf einer Geraden c einen Punkt zu suchen, welcher von zwei weiteren gegebenen Geraden a und b gleichen Abstand hat.

Auch dieser Forderung genügen zwei Punkte, nämlich die Schnittpunkte der Geraden c mit den beiden Winkelhalbierenden der Geraden a und b. Denn wenn man um eine dieser Winkelhalbierenden als Achse umklappt, so fallen beide Winkelschenkel aufeinander, der Schnittpunkt bleibt liegen, also kommt die Senkrechte von ihm aus zum einen Schenkel zur Deckung mit der Senkrechten von ihm aus zum andern Schenkel, beide Senkrechten sind also gleichlang, und folglich ist auch der Abstand ihres Schnittpunktes von beiden Geraden gleichgross.

Aufgabe 54. Man soll zwischen zwei gegebenen Geraden a und b eine gegebene Strecke so einlegen, dass ihr einer Endpunkt auf der einen, ihr anderer Endpunkt auf der andern Geraden liegt, und dass sie selbst einer gegebenen Linie g parallel wird.

Auflösung. Man suche auf derjenigen Linie g, zu welcher die gegebene Strecke s parallel werden soll, den Schnittpunkt A mit

Figur 196.



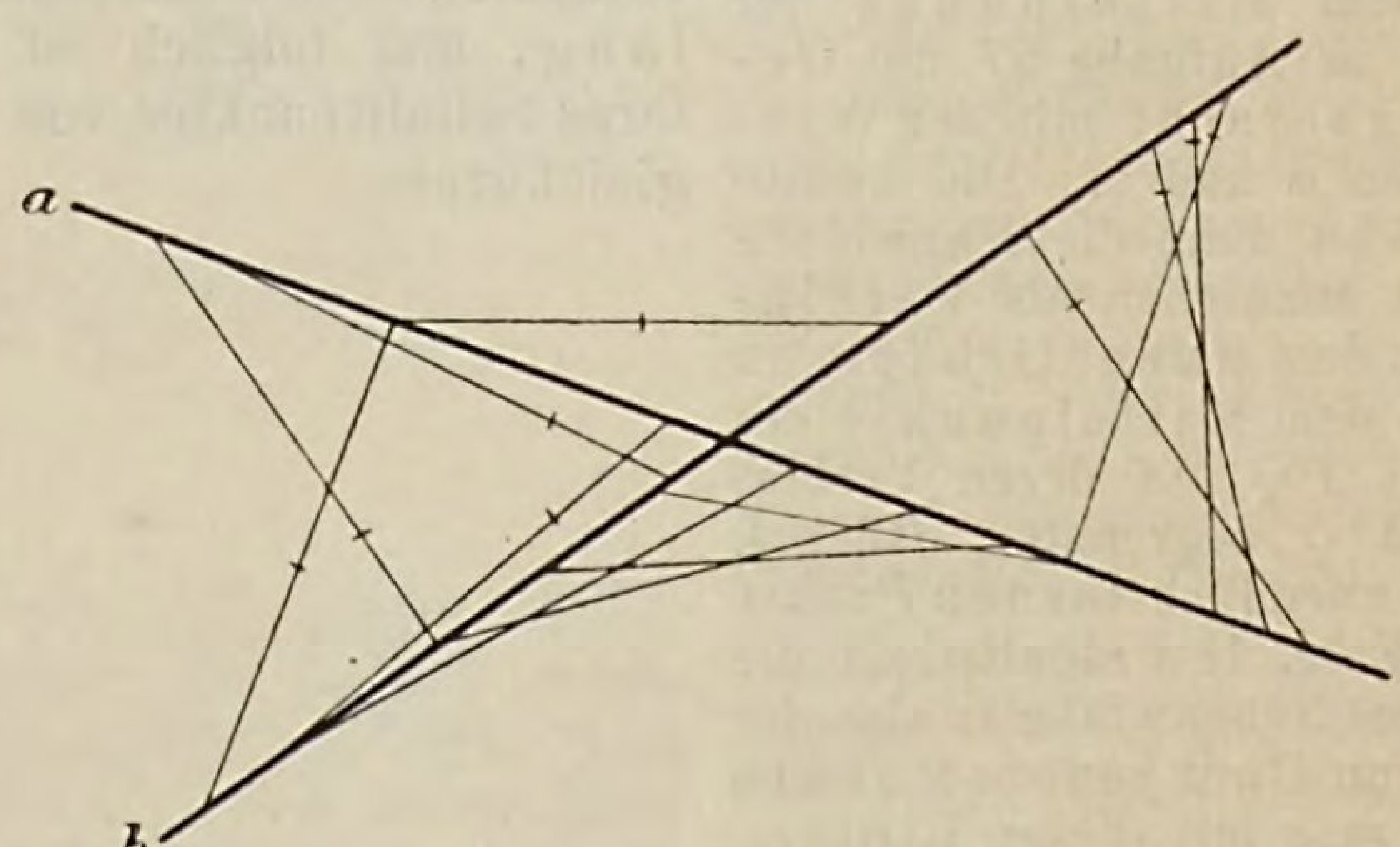
Erkl. 494. Würde man statt des Schnittpunktes A der Geraden g mit a, den Schnittpunkt B derselben Geraden mit b wählen und von dort aus s abtragen und Parallele ziehen, so erhielte man genau die gleiche Strecke. Denn wenn man vom zweiten Endpunkte der nach nebenstehender Lösung erhaltenen Strecke eine Parallele zu b zieht (siehe Figur 196), so muss diese nach demselben Satze 32 auf g eine Strecke gleich s auschneiden, also zusammenfallen mit derjenigen Parallelen zu b, durch welche bei der veränderten Konstruktion der Endpunkt von s erhalten worden wäre.

Erkl. 495. Eine gegebene Strecke s kann auf sehr verschiedene Weise zwischen zwei Gerade eingetragen werden und erzeugt dabei ganz bemerkenswerte Gebilde (siehe Figur 197), welche in der Geometrie der Lage besprochen werden. Dagegen war hier unter diesen vielen Lagen nur diejenige Gerade zu suchen, welche mit der gegebenen Geraden $g \parallel$ ist.

der einen von beiden Geraden, trage von diesem aus nach beiden Seiten auf die Linie g die gegebene Strecke s an und ziehe durch die Endpunkte B und C parallele Linien zur gleichen Geraden a. Zieht man dann durch die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Linie b wieder Parallele zu g, so werden auf diesen durch a und b Stücke ausgeschnitten, welche der Strecke s gleich sind; denn sie sind parallele Strecken zu der abgetragenen Strecke s und liegen selber zwischen den beiden Parallelen a selbst und den zu a parallel gezogenen.

Man erhält also zwei Lösungen, nämlich zwei zu einander und zu g parallele Lagen der Strecke s in zwei Scheitelwinkeln der Geraden a und b.

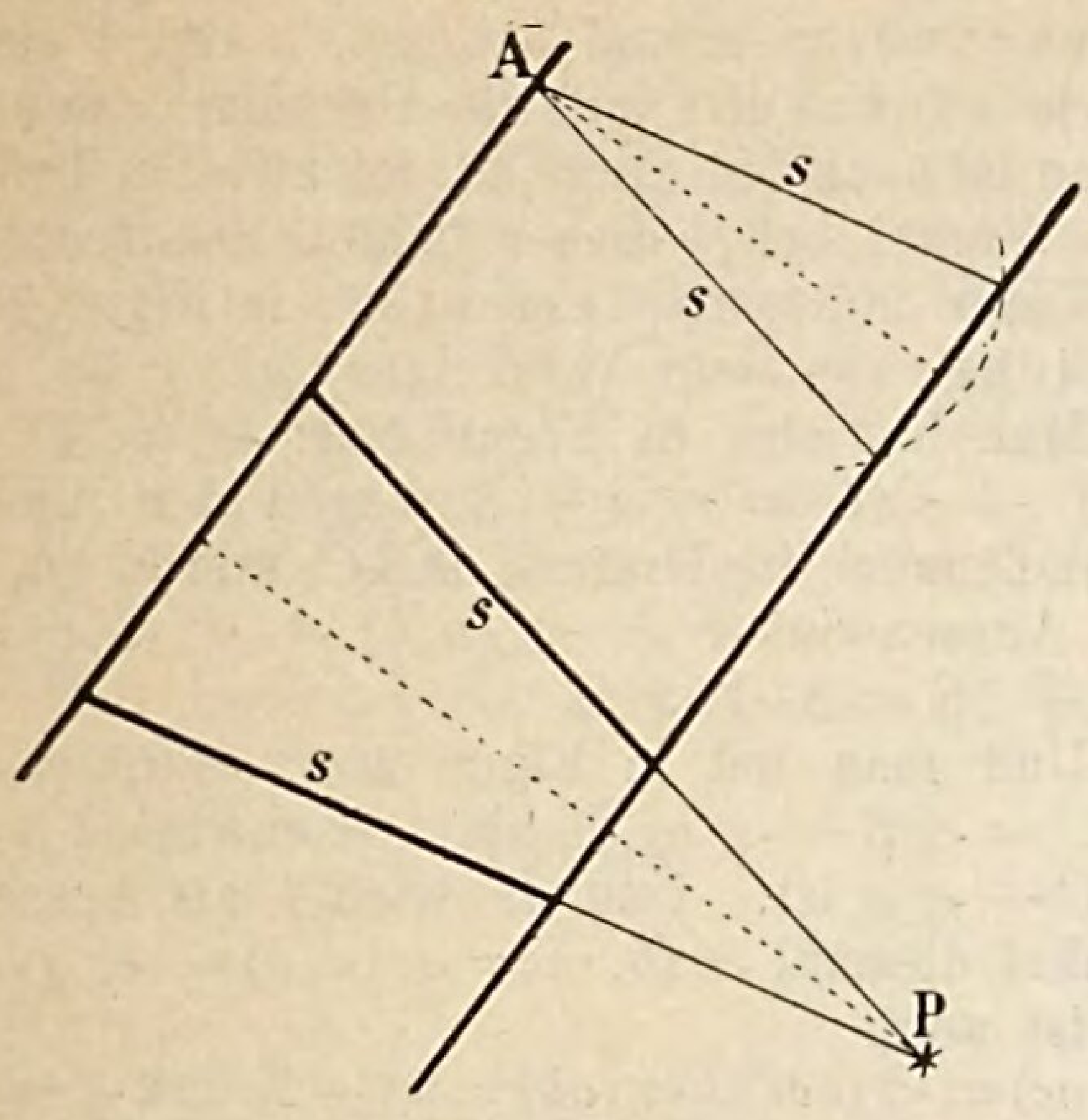
Figur 197.



Aufgabe 55. Man soll zwischen zwei gegebene Parallelen a und b eine gegebene Strecke s so eintragen, dass ihr einer Endpunkt auf der einen, ihr anderer Endpunkt auf der andern Parallelen liegt, und dass sie selbst (oder ihre Verlängerung) durch einen gegebenen Punkt P geht.

Auflösung. Während zwischen zwei beliebigen Geraden eine gegebene Strecke nach Erkl. 495 in beliebig vielfachen Richtungen

Figur 198.



Erkl. 496. Während bei der vorigen Aufgabe keine Beschränkung für die Länge s vorhanden war, ist bei dieser Aufgabe 55 die Eintragung der Strecke S vom Punkte A aus nur möglich, wenn s länger ist, als die Senkrechte zwischen den beiden parallelen Geraden; ist die Strecke s kürzer, so trifft der Kreisbogen um A die andere Gerade gar nicht; ist sie gleichlang, so erhält man nur einen Punkt auf der zweiten Parallelen, nämlich den Fusspunkt der Senkrechten. Dann wird auch die durch P gezogene Strecke senkrecht und eindeutig. Ist aber s grösser als der Abstand, dann entstehen wie in Figur 198 zwei Strecken durch P von der Länge s.

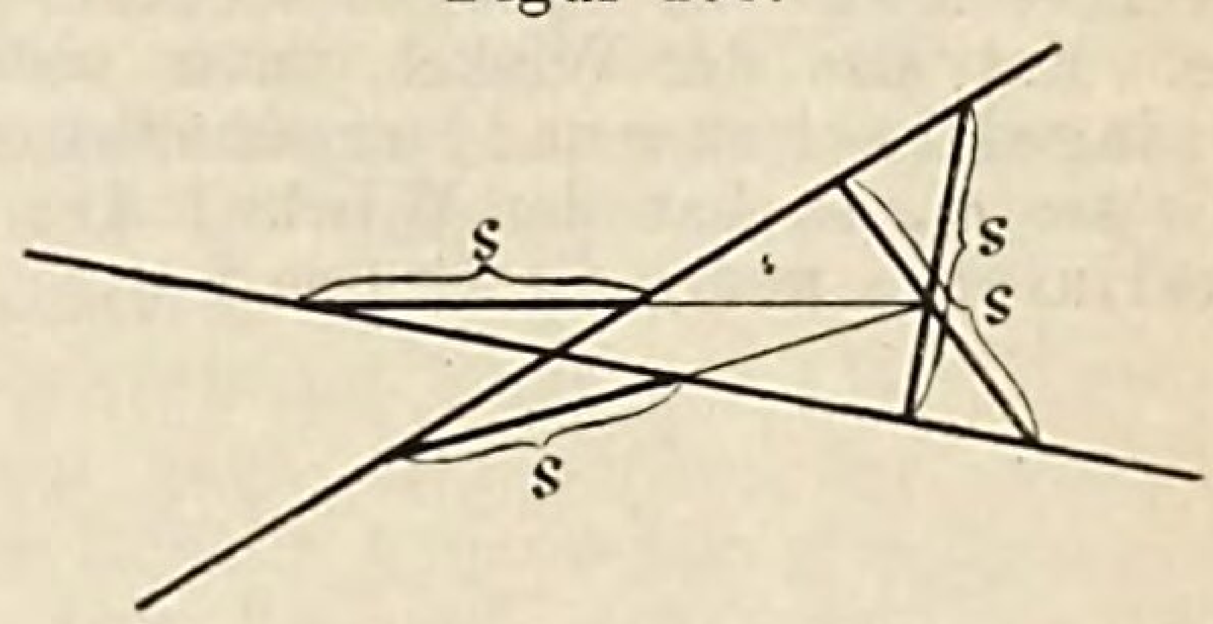
Erkl. 496 a. Liegt P zwischen beiden Parallelen, so geht jede der beiden Strecken s selbst durch den Punkt und nicht bloss wie in Figur 198 ihre Verlängerungen.

Erkl. 497. Die Aufgabe, zwischen zwei beliebigen Geraden eine Strecke s so einzutragen, dass sie durch einen beliebig gegebenen Punkt geht, oder unter den vielen Strecken der Figur 197 diejenigen herauszusuchen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, würde vier Lösungen ergeben (siehe Figur 199), und ist mit den Hilfsmitteln der ebenen Elementar-Geometrie gar nicht lösbar. Man sehe darüber die Lehrbücher der analytischen Geometrie in Kleyers Encyklopädie.

eingetragen werden kann, ist dies bei Parallelen nicht mehr der Fall. Denn hier haben je zwei benachbarte schiefe Transversalen stets verschiedene Längen, und unter sich gleiche Strecken müssen nach Satz 32a selbst mit einander parallel sein. Man trage daher die gegebene Strecke von einem gegebenen Punkte A auf einer der Parallelen mit Hilfe eines Kreisbogens vom Radius s zwischen die beiden Parallelen ein, und ziehe durch den Punkt P je eine Parallele zu jeder der erhaltenen Strecken s. Nach Satz 32 werden dann auf jeder dieser Geraden durch die beiden gegebenen Parallelen zwei Strecken ausgeschnitten, welche der gegebenen Strecke s gleich sind.

Man erhält daher zwei Lösungen, aber beide überhaupt nur dann, wenn s grösser ist, als der Abstand der gegebenen Parallele (siehe Erkl. 496).

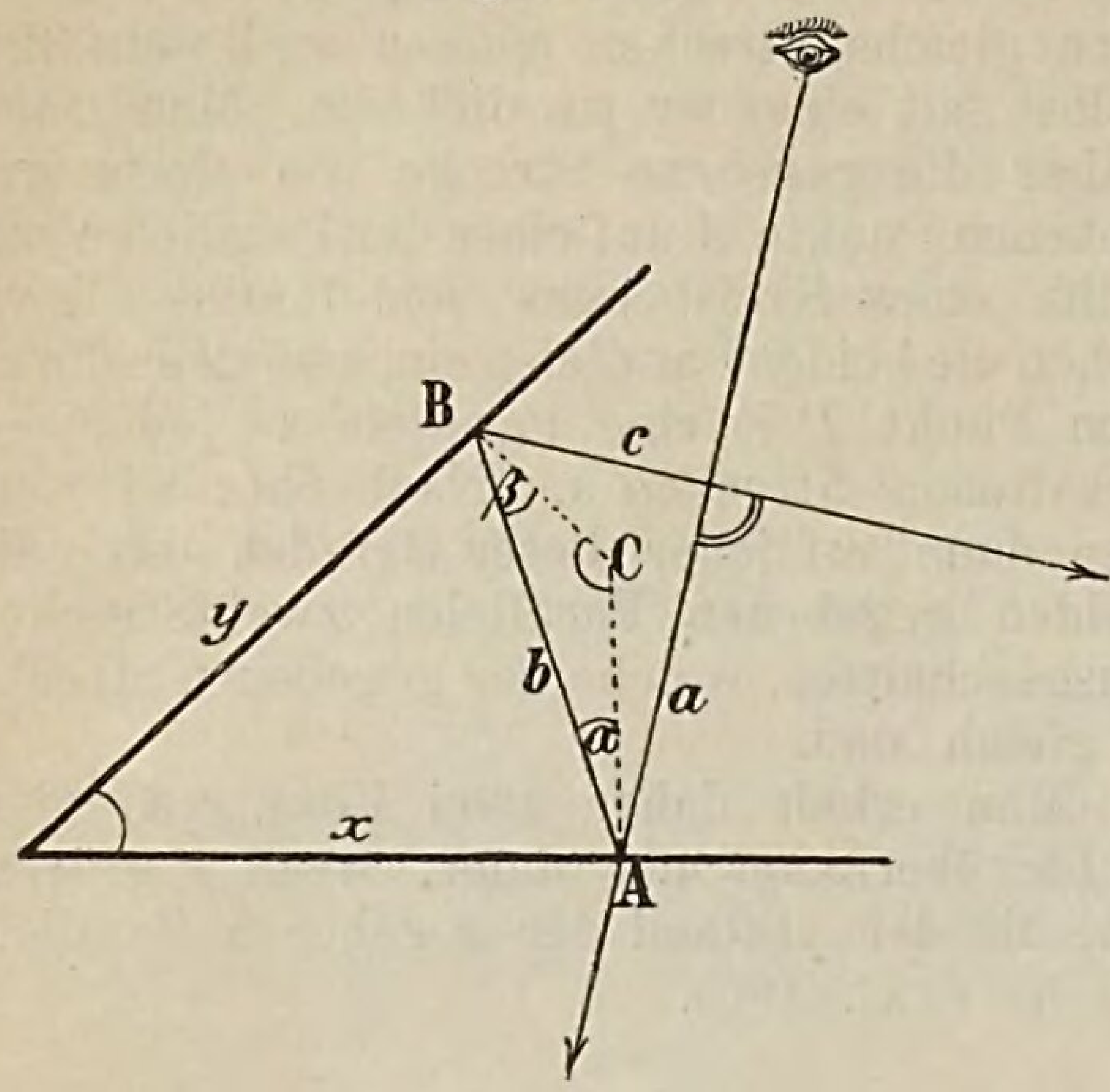
Figur 199.



Aufgabe 56. Man soll beweisen, dass wenn zwei Geraden a und b in ihrem Schnittpunkte A gleiche Winkel bilden mit einer andern Geraden x, und eine von ihnen ebenso in ihrem Schnittpunkte B mit einer weiteren Geraden c wieder gleiche Winkel bildet mit einer fünften Geraden y (siehe Figur 200), dass dann der Winkel der Geraden a und c doppelt so gross ist, als der Winkel x und y.

Auflösung. Zum Beweise ziehe man je die Winkelhalbierende der Geraden (a, b) und (b, c) und berücksichtige nach Aufgabe 16,

Figur 200.



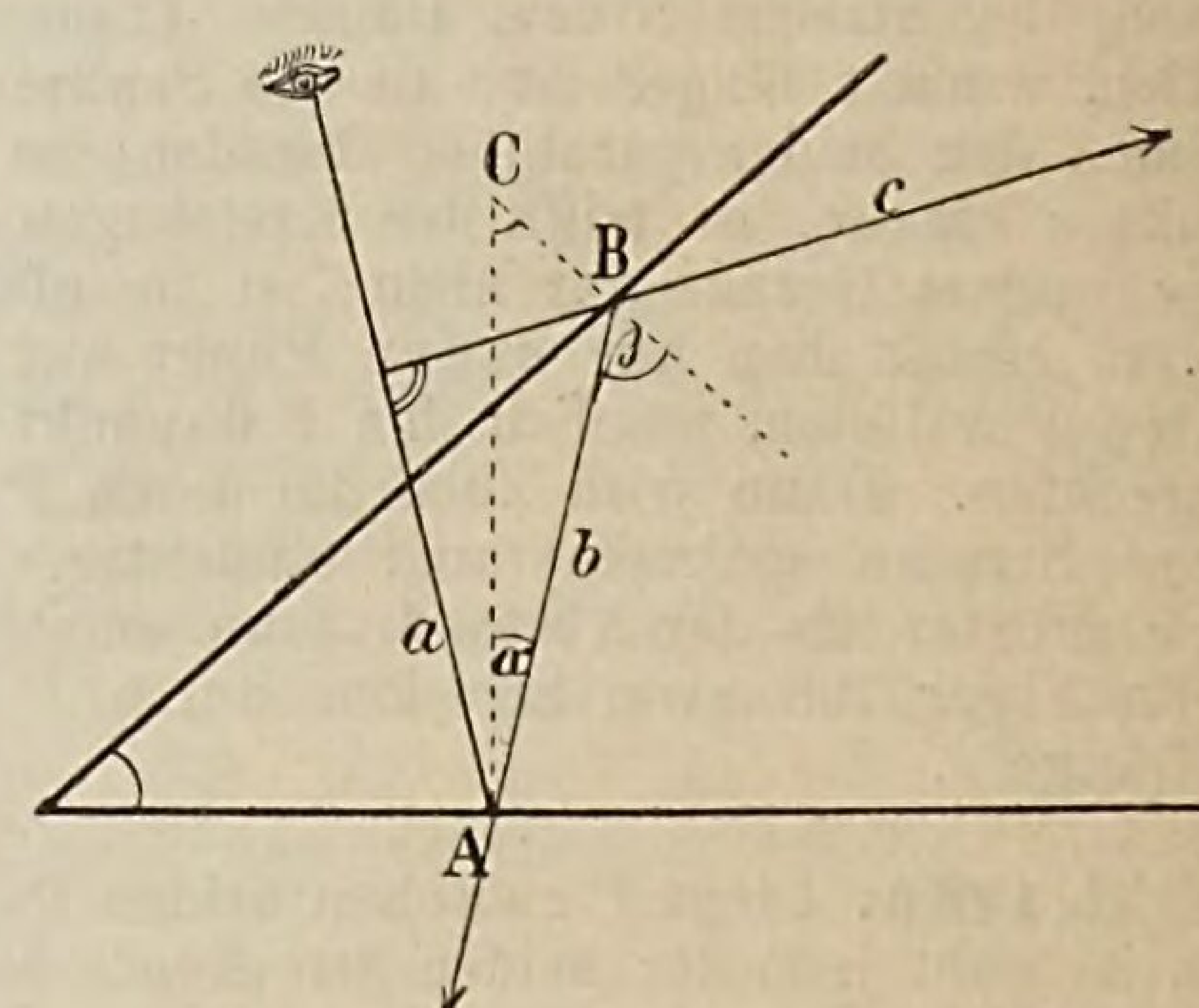
dass diese Winkelhalbierenden je Symmetrieachse zu a und b bezw. b und c sind, sowie senkrecht auf die Geraden x und y. Dann ist nach dem Satze 39 des zweiten Teiles der Winkel bei C dieser beiden Senkrechten in Figur 200 supplementär, in Figur 201 gleichgross dem Winkel (x, y).

Man hat also in Figur 200: $\sphericalangle (x, y) = 180^0 - \sphericalangle C = \sphericalangle \alpha + \beta$ wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC; und $\sphericalangle (a, c)$ als Aussenwinkel $= \sphericalangle (a, b) + \sphericalangle (b, c) = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot \sphericalangle (x\,y)$.

Und man hat in Figur 201: $\sphericalangle (x\,y) = \sphericalangle C = \sphericalangle \beta - \sphericalangle \alpha$, da als Aussenwinkel $\beta = \sphericalangle C + \sphericalangle \alpha$ ist. Und da wieder als Aussenwinkel diesmal $\sphericalangle (b, c) = \sphericalangle (a, b) + \sphericalangle (a\,c)$, so ist auch

$\sphericalangle (ac) = \sphericalangle (bc) - \sphericalangle (ab) = 2\beta - 2\alpha = 2 \sphericalangle (xy)$.

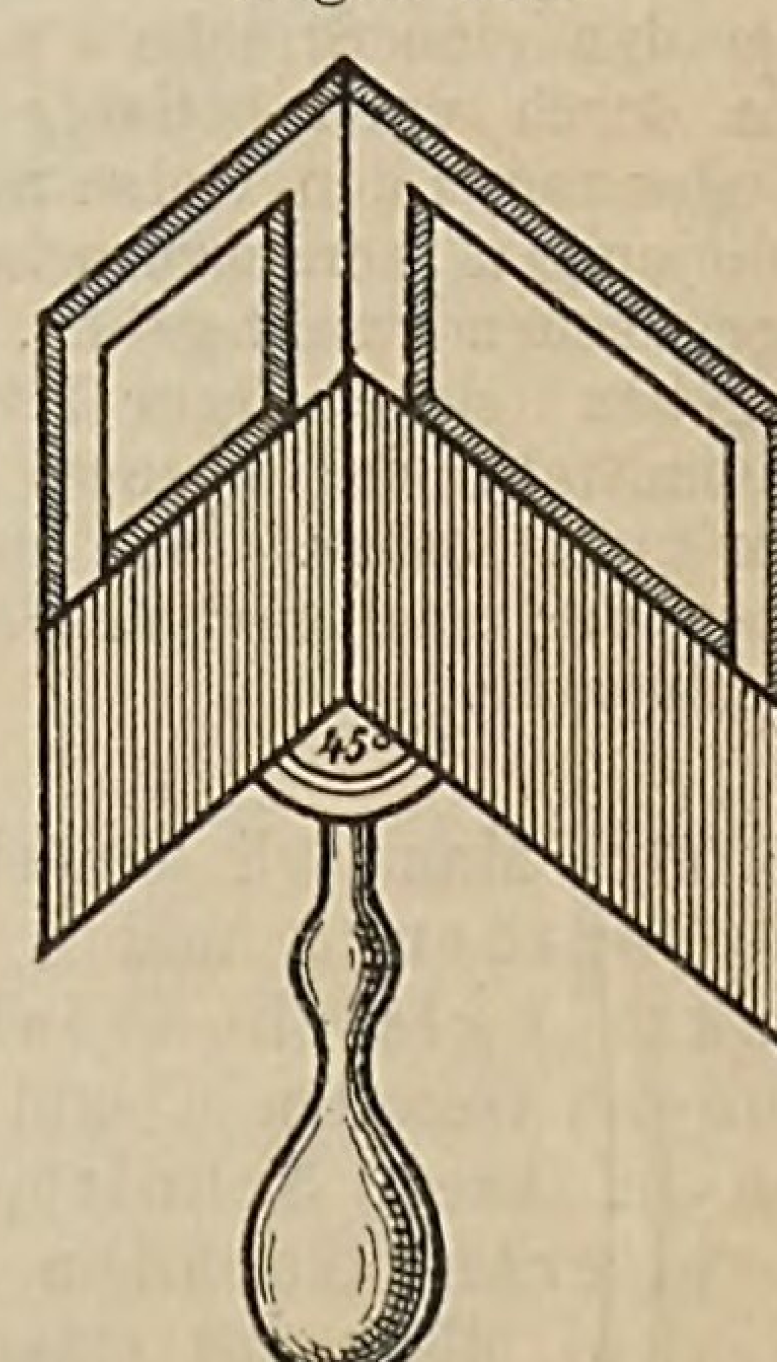
Figur 201.



Erkl. 498. Denkt man sich durch die Schenkel des Winkels (x, y) zwei Spiegelflächen dargestellt, so sind nach den Ausführungen der Erkl. 479 die Geraden b und c die Gesichtslinien, in welchen ein längs a hersehendes Auge im Spiegel weitersehen würde. Hat also der Winkel, unter welchem die Spiegelflächen x und y zusammenstossen, die Grösse φ, so hat der Winkel der Gesichtslinien a und c die Grösse $2 \cdot \varphi$.

Erkl. 499. Eine wichtige Anwendung dieser Aufgabe findet statt bei einem wichtigen Instrument der Vermessungskunde, dem sogenannten Winkelspiegel, welcher in Figur 202 dargestellt ist. Durch die Winkelöffnung oder durch die Fenster der Spiegelflächen sieht man sowohl in gerader Richtung weiter, als auch nach Spiegelung in beiden Spiegeln in der Richtung c. Ist also der Winkel der beiden Spiegelflächen genau gleich 45° gemacht, so sieht man vermittelst dieses Instrumentes gleichzeitig nach Gegenständen, welche in gerader und in dazu senkrechter Richtung vom Beobachter aus entfernt liegen. Daher dient dasselbe zur sogenannten Absteckung rechtwinkliger Linien im Freien.

Figur 202.

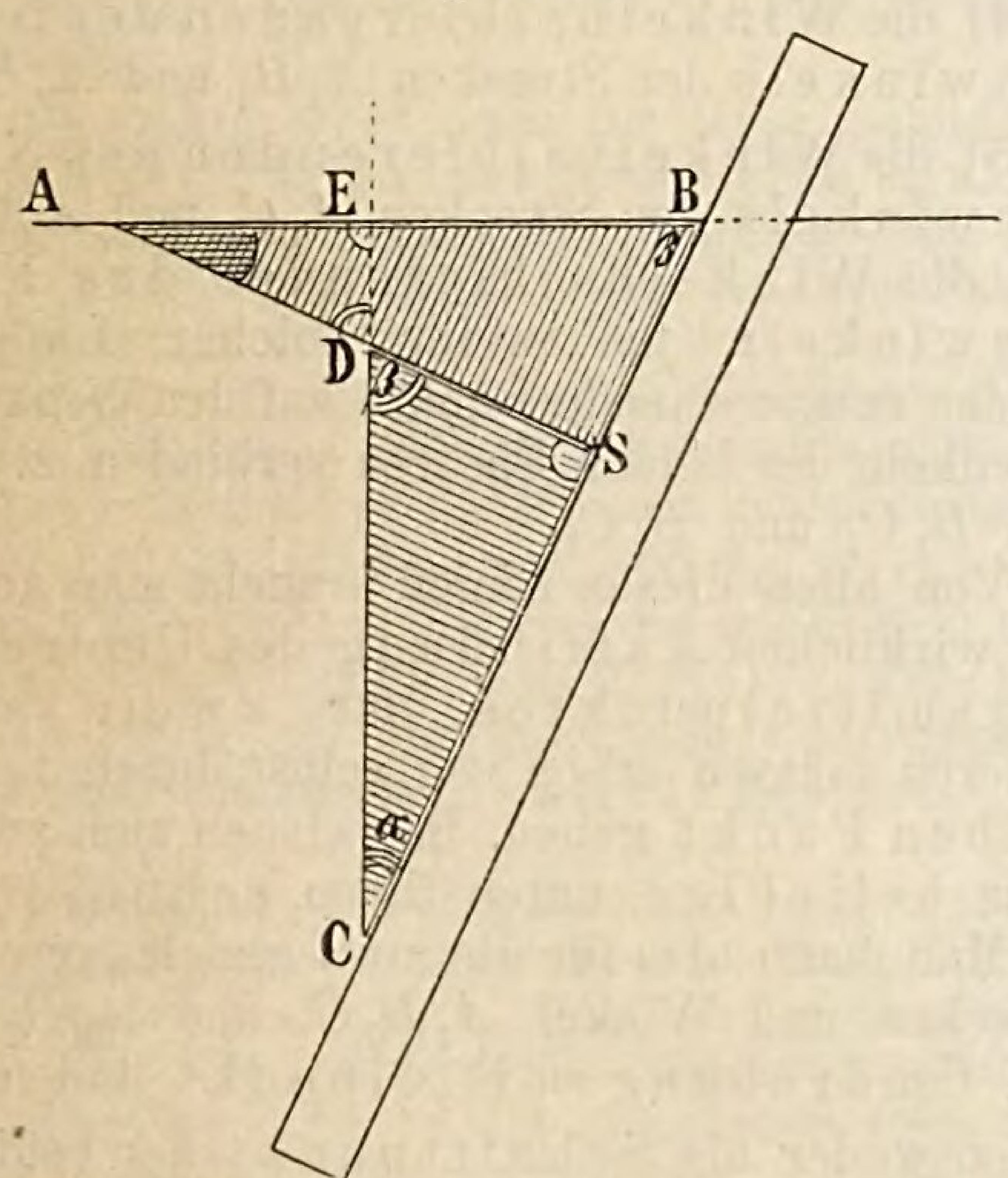


Aufgabe 57. In der gewerblichen Zeichenkunst ist folgende Konstruktion zweier senkrechten Geraden üblich:

An einer Linie AB wird die Hypotenuse des Winkelscheits angelegt, an dessen einer Kathete das Lineal. Während nun dieses festgehalten wird, legt man die andere Kathete des Winkelscheits am Lineal an, und hat dann die Hypotenuse desselben senkrecht zur ersten Linie.

Man beweise die Richtigkeit dieser Konstruktion!

Figur 203.



Erkl. 500. Die nebenstehende Konstruktion erlaubt durch Verschiebung des gedrehten Winkelscheits auch die Konstruktion der Senkrechten zu a durch einen beliebigen Punkt P zu finden. Die Methode hat mehrfache Vorzüge vor der gewöhnlichen Art, bloss eine Kathete des Winkelscheits an der Linie a anzulegen. Erstens nämlich liefert sie die Senkrechte nicht nur einerseits, sondern beiderseits der Linie a. Zweitens aber ist das Winkelscheit, mittels dessen Benützung selbst die Linie a gezogen worden ist, viel genauer an dieser Richtung a angelegt, als man an einer schon gezeichnet vorliegenden Linie dasselbe anlegen kann. Indem dann die senkrechte Linie wieder mit derselben Kante des Winkelscheits als Lineal gezeichnet wird, ist die Genauigkeit der Konstruktion noch eine erhöhte.

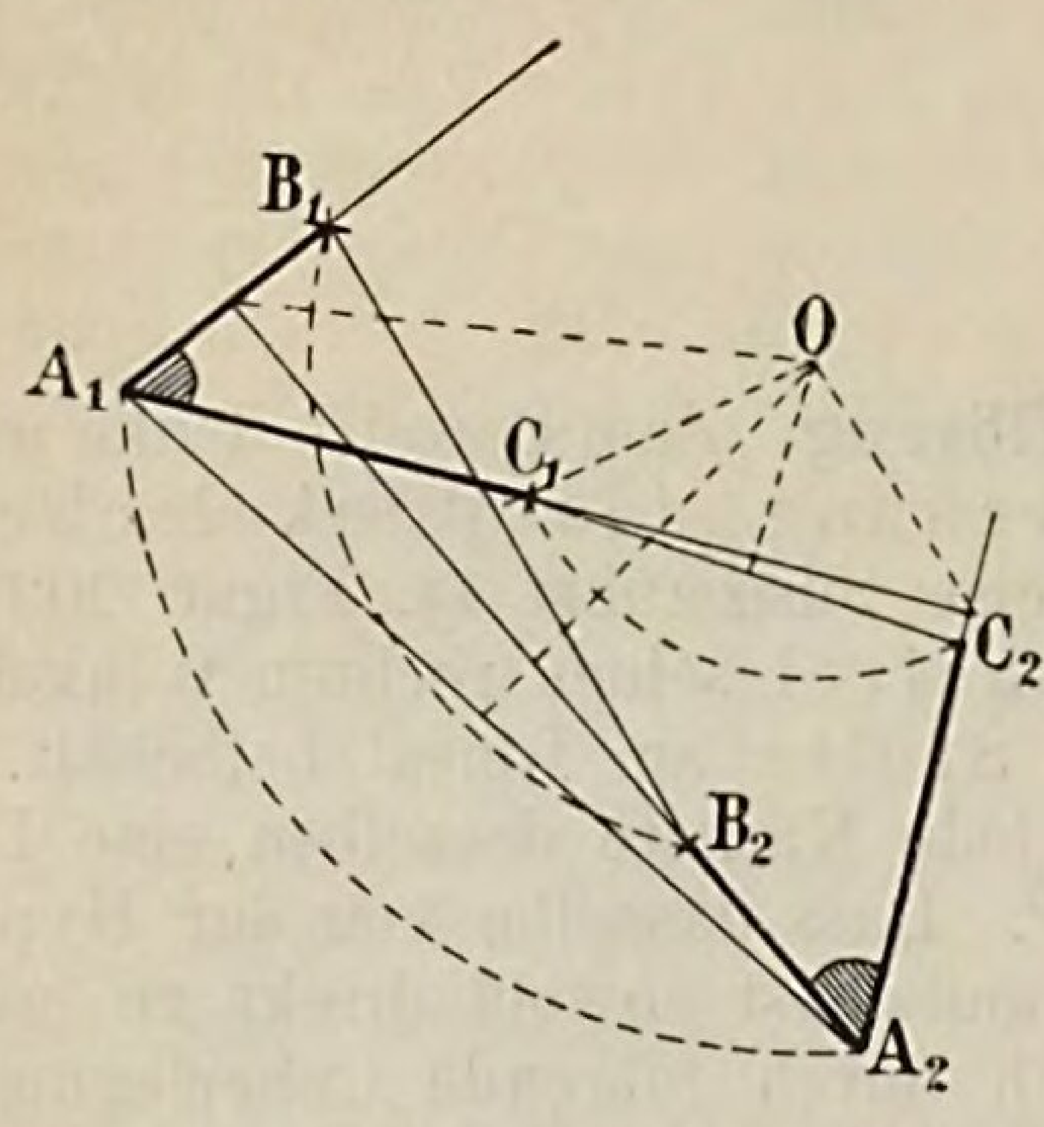
Auflösung. Zum Beweise denke man sich die Drehung des Winkelscheits in der Weise ausgeführt (s. Figur 203), dass der Scheitel seines rechten Winkels dieselbe Stelle am Lineal beibehält. Dann macht jede Kathete desselben eine Drehung von 90⁰. Dass dasselbe von der Hypotenuse gelten muss, ist sowohl direkt zu erkennen, als auch durch folgende Ueberlegung: Die spitzen Winkel des Winkelscheits seien α und $\beta = 90 - \alpha$. Dann liegt an der zum Lineal senkrechten Linie SDA erst der Winkel $SAB = \alpha$ an, dann der Winkel $SDC = \beta$. Denkt man sich also die Richtung CD verlängert, so entsteht das Dreieck ADE mit $\sphericalangle EAD = \alpha$, ADE als Scheitelwinkel $= CDS = \beta = 90 - \alpha$, also $\sphericalangle AED = 90^0$, d. h. die beiden Richtungen AB und CD, welche die Hypotenuse nacheinander einnimmt, sind senkrecht zu einander.

Jede andere Lage des Winkelscheites mit der am festliegenden Lineal angelegten Kante SB bzw. SC geht aber aus der in Fig. 203 betrachteten Lage hervor durch Parallelverschiebung längs der Linealkante, also bleiben auch die Winkel der Kanten des Winkelscheits gegenseitig gleichgross, nämlich stets Rechte — wo auch das Winkelscheit am Lineal angelegt wird.

Aufgabe 58. Man soll die Figur eines Winkels mit begrenzten Schenkelstrecken AB, AC an zwei verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene gleichwendig kongruent aufzeichnen und soll die

Beziehungen des Umdrehungsmittelpunktes O zu beiden Figuren aufsuchen.

Figur 204.



Erkl. 501. Die Punkte B_1, B_2 und C_1, C_2 bilden selber zu je zweien ein Paar solcher Punkte, welche in Antwort der Frage 59 zur Auffindung des Umdrehungsmittelpunktes verwendet wurden.

Erkl. 502. Während für zwei beliebige gleich grosse Strecken oder Winkel noch zweierlei verschiedene Umdrehungsmittelpunkte aufgefunden werden konnten, so ist infolge der Zufügung der begrenzten Schenkelstrecken diese Zweideutigkeit aufgehoben, denn es könnte zwar durch zweierlei Umdrehungen Linie A_1B_1 der Richtung nach erst auf A_2B_2, dann auf A_2C_2 gelangen, damit aber auch die Streckenlänge A_1B_1 auf dieselbe Strecke A_2B_2 falle, darf nur die erste von beiden Drehungsweisen beibehalten werden.

Erkl. 503. Wie in Satz 35 für zwei Winkel der Umdrehungsmittelpunkt als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten entsprechender Punktepaare gefunden wird, so könnte man auch für zwei Strecken den Umdrehungsmittelpunkt als Schnittpunkt zweier Nebenwinkelhalbierenden finden, nämlich der Halbierungslinie des Nebenwinkels der beiden Strecken selbst mit der Halbierungslinie des Nebenwinkels zweier solchen Geraden, welche in zwei zur Deckung bestimmten Endpunkten unter gleichen Winkeln mit der Strecke selbst angetragen wären. Denn wenn die Strecken selbst zur Deckung gelangen, so müssen auch solche Geraden zur Deckung gelangen, welche in entsprechenden Endpunkten gleiche Winkel bilden. In Figur 204 sind solche Geraden neben den Strecken A_1B_2 und A_2B_2 eben die anderen Schenkel des Winkels, also A_1C_1 und A_2C_2.

Auflösung. Um zunächst den Umdrehungsmittelpunkt zu finden, muss man zwei Linien suchen, auf denen derselbe liegen muss. Solche sind aber nach den Sätzen 33 und 36:

1) die Mittelsenkrechte von A_1A_2;

2) die Mittelsenkrechte von B_1B_2;

3) die Mittelsenkrechte von C_1C_2; und dazu die Mittelsenkrechten je zweier solchen Punkte, welche auf diesen Schenkeln AB und AC von A gleichen Abstand haben;

4) die Winkelhalbierenden des Nebenwinkels der Strecken A_1B_1 und A_2B_2;

5) die Winkelhalbierenden des Nebenwinkels der Strecken A_1C_1 und A_2C_2, und die Winkelhalbierenden des Nebenwinkels je zweier solcher Linien, welche entsprechende Punkte auf den Winkelschenkeln der beiden Figuren verbinden, z. B. von B_1C_1 und B_2C_2.

Von allen diesen Linien braucht man aber zur wirklichen Auffindung des Umdrehungsmittelpunktes nur zwei; alle anderen müssen schon von selbst durch denselben Punkt gehen, in welchen sich zwei ganz beliebige unter ihnen schneiden.

Man kann also für die zwei gleich grossen Strecken und Winkel $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ den Umdrehungsmittelpunkt finden

entweder als Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten zweier Paare zur Deckung bestimmter Punkte,

oder als Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden zweier Paare zur Deckung bestimmter Geraden,

oder als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Paars zur Deckung bestimmter Punkte mit der Winkelhalbierenden eines Paars zur Deckung bestimmter Geraden.

Aufgabe 59. Man soll auf Grund der vorigen Aufgabe Beziehungen aufsuchen zwischen den entsprechenden Punkten und Geraden kongruenter Figuren unter sich und mit dem Umdrehungsmittelpunkt.

Erkl. 504. Wollte man die Aufsuchung des Umdrehungsmittelpunktes für eine Strecke und einen Winkel genau dualistisch erhalten, so kann man

entweder für die Strecke den Satz 34 und für den Winkel den Satz 38 ausführen, also für die Strecke zwei Mittelsenkrechte, für den Winkel zwei Winkelhalbierende benutzen.

Man kann aber auch für beide Gebilde je eine Mittelsenkrechte und eine Winkelhalbierende benutzen, nämlich für die Strecken die Winkelhalbierenden ihres Nebenwinkels mit der Mittelsenkrechten eines entsprechenden Punktepaares, für die Winkel die Mittelsenkrechte ihrer Scheitelpunkte mit der Nebenwinkelhalbierenden eines Schenkelpaares.

Und endlich können sowohl für Strecken zwei Winkelhalbierende, wie in Erkl. 503, als auch für Winkel zwei Mittelsenkrechte, wie in Satz 35, zur Anwendung gelangen — und stets bleibt die Dualität gewahrt.

Erkl. 505. Für die Deckung eines Strahles, also einer durch einen einzelnen Punkt begrenzten Geraden, wird von den vorigen drei Erzeugungsweisen des Umdrehungsmittelpunktes die zweite die geeignetste sein, aber durch Zufügung entsprechender Gebilde auch jede andere anwendbar sein.

Erkl. 506. Dass die Abstände der Punkte vom Umdrehungsmittelpunkt gleich bleiben, ist schon in Satz 33 ausgesagt und daselbst bewiesen worden. Der Abstand einer Geraden vom Umdrehungsmittelpunkt wird nach Satz 52 gemessen durch die Senkrechte vom Umdrehungsmittelpunkte auf die Gerade. Wird diese aber gezogen für zwei entsprechende Geraden in beiden Lagen, so wird unmittelbar klar und wurde auch schon in der Antwort der Frage 60 ausgeführt, dass die Senkrechte OF_1 vom Umdrehungsmittelpunkt auf die erste Lage zur Deckung komme mit der Senkrechten OF_2 auf die zweite Lage, dass also beide senkrechten Strecken OF_1 und OF_2, also beide Abstände gleichgross sein müssen (s. Figur 205).

Erkl. 507. Unter dem Winkel, welchen ein Punkt bei der Drehung durchläuft, ist zu verstehen der Mittelpunktswinkel des Kreisbogens, welchen der Punkt durchlaufen hat. Während nämlich jeder Punkt verschieden lange Wege durchläuft, je nach seinem Abstand vom Mittelpunkt, so sind doch diese

Auflösung. Auf Grund der vorigen Aufgabe, sowie der Sätze 33 bis 38 kann man eine Reihe von Beziehungen festsetzen, welche bei der Umdrehung um einen Punkt Giltigkeit haben. Die nächstliegenden sind die folgenden:

1) Bei der Drehung einer Ebene um einen ihrer Punkte in irgend eine neue Lage gehen stets durch den Umdrehungsmittelpunkt:

a) die Mittelsenkrechten je zweier entsprechenden Punkte in beiden Lagen;

b) die Winkelhalbierenden der Nebenwinkel entsprechender Geraden in beiden Lagen.

2) Bei der Drehung einer Ebene um einen ihrer Punkte bleibt der Abstand eines Punktes vom Umdrehungsmittelpunkt stets gleichgross, und auch der Abstand einer Geraden vom Umdrehungsmittelpunkt stets gleichgross (s. Erkl. 506).

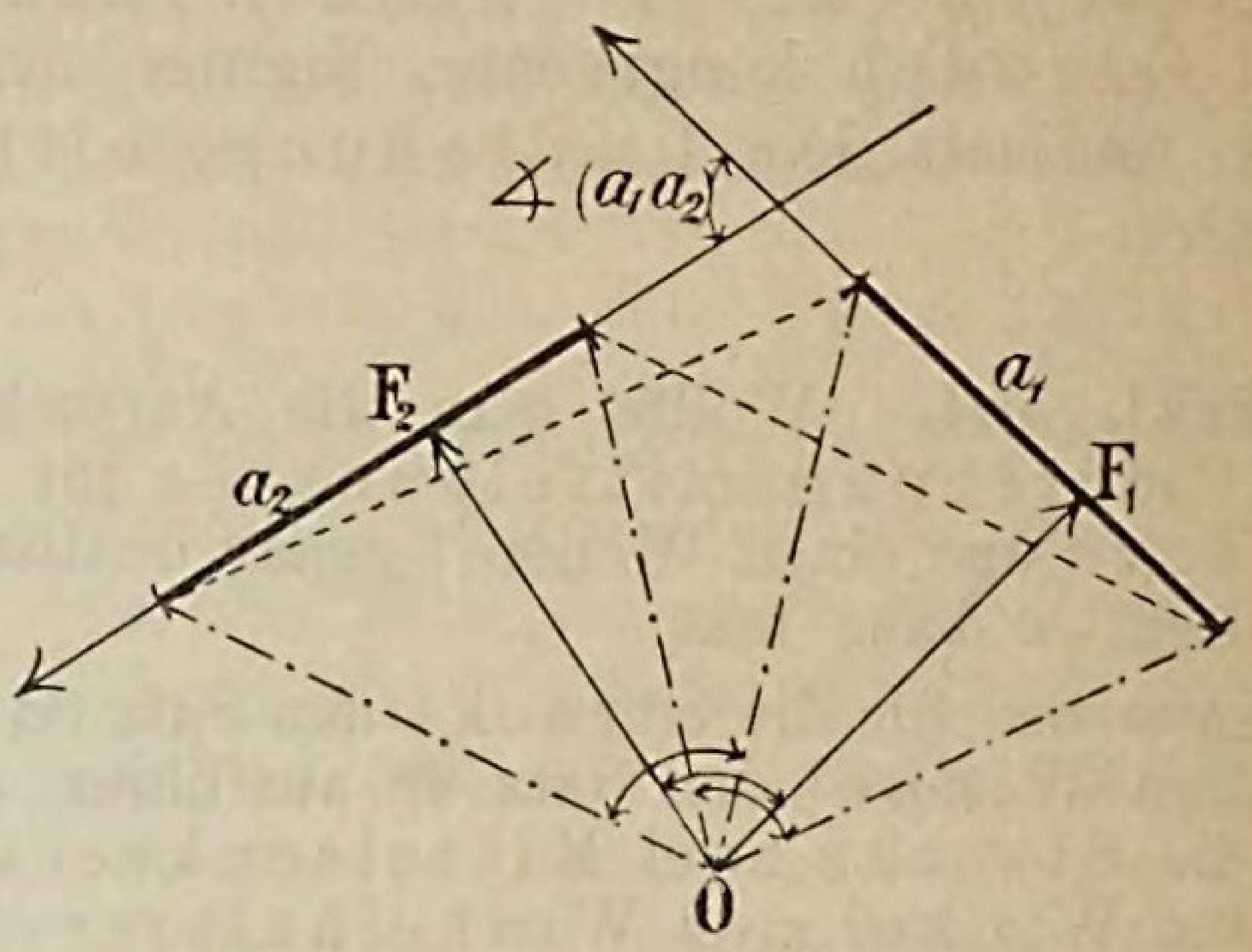
3) Bei der Drehung einer Ebene um einen ihrer Punkte durchlaufen alle ihre Punkte und alle ihre Geraden von ihrer Anfangslage zur Endlage gleichgrosse Winkel, deren gemeinschaftliche Grösse gleich der Drehungsgrösse der ganzen Ebene ist (s. Erkl. 507 und 508).

4) Bei der Drehung einer Ebene um einen ihrer Punkte bleibt das Dreieck, welches irgend eine ihrer Strecken mit dem festliegenden Umdrehungsmittelpunkte bildet, stets sich selbst kongruent, während die mit irgend einem andern festliegenden Punkte der Ebene gebildeten Dreiecke Veränderungen erleiden, d. h. verzerrt, verschoben werden. Denn jene Strecke selbst bleibt gleich, die Abstandsstrecken ihrer Endpunkte vom Umdrehungsmittelpunkte bleiben nach der obigen zweiten Aussage ebenfalls gleich, also behält das Dreieck stets drei gleichgrosse Seiten, und folglich bleibt es nach dem ersten Kongruenzsatze stets sich selber kongruent.

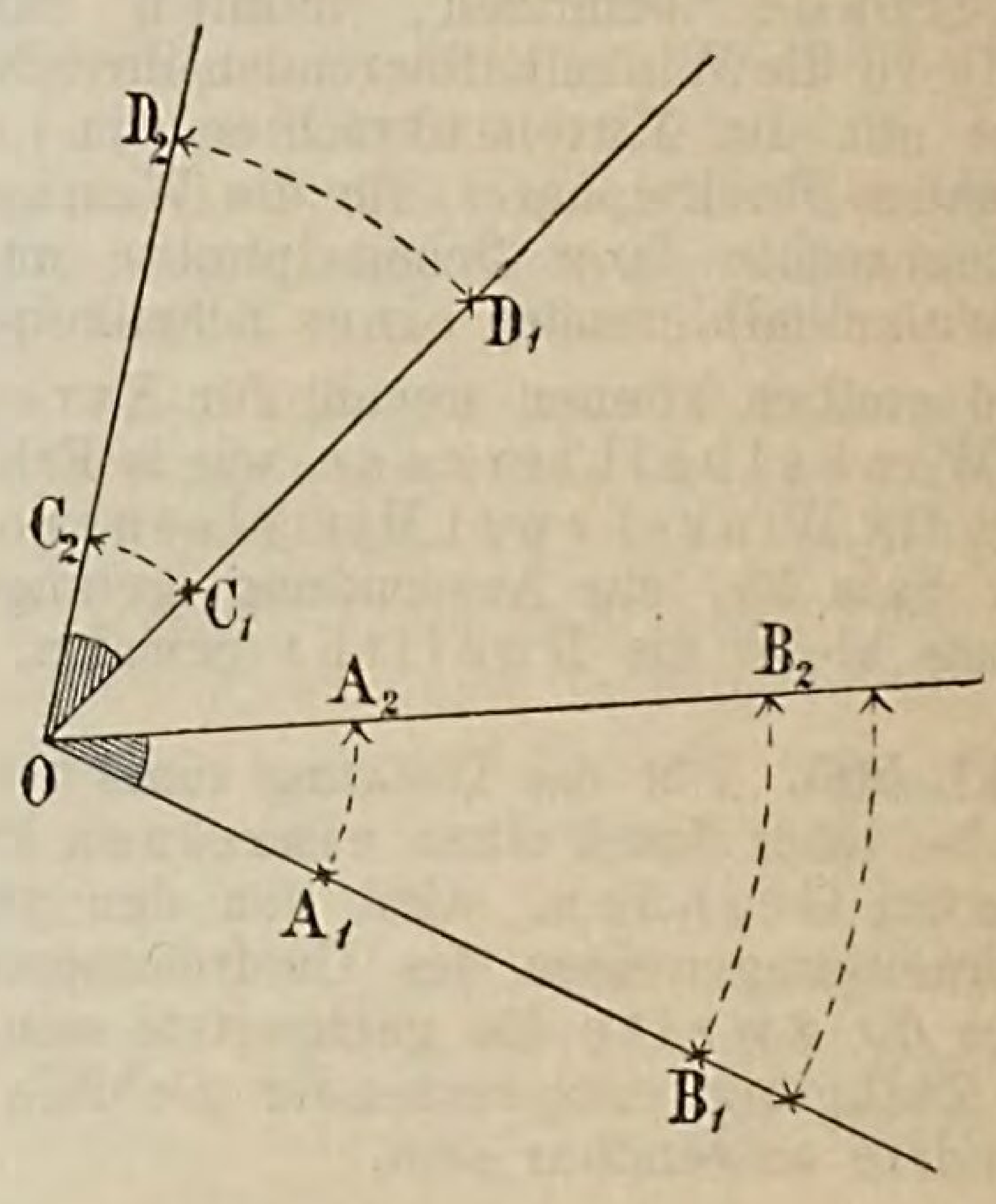
Mittelpunktswinkel für alle Punkte gleich, mögen diese weit oder nah vom Umdrehungsmittelpunkt selbst liegen. So ist in Figur 206 jeder der Kreisbögen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 an Länge verschieden, aber der Mittelpunktswinkel von A_1A_2 und B_1B_2 ist identisch derselbe, und auch gleich dem Mittelpunktswinkel von C_1C_2 und D_1D_2, weil $\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle C_1OC_2$ ist, denn die Zentrale OA macht die gleiche Drehung wie die Zentrale OC.

Genaueres über die Grössenverhältnisse solcher Kreisbogen mit ihren Mittelpunktswinkeln findet man im VIII. Teile dieses Lehrbuches bei der Lehre von der Länge der Kreisperipherie und ihrer Teile.

Figur 205.



Figur 206.



Erkl. 508. Dass der Winkel der Geraden a_1a_2 ebenfalls gleich dem Winkel F_1OF_2, also dem Drehungswinkel gleich ist, kann auf verschiedene Weise erschlossen werden.

Entweder betrachtet man a_1 und a_2 als zwei Geraden, welche senkrecht stehen auf den Schenkeln des Winkels F_1OF_2. Dann folgt aus Satz 39 des zweiten Teiles, dass der Winkel der Geraden a_1a_2 dem Winkel der Geraden OF_1 und OF_2 gleich sein muss.

Oder man betrachtet die Geraden OF_1 und a_1 bezw. OF_2 und a_2 als die Schenkel zweier gleichgrossen (rechten) Winkel und folgert aus Satz 38 des zweiten Teiles, dass dann der Winkel der zweiten Schenkel a_1a_2 derselbe sein muss, wie der der ersten Schenkel OF_1 und OF_2.

Endlich könnte man auch das aus den Geraden a_1, a_2, OF_1, OF_2 gebildete Viereck betrachten. Darin sind bei F_1 und F_2 zwei rechte Winkel, also muss der Winkel bei O mit seinem Gegenwinkel supplementär, also mit dessen Nebenwinkel, eben dem $\sphericalangle (a_1a_2)$ gleichgross sein.

Aufgabe 60. Man soll die gezeichnet vorliegende Figur eines Dreiecks, oder Vierecks u. s. w. um eine gegebene Winkelgrösse φ um einen gegebenen Umdrehungsmittelpunkt herumdrehen.

Auflösung. Da nach Auflösung der Aufgabe 59 der Weg eines Punktes der Figur erhalten wird als ein Kreisbogen mit einem Mittelpunktswinkel gleich der gegebenen Winkelgrösse, so kann man zu einem ersten Punkt A_1 den entsprechenden auf folgende Weise erhalten (siehe die Figuren 206, sowie 161 und 162).

Man zeichnet die Zentrale A_1O des Punktes und trägt an dieser im Umdrehungsmittelpunkte O unter dem gegebenen Winkel φ im vorgeschriebenen Drehungssinne eine zweite Zentrale an. Alsdann beschreibt man mit dem Radius OA_1 um O einen Kreisbogen bis zum Schnittpunkte mit der zweiten Zentralen. Dieser Schnittpunkt ist der entsprechende Punkt A_2 zu A_1.

Erkl. 508a. Statt alle Punkte der entsprechenden Figur nach der ersten Art zu konstruieren oder alle nach der zweiten Art, oder alle nach der dritten Art, kann man ebensowohl auch nur einen oder einige Punkte nach der ersten Art konstruieren, einige andere nach der zweiten Art und die übrigen nach der dritten in ganz beliebigen Zusammenstellungen.

Die letzte der Geraden bezw. Strecken wird immer abhängig von ihren beiden anstossenden Punkten, braucht also nicht selbstständig konstruiert zu werden, sondern wird als deren Verbindungsgerade erhalten.

Erkl. 509. Ist ein erster Punkt und die Richtung einer ersten Geraden einer entsprechenden Figur gefunden, so kann man sämtliche übrigen Punkte einer Geraden auch finden ohne alle Rücksicht auf die Art der vorzunehmenden Ortsveränderung. Denn da an entsprechenden Punkten gleiche Winkel und auf entsprechenden Richtungen gleiche Strecken liegen müssen, so kann ausgehend von einem ersten Punkte jeder folgende erhalten werden durch jeweilige Antragung solcher Strecken und Winkel, welche den entsprechenden benachbarten Strecken und Winkeln der ersten Figur gleich sind.

Hat man so für einen ersten Punkt den entsprechenden gefunden, so kann man die übrigen Punkte entweder auf die gleiche Weise konstruieren und verbinden. Oder man zieht durch die übrigen Punkte nur die Kreisbögen und trägt von dem ersten Punkte aus benachbarte Geraden an, welche mit ihren entsprechenden Geraden in der ersten Figur Winkel bilden gleich der vorgeschriebenen Drehungsgrösse, und erhält dann die entsprechenden Endpunkte als Schnittpunkte mit den Kreisbögen. Oder man zieht keine Kreisbögen mehr, sondern nur diese entsprechenden Geraden, trägt auf ihnen die Längen ihrer entsprechenden Strecken ab, und erhält als ihre Endpunkte die entsprechenden Punkte.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 61. Man beweise, dass die aus zwei senkrechten Geraden und deren Winkelhalbierenden bestehende Figur 170 auch in Bezug auf den Schnittpunkt zentrisch-symmetrisch ist, also zur Deckung kommt durch Drehung um 180°, aber auch um 90° und um 45°.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Ausführung dieser Umdrehungen.

Aufgabe 62. Es sei das Symmetriezentrum und zwei zentrisch-symmetrische Punkte gegeben. Man zeichne ein beliebiges Dreieck und dazu mittels Verschiebung des Winkelscheits am Lineal allein die zentrisch-symmetrische Figur.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Anwendung der Sätze 23 und 26.

Aufgabe 63. Es sei das Symmetriezentrum und zwei zentrisch-symmetrische Geraden gegeben. Man zeichne ein beliebiges Dreiseit und dazu mittels Lineal allein das zentrisch-symmetrische.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht analog der Auflösung der Aufgabe 47.

Aufgabe 64. Man beweise, dass zwei Richtungen in dieselbe Gerade fallen, welche vom Zentrum aus mit den entgegengesetzten Richtungen zweier zentrisch-symmetrischen Geraden gleiche Winkel bilden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch den Satz, dass durch einen Punkt zu einer Richtung nur eine Parallele existiert.

Aufgabe 65. Es sei gegeben das Symmetriezentrum und zwei zentrisch-symmetrische Geraden. Man beweise,

dass zwei Punkte auf diesen zentrisch-symmetrisch sind, welche gleichen Abstand vom Zentrum haben — wenn ihre Abstandsstrecken mit entgegengesetzter Richtung der Parallelen beide spitze oder beide stumpfe Winkel bilden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist durch Umdrehung um das Zentrum zu bewerkstelligen.

Aufgabe 66. Es seien zwei Parallelen gegeben. Man soll durch einen Punkt P auf einer derselben zu einer beliebigen dritten Geraden eine Parallele zeichnen unter Benützung des Massstabes.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Anwendung des Satzes 23.

Aufgabe 67. Eine Linie sei durch einen darübergelegten Papierstreifen teilweise verdeckt. Man soll über diesen Streifen von einem gegebenen Punkte seines Randes aus eine Linie ziehen, welche über den Mittelpunkt der verdeckten Strecke geht.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Anwendung des Satzes 30.

Aufgabe 68. Man soll zwischen zwei gegebene Parallelen eine gegebene Strecke so einlegen, dass ihr Mittelpunkt auf einen bestimmten Punkt der Mittelparallelen fällt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 55.

Aufgabe 69. Es sei gegeben das Symmetriezentrum und zwei zentrisch-symmetrische Punkte. Man schneide eine beliebig gegebene Gerade durch drei Parallelen durch diese Punkte und beweise, dass dadurch zwei gleichlange Strecken auf ihr ausgeschnitten werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist mittels Satz 31 zu bewerkstelligen.

Aufgabe 70. Es seien zwei Parallelen nebst der Mittelparallelen gegeben. Man suche zu einem Punkt der einen Parallelen einen solchen, der von einem gegebenen Punkte der Mittelparallelen gleichen Abstand hat.

Andeutung. Man verwende den Satz 23.

Aufgabe 71. Von einer Reihe von Transversalen über zwei Parallelen kennt man den Mittelpunkt von einer; es werden die Mittelpunkte der andern gesucht.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Anwendung des Satzes 31.

Aufgabe 72. Man kennt den Mittelpunkt einer Transversalen zweier Parallelen. Es soll deren Mittelparallele konstruiert werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 73. Zwischen zwei Schienen soll eine Kugel so geführt werden, dass sie immer in gerader Linie auf der Mittelparallelen der Schienen rolle.

Andeutung. Man verwende den Satz 31a.

Aufgabe 74. Es soll durch einen gegebenen Punkt P zwischen zwei Parallelen eine Transversale durch diese gezogen werden, so dass ihre Länge zwischen den Parallelen gleich einer vorhandenen transversalen Strecke wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht mittels Anwendung des Satzes 32.

Aufgabe 75. Es seien zwei Parallelen, ein Punkt ausserhalb derselben, und eine Strecke s gegeben. Man soll durch P eine Transversale ziehen, deren Strecke zwischen den Parallelen gleich der gegebenen Strecke s werde.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe und Aufgabe 55.

Aufgabe 76. Ein Schiffsmann stemmt seine Stange ans Ufer, um sein Schiff weiterzutreiben. Welche Bahn beschreibt dieses?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht mittels Anwendung des Satzes 32a.

Aufgabe 77. Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Länge des über Telegraphenstangen laufenden Drahtes gleichlang sei mit der zwischen je zwei Stangen am Boden gemessenen Strecke und dem Boden parallel sei?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Satz 32a.

Aufgabe 78. Welche Deckungen finden statt, wenn man bei den Figuren 52 bis 58 des zweiten Teiles dieses Lehrbuches um den Mittelpunkt der Zentralen der beiden Winkelscheitel um 180° umdreht?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 58.

Aufgabe 79. Welche Ortsveränderungen wären bei den Figuren 59 bis 61 des zweiten Teiles dieses Lehrbuches erforderlich, um die gleichen Winkel zur Deckung zu bringen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 58 bis 60.

Aufgabe 80. Zwei beliebige Punkte und eine Gerade seien gegeben. Man soll auf der Geraden einen Umdrehungspunkt suchen, um welchen der eine Punkt durch Drehung auf den andern gebracht werden kann.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Satz 33 und ist analog der Auflösung der Aufgabe 14.

Aufgabe 81. Es seien gegeben zwei gleiche Strecken und der Umdrehungsmittelpunkt derselben. Man soll, ohne auf diesen Strecken zu messen, Punkte auf ihnen finden, welche gleichen Abstand von ihren entsprechenden Endpunkten haben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 58.

Aufgabe 82. Es liege eine Strecke gezeichnet vor und von einer gleichgrossen zweiten Anfangspunkt und Richtung. Der Endpunkt dieser zweiten fällt aber ausserhalb des verfügbaren Papierblattes. Man soll den Umdrehungsmittelpunkt suchen, um welchen die eine Strecke als ganze durch Drehung auf die andere gebracht werden kann.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 58 bis 60.

Aufgabe 83. Man beweise, dass bei mehrfachen Drehungen einer Geraden um einen ausserhalb derselben liegenden Punkt der Winkel der ersten und letzten Richtung derselben gleich ist der Summe der Winkel je zweier aufeinander folgenden Richtungen derselben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Anwendung des Satzes 37.

Aufgabe 84. Es seien vier Punkte gegeben, $ABCD$, deren zwei Paare im gleichen Abstand von einander $AB = CD$. Man sucht einen Winkelscheitel S, von welchem aus die Richtungen nach A und C denselben Winkel bilden, wie diejenigen nach C und D.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 59.

4) Aufgaben über die Verschiebung.

(Zu Abschnitt B 4.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 85. Man soll die gezeichnet vorliegende Figur eines Dreiecks oder Vierecks u. s. w. um eine gegebene Länge l parallel einer gegebenen Geraden verschieben.

Erkl. 510. Dasselbe Verfahren, welches in Figur 207 mit dem Viereck $A_1B_1C_1D_1$ vorgenommen wurde, ist in Figur 6 dargestellt für eine aus Dreieck und Kreisbogen zusammengesetzte Figur und ist in den Untersuchungen des Abschnittes C 1 e, welche zur Aufstellung der Kongruenzsätze für das Dreieck führten, jeweils für das aus bestimmten Stücken konstruierte Dreieck ausgeführt worden.

Auflösung. Um zu einem Punkte der Figur den entsprechenden zu erhalten, zieht man durch denselben parallel der gegebenen Leitlinie eine Gerade und trägt darauf die gegebene Länge l der Verschiebung ab. Der Endpunkt dieser Strecke ist seine neue Lage. Geschieht dasselbe mit sämtlichen Punkten der Figur, so entsteht durch Verbindung der sämtlichen Endpunkte der zur Leitlinie parallelen und der Verschiebungsgrösse l gleichen Strecken die neue Lage der ganzen Figur. Darin sind nach Satz 32 und 32a sämtliche Strecken den entsprechenden

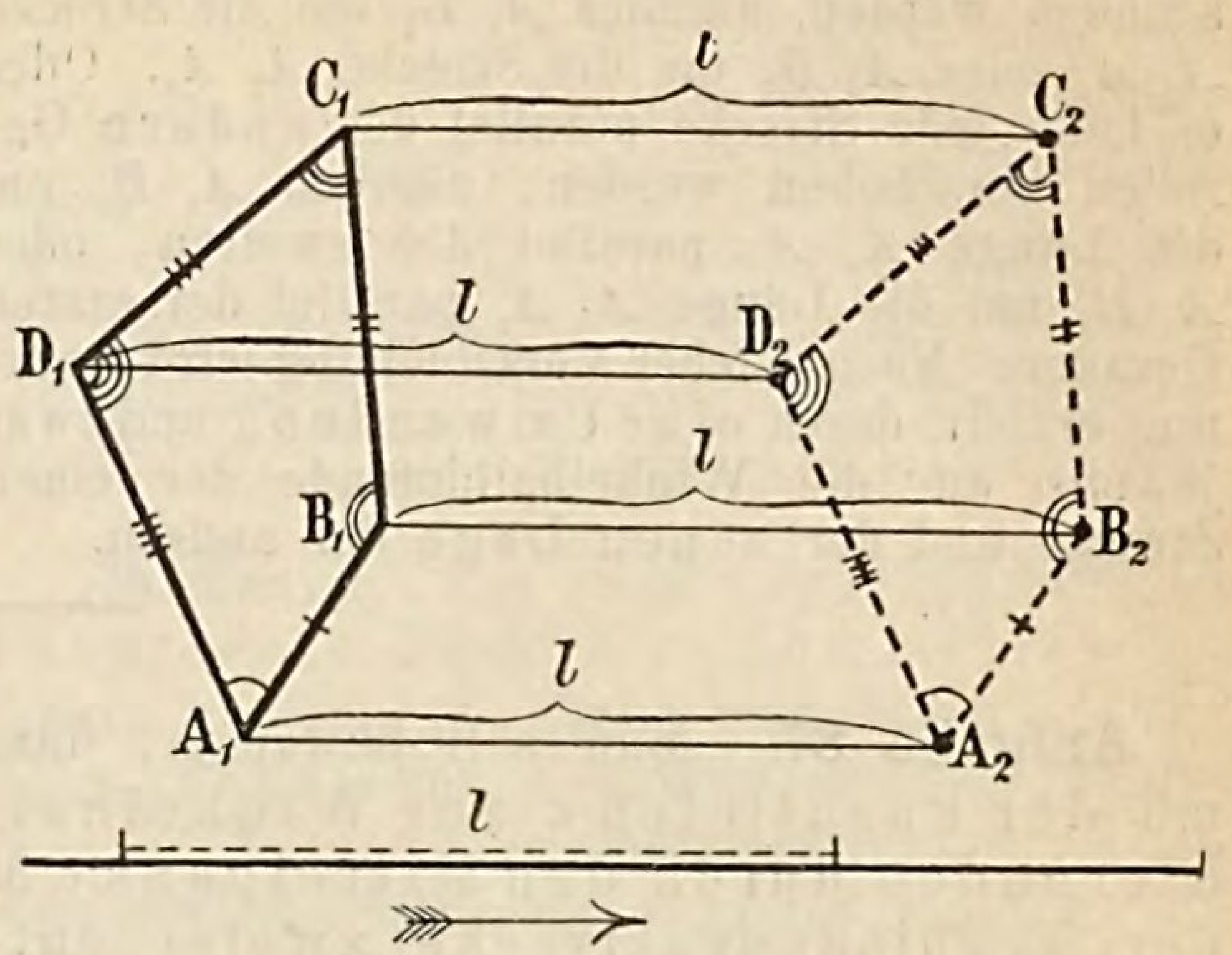
Erkl. 511. Statt zu jedem einzelnen Punkte den entsprechenden zu suchen und diesen zu verbinden, kann man auch bloss durch jeden Punkt die Parallele zu l ziehen, dann zu einem einzigen Punkte A_1 den entsprechenden A_2 durch Abtragung der Länge l konstruieren und von da aus durch die Parallelen $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ und $A_2D_2 \parallel A_1D_1$ die Punkte B_2 und D_2, und endlich durch die Parallelen $B_2C_2 \parallel B_1C_1$ oder $D_2C_2 \parallel D_1C_1$ den Punkt C_2 erhalten als Schnittpunkte mit den durch B_1, D_1 und C_1 gezogenen Parallelen.

Ferner könnte man auch überhaupt nur durch einen einzelnen der Punkte $A_1B_1C_1D_1$ die Parallele zu l von der Länge l ziehen, dann von dem so erhaltenen Punkte A_2 aus die Parallelen zu den jeweils benachbarten Geraden der ersten Figur ziehen, und auf diesen die Strecken $A_2B_2 = A_1B_1$ und $A_2D_2 = A_1D_1$ abtragen, um die Punkte der zweiten Figur zu erhalten.

Und endlich kann die zweite Figur erhalten werden durch beliebige Zusammenstellungen der in der nebenstehenden Auflösung der Aufgabe oder der im Vorigen angegebenen beiden Erzeugungsarten der entsprechenden Punkte und Geraden.

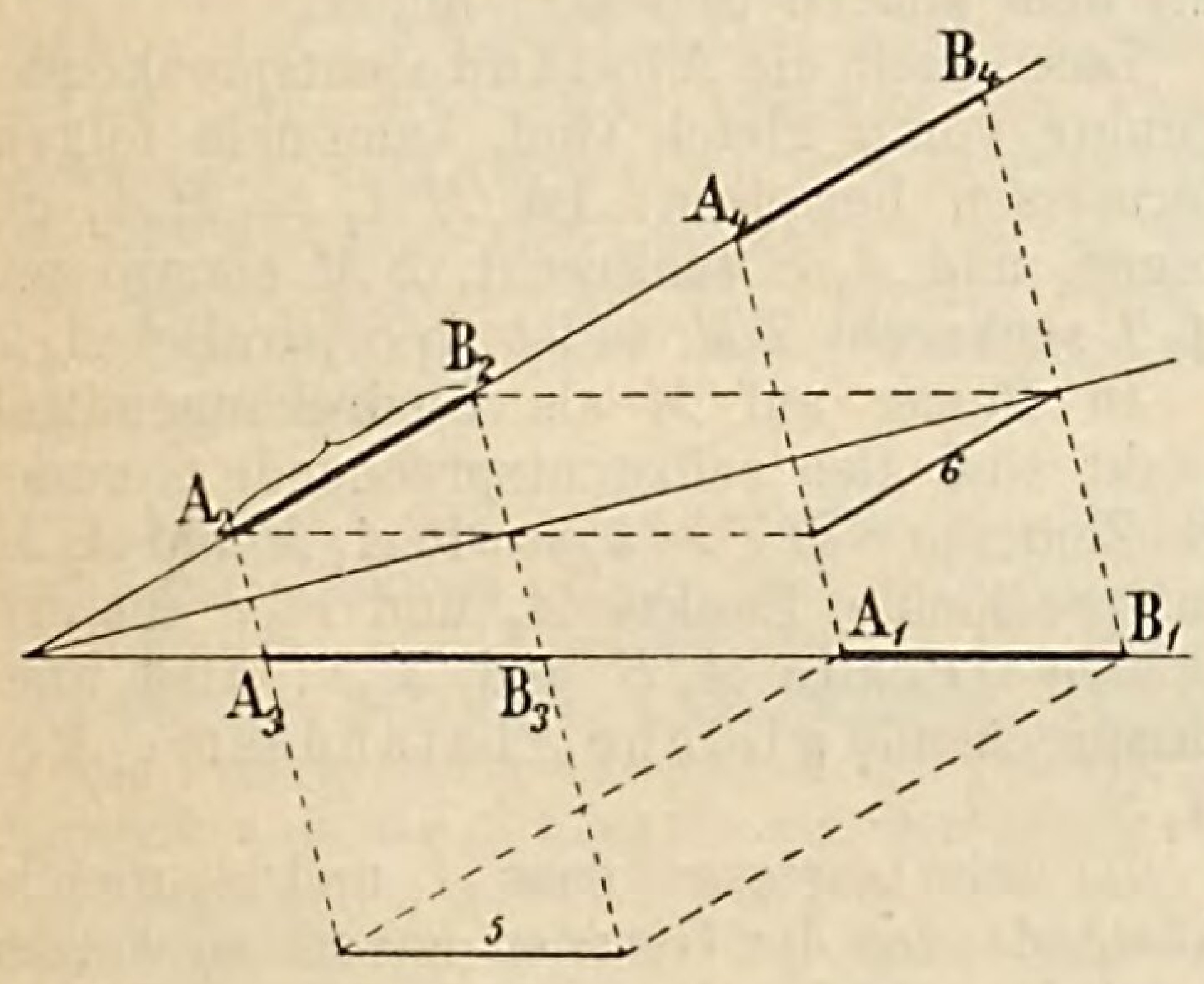
Strecken der ursprünglichen Figur parallel und gleichgross und ihre Winkel gleich, weil diese Strecken die Endpunkte der unter sich gleichen und parallelen einzelnen Verschiebungsstrecken sind, und weil nach Satz 33 des zweiten Teiles die Winkel paralleler Geraden auch gleichgross sind. Also ist die neue Figur als ganze mit der alten kongruent.

Figur 207.



Aufgabe 86. Es sind zwei gleichgrosse Strecken gegeben und sollen zur Deckung gebracht werden durch Verschiebung und Umwendung ohne Umdrehung.

Figur 208.



Erkl. 512. Nach Satz 13 kommen zwei Gerade als Ganze zur Deckung durch Umwendung um eine ihrer Winkelhalbierenden, zwei Punkte derselben aber kommen nur zur Deckung, wenn ihre Abstände von der Symmetrieachse gleichgross sind. Solange also A_1 und B_1 verschieden grosse Abstände von der Winkelhalbierenden haben als A_2 und B_2, ist nach der Umwendung noch eine Verschiebung nötig.

Auflösung. Zwei gegebene gleichgrosse Strecken kommen nicht zur Deckung, wenn man um die Winkelhalbierende ihrer Geraden umwendet, wohl aber kommen sie dadurch auf die gleiche gerade Linie zu liegen z. B. in Figur 208 A_2B_2 als A_3B_3 auf dieselbe Gerade mit der gleichgrossen Strecke A_1B_1. Um alsdann die beiden Strecken A_3B_3 und A_1B_1 auch zur Deckung zu bringen, verschiebt man entweder A_1B_1 längs der die beiden Strecken A_3B_3 und A_1B_1 enthaltenden Geraden um die Strecke $A_1A_3 = B_1B_3$ gegen den Schnittpunkt hin oder A_3B_3 auf derselben Geraden um dieselbe Strecke vom Schnittpunkte fort (siehe Figur 208).

Man kann auch vor der Umwendung A_1B_1 oder A_2B_2 ebenso verschieben und erreicht dadurch, dass bei der Umwendung selbst schon Deckung erzielt wird. Um aber die Strecke der Verschiebung zu kennen, muss man die Senkrechten auf die Winkelhalbierenden konstruieren, denn die Abstände ihrer Schnittpunkte von den entsprechenden Punkten der kongruenten Strecke ergeben die Verschiebungsgrösse.

So ist in Figur 208 jede der Strecken A_2A_3, B_2B_3, A_1A_4, B_1B_4 senkrecht zur

Erkl. 513. Wird erst umgewendet und dann verschoben, so kann sowohl $A_2 B_2$ auf die Gerade von $A_1 B_1$ gebracht werden und dann längs dieser ersten Geraden um $A_1 A_3$ verschoben werden, oder es kann auch $A_1 B_1$ auf die zweite Gerade hinübergeklappt werden und dann längs dieser zweiten Geraden verschoben werden um eine Strecke $A_4 A_2$.

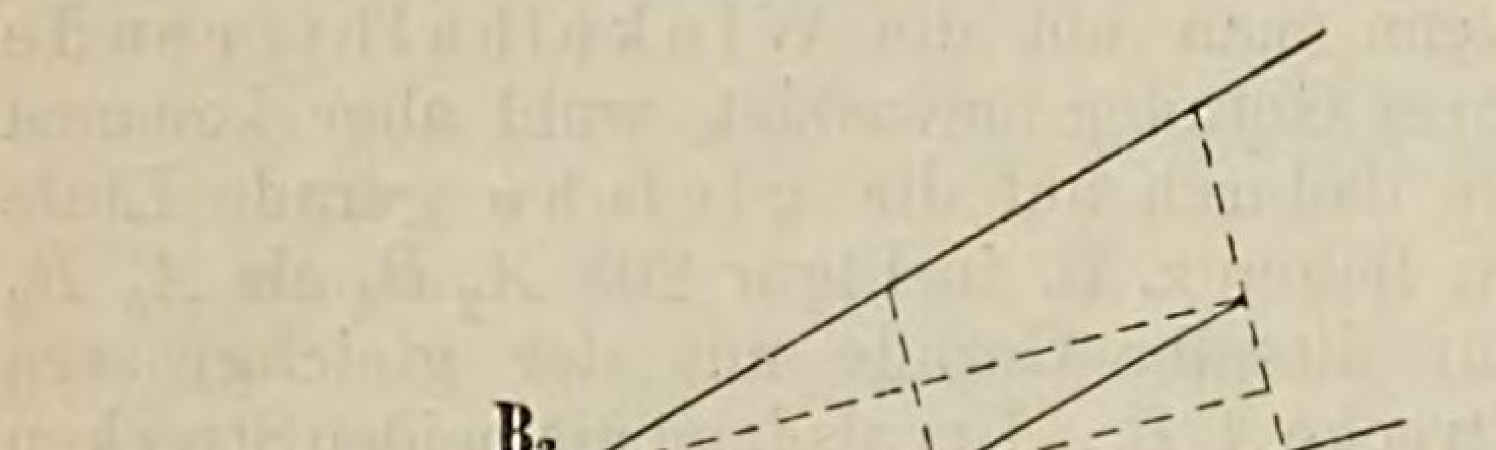
Erkl. 514. Soll erst verschoben und dann umgewendet werden, so kann wieder entweder jede Strecke auf ihrer eigenen Geraden verschoben werden, nämlich $A_1 B_1$ um die Strecke $A_1 A_3$ oder $A_2 B_2$ um die Strecke $A_2 A_4$. Oder es kann jede Strecke parallel der andern Geraden verschoben werden, nämlich $A_1 B_1$ um die Länge $A_4 A_2$ parallel der zweiten, oder $A_2 B_2$ um die Länge $A_3 A_1$ parallel der ersten Geraden. Nach solcher Verschiebung wird Deckung erzielt, durch eine Umwendung und zwar jeweils um die Winkelhalbierende der einen Strecke und der neuen Lage der andern.

Winkelhalbierenden. Und es müsste $A_1 B_1$ gegen den Schnittpunkt hin soweit verschoben werden, bis A_1 und B_1 auf diejenigen Punkte fallen, auf welche durch Umwendung A_2 und B_2 gelangen. Und diese Punkte sind eben A_3 und B_3, nämlich die Schnittpunkte der von A_2 und B_2 auf die Winkelhalbierende als Achse gefällten Achsensenkrechten.

Ebenso wäre $A_2 B_2$ zu verschieben nach $A_4 B_4$, also bis A_2 und B_2 zusammenfallen mit den Punkten A_4 und B_4, nämlich den in Bezug auf die Winkelhalbierende achsigsymmetrischen Punkten von A_1 und B_1.

Anfgabe 87. Man soll beweisen, dass mit der Parallelen a zur Winkelhalbierenden durch den Mittelpunkt M der Verbindungsstrecke zweier entsprechenden Punkte A_1 A_2 die entsprechenden Strecken entgegengesetzt gleiche Winkel und die entsprechenden Punkte entgegengesetzt gleiche Abstände bilden.

Figur 209.



Erkl. 515. Die Gerade a in nebenstehender Auflösung heisst die „Situationsachse" der beiden Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Man kann zwei Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ in achsig-symmetrische Lage zur Situationsachse bringen, wenn man eine derselben verschiebt um die Abstandsstrecke der Fusspunkte S und T der Senkrechten von zwei entsprechenden Punkten auf dieselbe. Sind aber zwei Strecken schon symmetrisch gelegen, so ist ihre Symmetrieachse selbst Situationsachse derselben.

Erkl. 516. Wie für zwei gleiche Strecken, so kann man auch allgemein für zwei ungleichwendig kongruente Figuren eine Gerade finden, mit welcher entsprechende Punkte

Auflösung. Dass die entsprechenden Strecken gleiche Winkel mit jener Geraden a bilden, geht daraus hervor, dass dieselbe der Winkelhalbierenden parallel ist, also korrespondierende gleiche Winkel mit dem andern Schenkel bildet.

Dass auch die Abstände entsprechender Punkte von a gleich sind, kann man folgendermassen beweisen: Ist $MA_1 = MA_2$ gezogen, und $A_1 S$ senkrecht, SM ebenso wie $A_2 T$ senkrecht TM, so ist $A_1 S$ parallel $A_2 T$.

In Bezug auf M als Umdrehungsmittelpunkt sind also selbstentsprechende Geraden die Zentrale $SMT = a$, sowie $A_1 M$ und $A_2 M$; entsprechende Punkte A_1 und A_2, entsprechende Gerade $A_1 S$ und $A_2 T$; also auch entsprechende gleiche Abstandsstrecken $A_1 S = A_2 T$.

Ist aber bewiesen, dass A_1 und A_2 gleiche Abstände von der Geraden haben, so werden durch Verschiebung um die Strecke ST längs der Geraden a die Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ achsig-symmetrisch zu Achse a, also haben alle ihre Punkte gleiche Abstände von a.

Diese sogenannte Situationsachse SMT der zwei ungleichwendig kongruenten Figuren $A_1 B_1 S$ und $B_2 A_2 T$ ist das dualistische Gegenstück zu dem Umdrehungsmittelpunkte O zweier gleichwendig kongruenten Figuren, wie $A_1 B_1 C_1$

und Geraden entgegengesetzt gleiche Abstände bilden. Dieselbe heisst wieder Situationsachse beider Figuren und ist die Parallele zur Winkelhalbierenden irgend zweier entsprechenden Geraden durch den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke irgend zweier entsprechenden Punkte. Dies geht aus dem nebenstehenden einfach dadurch hervor, dass man in A_1 und A_2 bezw. in B_1 und B_2 gegenwendig gleiche benachbarte Winkel mit gleichen Schenkeln anträgt. Solche kommen dann gleichzeitig zur Deckung, wenn durch Verschiebung parallel der Situationsachse und Umwendung um dieselbe bloss die Anfangsstrecken A_1B_1 und A_2B_2 zur Deckung gebracht werden.

und $A_2B_2C_2$ in Figur 204. Denn beidemale haben vom Punkte bezw. von der Achse sowohl entsprechende Punkte als auch entsprechende Geraden gleichgrosse Abstände (vergl. Erkl. 435).

Aufgabe 88. Man soll zwei ungleichwendig kongruente Figuren $A_1B_1C_1D_1\cdot\cdot$ und $A_2B_2C_2D_2\cdot\cdot$ durch eine Parallelverschiebung in achsig-symmetrische Lage bringen.

Erkl. 517. Wie für den Umdrehungsmittelpunkt, so lassen sich auch für die Situationsachse eine Reihe von Beziehungen der entsprechenden Punkte und Geraden beider Figuren unter sich und zur Situationsachse aufstellen. So kann man in Figur 209 erkennen, dass die Situationsachse auch erhalten würde als Gerade durch den Mittelpunkt der Strecke B_1B_2. Daher liegen auf der Situationsachse die Mittelpunkte sämtlicher Verbindungsstrecken entsprechender Punktepaare, jede solche schneidet die Achse im Mittelpunkt M der Strecke ST zwischen den Fusspunkten der von ihren verbundenen Punkten auf die Situationsachse gefällten Senkrechten. Die Strecken zwischen den Fusspunkten der Senkrechten von je zwei entsprechenden Punkten sind sämtlich gleichlang und sind auch gleich den Strecken zwischen den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinien mit der Situationsachse.

Erkl. 518. Auch ohne besondere Erwähnung der Situationsachse lassen sich allgemeine Sätze aus dem vorigen ableiten, z. B.: Wählt man auf den Schenkeln eines Winkels zwei beliebige Punkte und trägt von diesen aus gleiche Strecken auf den Schenkeln ab, so liegen die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken sämtlicher Endpunktepaare auf einer geraden Linie, nämlich einer Parallelen zur Winkelhalbierenden.

Auflösung. Um zwei ungleichwendig kongruente Figuren in symmetrische Lage zu bringen, suche man deren Situationsachse auf, d. h. man ziehe durch die Mitte M der Verbindungsstrecke zweier entsprechenden Punkte A_1 und A_2 eine Parallele zur Halbierungslinie des Winkels der entsprechenden Geraden A_1B_1 und A_2B_2. Auf diese Gerade fälle man von A_1 und A_2 die senkrechten Strecken A_1S und A_2T und verschiebe alsdann parallel denselben Geraden entweder die Figur $A_1B_1C_1D_1$ um die Strecke ST oder die Figur $A_2B_2C_2D_2$ um die Strecke TS. Dadurch fallen die Senkrechten A_2T und A_1S in die gleiche Achsensenkrechte, werden also selbstentsprechende Geraden. Da sodann nach der Auflösung der vorigen Aufgabe auch die Strecken A_1S und A_2T gleich lang sind, so fallen A_1 und A_2 auf symmetrische Punkte, A_1B_1 und A_2B_2 auf symmetrische Geraden, also werden wegen der Gleichheit je zweier benachbarten Winkel und Strecken auch die sämtlichen Punkte und Geraden der beiden Figuren $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ achsig-symmetrisch zu der Situationsachse als Symmetrieachse.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 89. Welche Bahn beschreibt ein beliebiger Punkt eines Winkelscheits oder eines Hobels, wenn dieses Instrument über eine Fläche hingeschoben wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Anwendung des Satzes 42a.

Aufgabe 90. Welche Bewegung müsste ein Körper innerhalb eines Eisenbahnwagens machen, um trotz der Wagenbewegung am gleichen Ort im Raume zu bleiben?

Andeutung. Man beachte die Bahn des Wagens selbst.

Aufgabe 91. Warum darf bei einer Maschine die Kolbenstange nicht unmittelbar mit der Kurbelstange verbunden werden?

Andeutung. Man berücksichtige Erkl. 101.

Aufgabe 92. Man beweise, dass das gleiche geometrische Gebilde erhalten wird, wenn man eine Verschiebung längs einer Leitlinie ausführt, oder wenn man um diese als Achse umklappt, drüben ebensoweit verschiebt, und dann wieder herüberklappt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 88.

Aufgabe 93. Ein um eine Achse drehbarer und längs derselben verschiebbarer flacher Körper, etwa eine Windfahne, soll in die achsig-symmetrische Lage gebracht werden. Der unmittelbaren Umwendung um die Achse steht aber ein Hindernis im Wege. Wie kann man verfahren, um den Körper doch in die gewünschte Lage zu verbringen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 94. Ein aus parallelen Stäben bestehendes Gitter wird längs eines dieser Stäbe auf- und abgeschoben um eine bestimmte Strecke. Wie kann die Bewegung gleichmässig erhalten werden, wenn gerade der Leitstab ausgebrochen werden muss?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht unter Berücksichtigung des Satzes 42b.

Aufgabe 95. Man beweise, dass man statt zwei getrennte Figuren in paralleler Richtung gleich weite Verschiebung machen zu lassen, auch die beiden durch eine Verbindungslinie zu einer Gesamtfigur festverbinden kann und dann die eine von beiden die gleiche Bewegung ausführen lassen kann.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 96. Man beweise, dass eine Lage, die eine Figur durch mehrfache Verschiebungen erhält, auch durch eine einzige Verschiebung erlangt werden könnte.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Sätze 42 und 41a.

Aufgabe 97. Ein Reisender sieht durch das Fenster des Eisenbahnwagens die senkrecht niederfallenden Regentropfen. Welchen Weg werden sie ihm zu durchfallen scheinen, wenn sich der Zug bewegt?

Andeutung. Man berücksichtige, dass die Punkte einer senkrechten Linie über das Fenster herab während des Falles der Tropfen von der Stelle rücken.

Aufgabe 98. Wie erscheint die Bewegung eines Eisenbahnwagens von Punkten aus gesehen, welche verschieden weit von demselben entfernt sind? Und wie erscheinen dabei umgekehrt die näher und weiter entfernten Gegenstände dem im Wagen fahrenden sich zu bewegen?

Andeutung. Man beobachte, wie gross die Winkel sind, welche eine Gesichtslinie beschreiben muss, die einen bestimmten Punkt des Wagens bezw. umgekehrt eines Gegenstandes im Auge behalten will.

B. Aufgaben über das Dreieck.

1) Aufgaben über die Seiten, Winkel und Höhen des allgemeinen Dreiecks.

(Zu Abschnitt C 1, a u. b.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 99. Man soll die Grenzen angeben, zwischen welchen die dritte Seite eines Dreiecks liegen muss, dessen erste beiden Seiten sind

a) 3 und 17; b) 15 und 30; c) 1 und 10
d) 4 und 5; e) n und m, wobei $n < m$.

Erkl. 519. Bis an Null herunter kann die dritte Seite nur kommen bei zwei gleichen Seiten. Denn nur dann ist die Differenz dieser gleichen Seiten gleich Null (vergl. Erkl. 176 für das gleichschenklige Dreieck).

Auflösung. Nach Satz 49 muss die dritte Seite liegen zwischen der Summe und der Differenz der zwei ersten Seiten, also muss in nebenstehenden Fällen die dritte Seite liegen (und zwar über der Differenz und unter der Summe):

a) zwischen 14 und 20 e) zwischen 15 und 45
c) zwischen 9 und 11 d) zwischen 1 und 9
e) zwischen $m - n$ und $m + n$.

Aufgabe 100. Man soll beweisen, dass eine Seite eines Dreiecks stets kleiner ist, als die halbe Summe aller drei Seiten.

Erkl. 520. Ebenso erhält man aus den Ungleichungen

$$\begin{array}{l} b < a + c \\ b = b \\ \hline 2b < a + b + c \end{array} \qquad \begin{array}{l} c < a + b \\ c = c \\ \hline c < a + b + c \end{array}$$

$$b < \frac{a + b + c}{2} > c$$

Auflösung. Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung des Satzes 49

$$a < b + c$$

die Gleichung $a = a$,

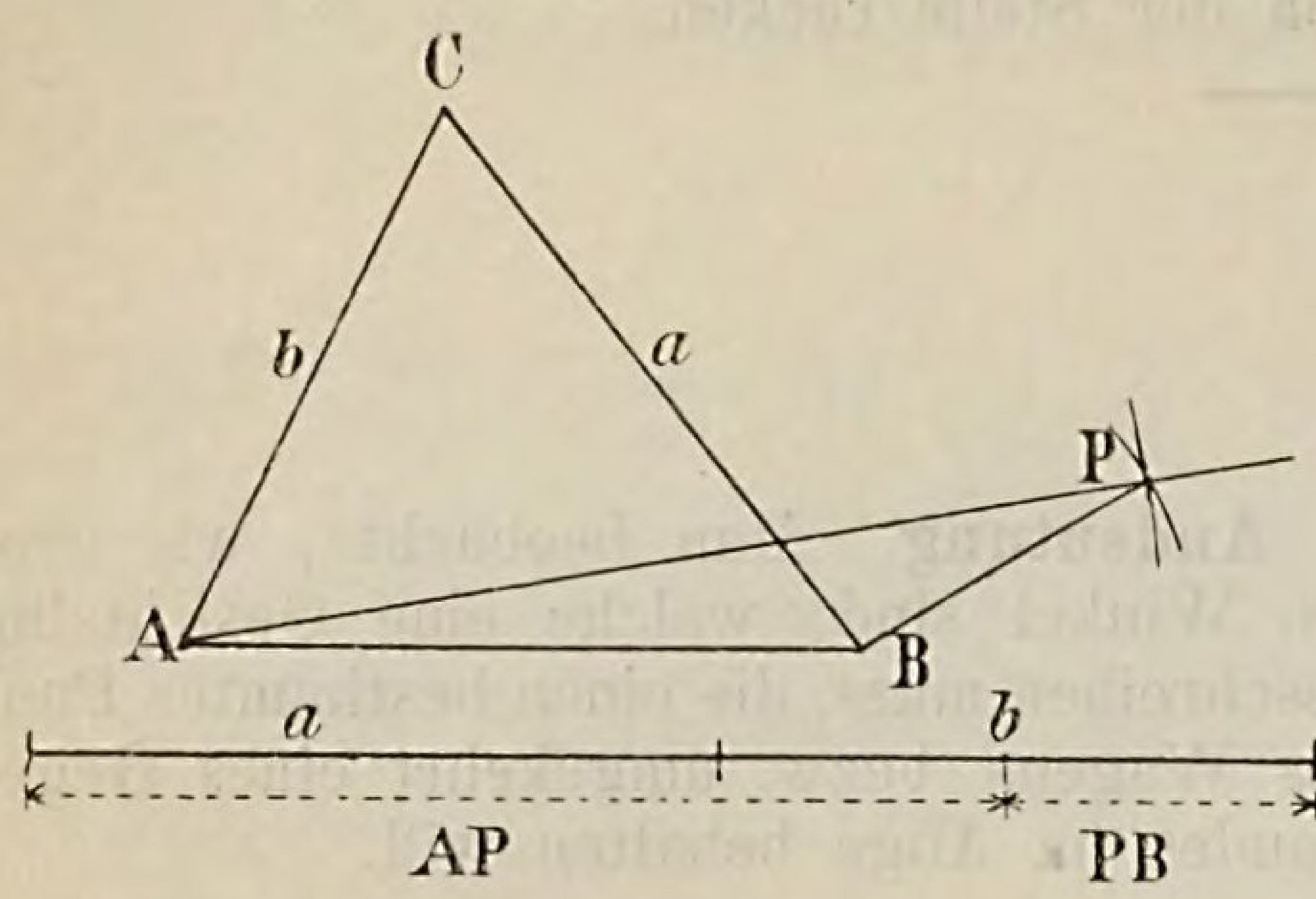
so folgt $2a < a + b + c$,

also nach Division mit 2:

$$a < \frac{a + b + c}{2}$$

Aufgabe 101. In einem Aussenwinkelraum eines Dreiecks soll ein Grenzpunkt angegeben werden für Punkte, deren Abstand von zwei Ecken kleiner oder grösser ist als die Summe der beiden andern Seiten.

Figur 210.

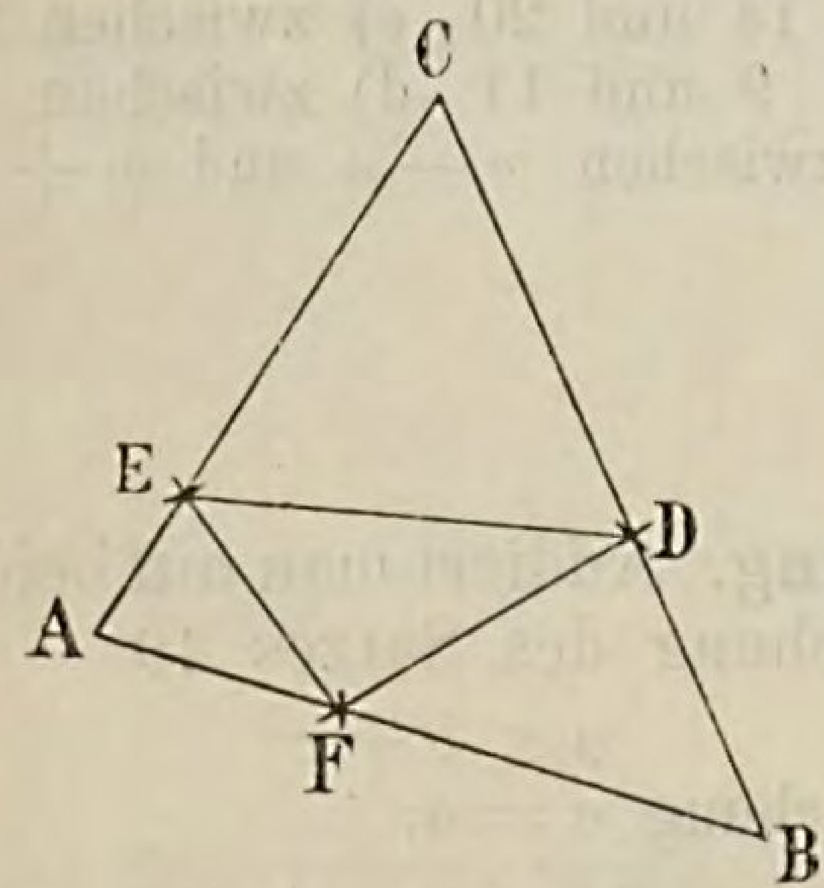


Erkl. 521. In Figur 210 ist die Strecke $a+b$ unterhalb der Grundseite C angegeben und zugleich die Wahl der Stücke AP und BP auf derselben angedeutet. Wie im Aussenwinkelraum über BC, hätte dieselbe Konstruktion auch in demjenigen über AC oder unterhalb AB stattfinden können. Zeichnet man viele derartige Punkte P, für welche $AP+BP = a+b$ ist, so bilden dieselben eine krumme Linie, welche Ellipse heisst; und alle Punkte innerhalb dieser Kurve haben eine kleinere, alle Punkte ausserhalb derselben eine grössere Abstandssumme von A und B, als der Punkt C des Dreiecks.

Auflösung. Sind A, B, C die drei Ecken, a, b, c die drei Seiten des Dreiecks, so zeichne man eine Strecke gleich der Seitensumme $a+b$, teile dieselbe in zwei beliebige Teile, beschreibe um A und B Kreisbogen mit den Teilen als Radien, und verbinde den Schnittpunkt P mit A und B (siehe Figur 210). Dann ist $AP+PB=a+b$, also ist für jeden Punkt auf der Strecke AP oder BP oder zwischen diesen beiden nach Satz 51 die Abstandssumme von A und B kleiner als $a+b$, aber für jeden Punkt auf der Verlängerung von AP oder von BP oder zwischen beiden Verlängerungen grösser als $a+b$.

Aufgabe 102. Man soll aus drei Punkten, welche auf den Seiten eines Dreiecks liegen, ein neues Dreieck bilden und dessen Umfang mit dem des ursprünglichen Dreiecks vergleichen.

Figur 211.



Erkl. 522. Es wird später gezeigt werden können, dass das Dreieck der Höhenfusspunkte eines spitzwinkligen Dreiecks dasjenige dieser Dreiecke ist, dessen Umfang der kleinstmögliche ist.

Auflösung. Sind DEF die Eckpunkte des neuen Dreiecks, so ist jede seiner Seiten zugleich Seite des Dreiecks DEF und eines andern Dreiecks mit einer Spitze des ursprünglichen als Ecke und zwei Seitenabschnitten desselben als Seiten. Wendet man darauf den Satz 49 an, so erhält man:

$$DE < DC + CE$$
$$EF < EA + AF$$
$$FD < FB + BD.$$

Also entsteht durch Addition dieser drei Ungleichungen:

$$DE + EF + FD < DC + (CE + EA) + (AF + FB) + BD < a + b + c.$$

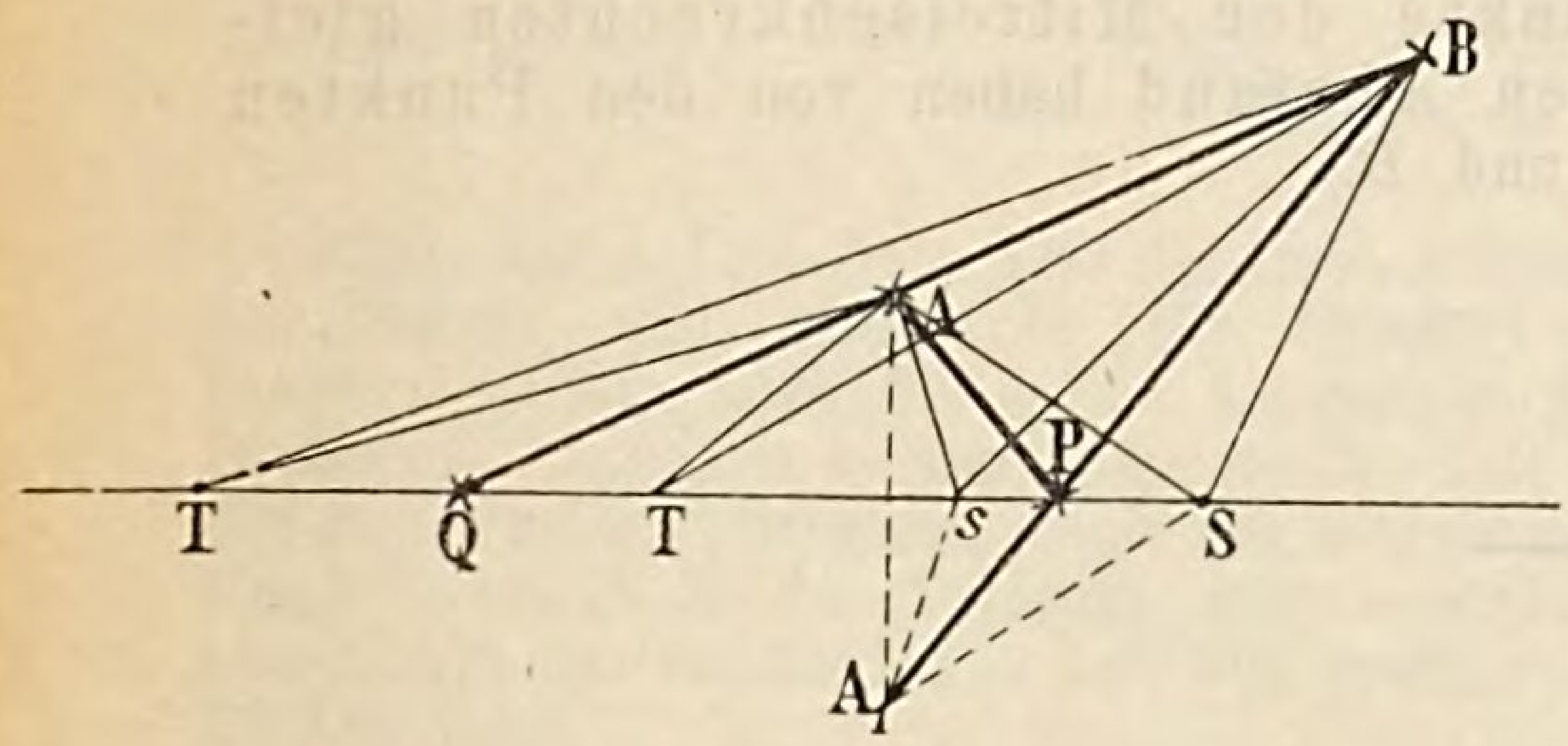
Daher ist der Umfang eines solchen Dreiecks, dessen Eckpunkte selbst auf den Seiten eines andern Dreiecks liegen, stets kleiner als der Umfang jenes Dreiecks.

Erkl. 523. Ein Dreieck und überhaupt eine Figur, deren Eckpunkte auf den Seitenstrecken einer andern liegen, heisst ein dieser Figur eingeschriebenes Dreieck oder eine eingeschriebene Figur, das erstere ein dem zweiten umgeschriebenes Dreieck oder eine umgeschriebene Figur. Man kann also die Aussage machen:

Satz. Der Umfang eines einem Dreieck eingeschriebenen Dreiecks ist kleiner, der Umfang eines umgeschriebenen Dreiecks ist grösser als der Umfang des andern Dreiecks.

Aufgabe 103. Es soll für den in Aufgabe 15 gefundenen Punkt P bewiesen werden, dass er unter allen Punkten der Linie a für zwei Punkte A und B die kleinste Abstandssumme $AP + BP$ hat, dass dagegen Punkt Q die grösste Abstandsdifferenz $BQ - AQ$ hat.

Figur 212.



Erkl. 524. In der Lehre von der Spiegelung des Lichts ist das nebenstehend bewiesene der wichtige Satz, dass die Gesichtslinie vom Auge zum Spiegel und zum gesehenen Gegenstande die kürzeste aller dieser möglichen Linien ist.

Auflösung. Vergleicht man für einen Punkt S neben P (Figur 212) die Abstandssumme von den Punkten A und B, so erhält man wegen der Symmetrie zu a als Achse: $AS + SB = A_1S + SB > A_1B$ (im Dreieck A_1SB), dagegen $AP + PB = A_1P + PB = A_1B$.

Und jeder andere Punkt S bildet ebenfalls ein Dreieck mit grösserer Seitensumme, als A_1B.

Vergleicht man jedoch für einen Punkt T neben Q die Abstandsdifferenz von A und B, so erhält man stets nach Satz 49

$$BT - AT < AB,$$

solange nicht T mit A zusammenfällt, so dass

$$BQ - AQ = AB,$$

als dem grössten Differenzwert wird.

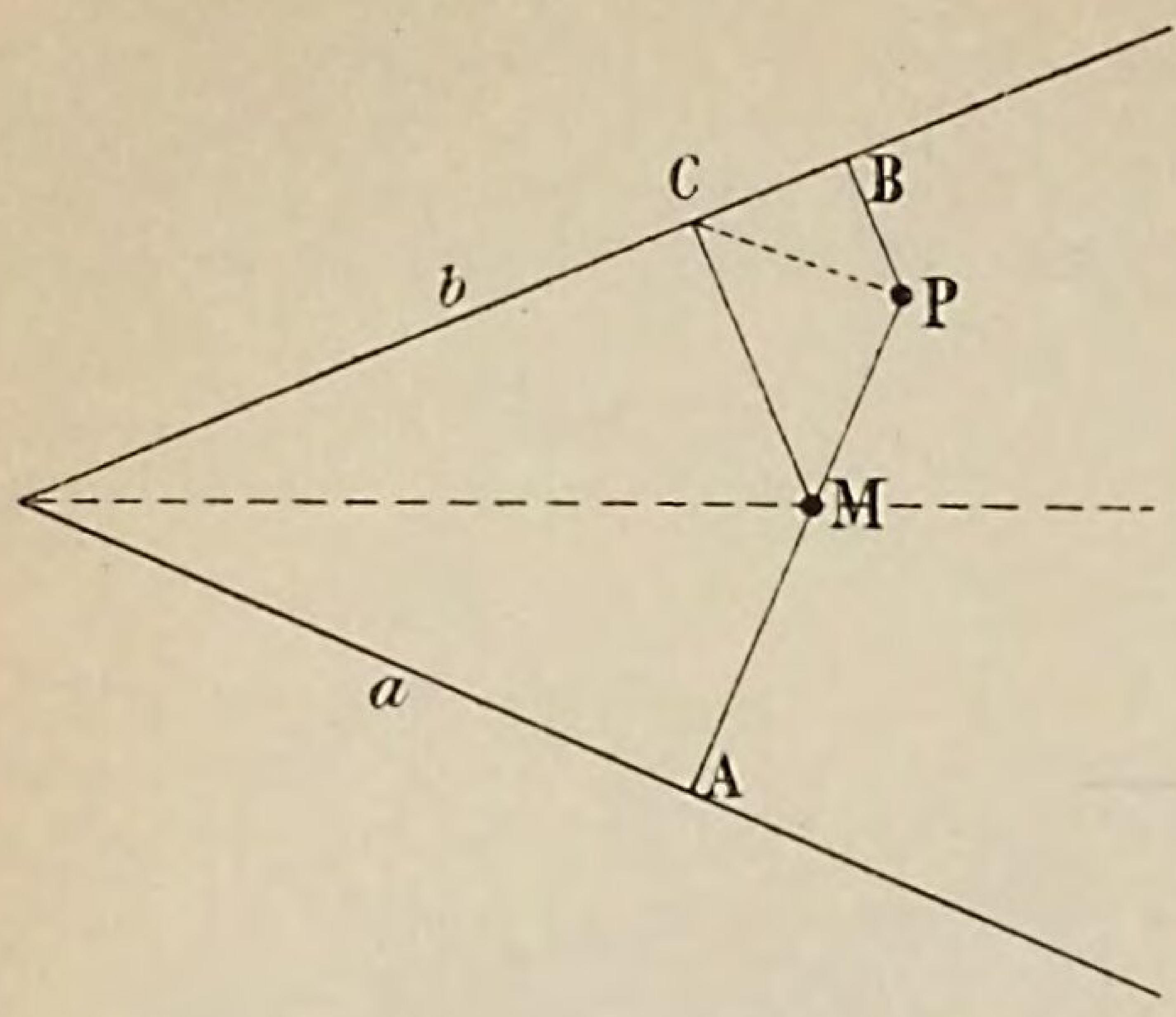
Aufgabe 104. Man soll für einen Winkel die Entfernungen der Punkte in seiner Winkelöffnung von den beiden Schenkeln untersuchen.

Erkl. 525. Dass alle Punkte der Winkelhalbierenden gleichen Abstand von beiden Schenkeln haben, wird später noch zum Gegenstande genauerer Untersuchungen zu machen sein. Man vergleiche den Abschnitt über die geometrischen Oerter im nächsten Teile dieses Lehrbuches.

Auflösung. Zieht man für einen Punkt M auf der Winkelhalbierenden eines Winkels die senkrechten Abstände von den Schenkeln, so fällt beim Umklappen um die Winkelhalbierende der eine Schenkel auf den andern, Punkt M bleibt, so dass eine Senkrechte von M auf den einen Schenkel mit der Senkrechten von M auf den andern Schenkel zur Deckung kommen muss. Also sind für die Punkte der Winkelhalbierenden die Abstände von beiden Schenkeln gleich gross.

Wählt man aber einen nicht auf der Halbierungslinie liegenden Punkt P (s. Fig. 213),

Figur 213.



Erkl. 526. Die vorliegende Aufgabe 104 bildet eine dualistische zur vorhergehenden Aufgabe 103, indem dort der Abstand zweier Punkte A und B von einer Geraden g, hier der Abstand zweier Geraden a und b von einem Punkte P untersucht wurde. Entsprechend dem in Aufgabe 103 ausgesprochenen Satze könnte man die nebenstehenden Ergebnisse auch folgendermassen zusammenfassen:

Für die Punkte der Winkelhalbierenden zweier Geraden hat die Differenz der Abstände von beiden Geraden den kleinsten Wert, nämlich Null, für jeden Punkt ausser der Winkelhalbierenden ist die Abstandsdifferenz grösser.

und zieht seine senkrechten Abstände, so erhält man auf dem Schenkel a einen Fusspunkt A, auf b einen Fusspunkt B, und auf der Halbierungslinie einen Schnittpunkt M, dessen Abstände $MA = MC$ dieselben sind. Verbindet man noch P mit C, so ist $PC > PB$ und $PC < PM + MC$. Also ist der Abstand von P zum Schenkel $a = PA = PM + MA = PM + MC > PC > PB$, oder es ist

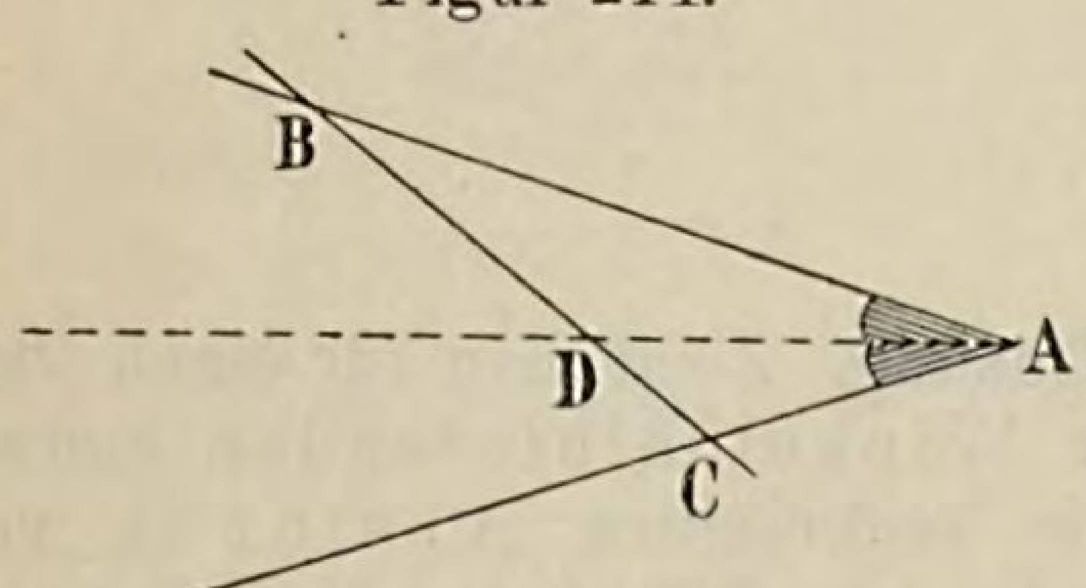
$$PA > PB.$$

Daher ist jeder zwischen einer Geraden und der Winkelhalbierenden ihres Winkels mit einer andern gelegene Punkt näher bei der ersteren, als bei der zweiten Geraden gelegen.

Dagegen hat jeder auf der Winkelhalbierenden zweier Geraden a und b selbst liegende Punkt von diesen beiden Geraden den gleichen Abstand. (Man beachte die dualistische Gegenüberstellung, dass Punkte der Winkelhalbierenden ebenso gleichen Abstand von den Geraden a und b haben, wie die Punkte der Mittelsenkrechten gleichen Abstand haben von den Punkten A und B.)

Aufgabe 105. Es soll bewiesen werden, dass die Halbierungslinie eines Winkels auf jeder Transversalen zwei Stücke abschneidet, die beide kürzer sind, als die angrenzenden von der Transversalen abgeschnittenen Schenkellängen.

Figur 214.



Erkl. 527. Ist die Transversale senkrecht zur Winkelhalbierenden, also jeder Winkel der beiden ein rechter, so sind die Transversalen-Abschnitte gleichgross und es ist die Schenkellänge als Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks wieder grösser als die halbe Grundseite.

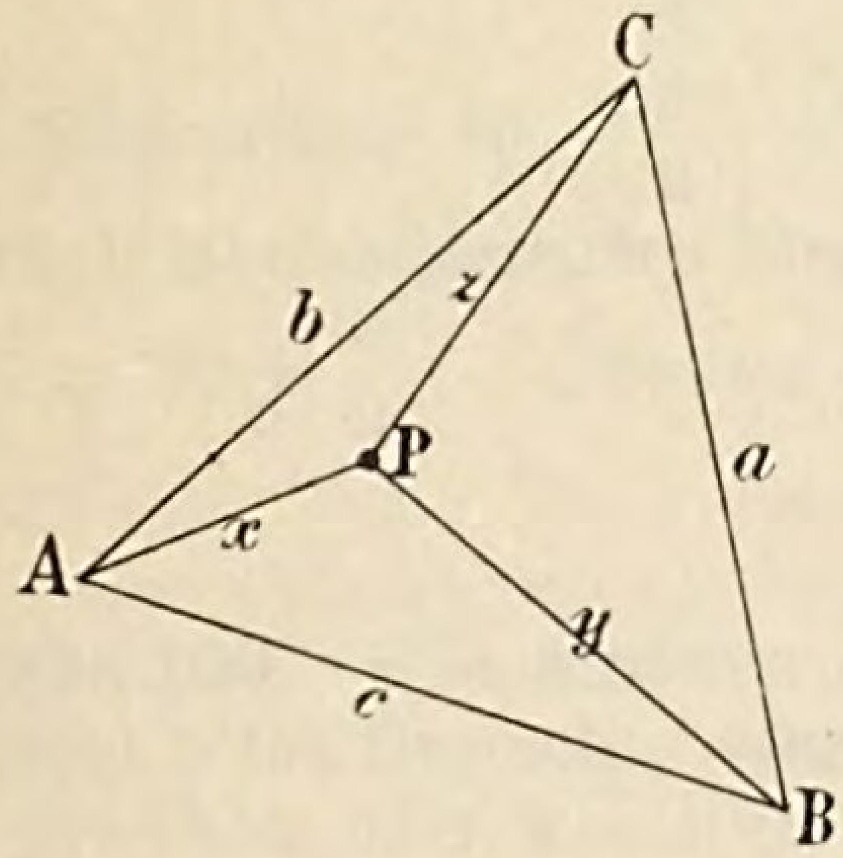
Erkl. 528. Betrachtet man AD als Halbierungslinie des Winkels A im Dreieck ABC,

Auflösung. Betrachtet man die Stücke CD und BD in Figur 214, so bildet jedes dieser Stücke als Grundseite ein Dreieck mit den gleichen Winkelhälften bei A als Winkel an der Spitze. Von diesen beiden Dreiecken hat im Punkte D das eine einen spitzen, das andere einen stumpfen Winkel. Im letzteren ist jedenfalls die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Schenkellänge grösser, als der Abschnitt der Transversalen. Im Dreieck CDA aber ist $\sphericalangle D$ ein spitzer. Als Aussenwinkel des andern Dreiecks ist aber dieser spitze Winkel ADC grösser, als der Winkel BAD, also auch grösser als der dem Winkel BAD gleiche Winkel CAD. Daher ist im Dreieck ACD der $\sphericalangle D$ grösser als $\sphericalangle A$, folglich die dem $\sphericalangle D$ gegenüberliegende Schenkellänge AC auch hier grösser als der Abschnitt CD der Transversalen.

so kann man nach Nebenstehendem aussagen, dass jedes von der Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels auf der gegenüberliegenden Seite abgeschnittene Stück stets kleiner ist als die demselben anliegende Dreiecksseite.

Aufgabe 106. Man verbinde einen beliebigen Punkt im Innern eines Dreiecks mit den drei Eckpunkten und vergleiche die Summe dieser Verbindungsstrecken mit dem Umfang des Dreiecks.

Figur 215.



Erkl. 529. Der erste Teil des nebenstehenden Satzes gilt nicht nur für Punkte im Innern, sondern auch für solche ausserhalb des Dreiecks. Dagegen verliert der zweite Teil in der Regel seine Gültigkeit, sowie der betrachtete Punkt ausserhalb des Dreiecks und besonders ausserhalb der in Erkl. 143 und 521 erwähnten Ellipse liegt.

Auflösung. Bezeichnet man mit x, y, z die nach den Punkten A, B, C führenden Verbindungsstrecken des Punktes P, so hat man nach den Sätzen 49 und 51:

$$c < x + y < b + a$$
$$a < y + z < c + b$$
$$b < z + x < a + c.$$

Also entsteht durch Addition der drei Ungleichungen:

$$a + b + c < 2(x + y + z) < 2(a + b + c),$$

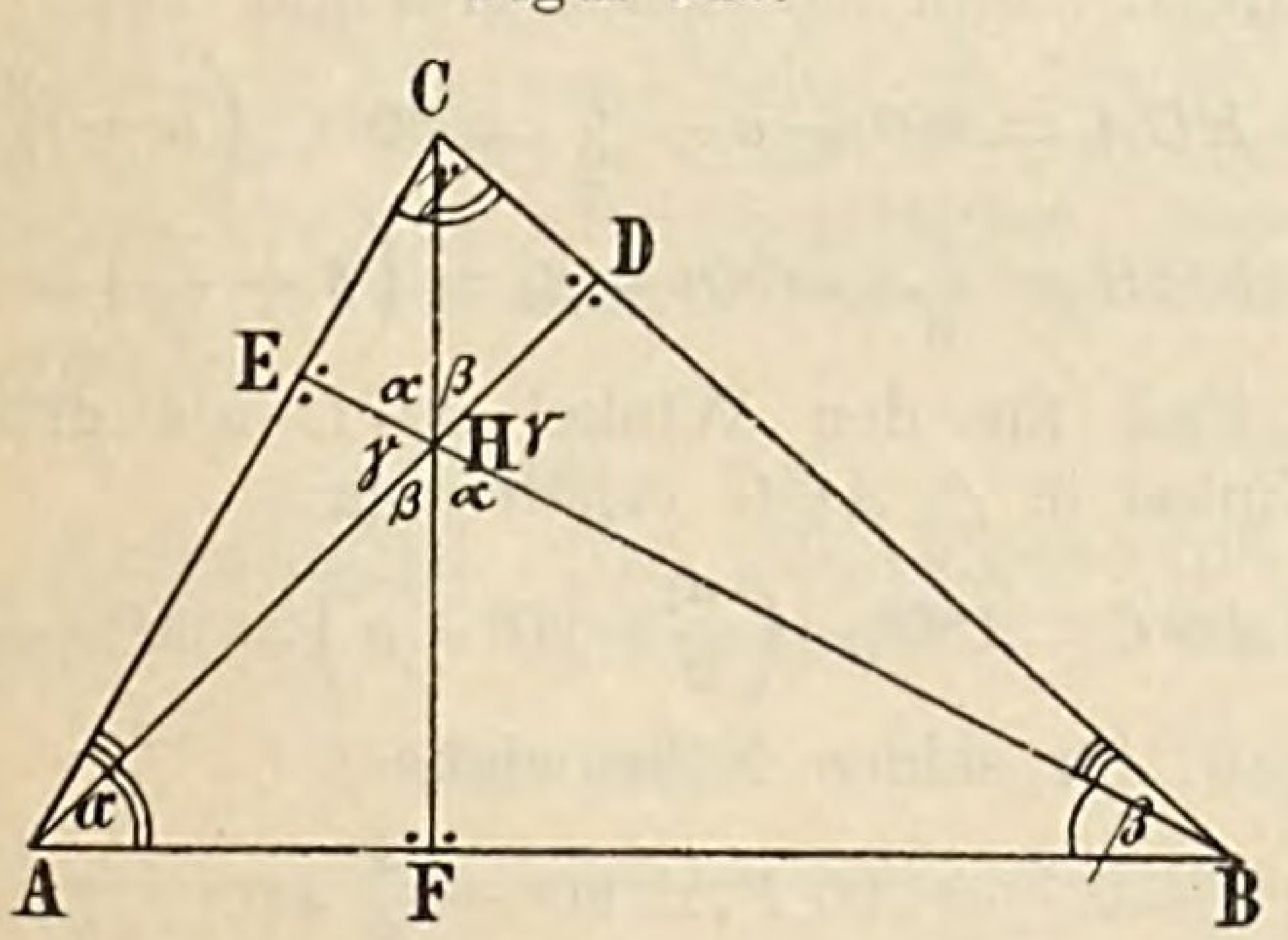
und durch Division mit 2:

$$\frac{a + b + c}{2} < x + y + z < a + b + c.$$

Die Summe der Verbindungsstrecken eines Punktes im Dreieck mit den Eckpunkten ist also grösser als der halbe, aber kleiner als der ganze Umfang des Dreiecks.

Aufgabe 107. Welche Winkel bilden die drei Höhen eines Dreiecks unter sich und mit den Seiten des Dreiecks?

Figur 216.



Erkl. 530. Nach Nebenstehendem teilt jede Höhe ihren Dreieckswinkel in zwei Teile, deren jeder der Komplementwinkel zu dem an der gleichen Seite liegenden Dreieckswinkel ist. Die dreierlei Komplementwinkel bilden

Auflösung. Bezeichnet man mit H den Schnittpunkt der drei Höhen AD, BE, CF eines Dreiecks (siehe Figur 216), so hat man je zwei rechtwinklige Dreiecke mit einem Winkel α (nämlich $\triangle BEA$ und CFA), also zweitem Winkel $= 90^0 - \alpha = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ACF$; und zwei mit einem Winkel β (nämlich $\triangle CFB$ und ADB), also zweitem Winkel $= 90^0 - \beta = \sphericalangle BCF = \sphericalangle BAD$; und endlich zwei mit einem Winkel γ (nämlich $\triangle ADC$ und BEC), also zweitem Winkel $90^0 - \gamma = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE$.

Der Schnittpunkt H der Höhen bildet mit jedem untern Höhenabschnitt und den beiden Abschnitten der zugehörigen Seite wieder ein rechtwinkliges Dreieck, welchem einer der vorigen Komplementwinkel angehört. Also ist der zweite Winkel dieses Dreiecks das Komplement dieses Komplementwinkels, also dem ursprünglichen

zusammen als Summe einen rechten Winkel, nämlich:

$$(90^0 - \alpha) + (90^0 - \beta) + (90^0 - \gamma) = 270^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = 270^0 - 180^0 = 90^0;$$

und je zwei von ihnen ergeben wieder einen Dreieckswinkel, nämlich:

$$(90^0 - \alpha) + (90^0 - \beta) = 180^0 - (\alpha + \beta) = \gamma \cdots$$

Winkel gleich. Daher sind in Figur 216 die Scheitelwinkel:

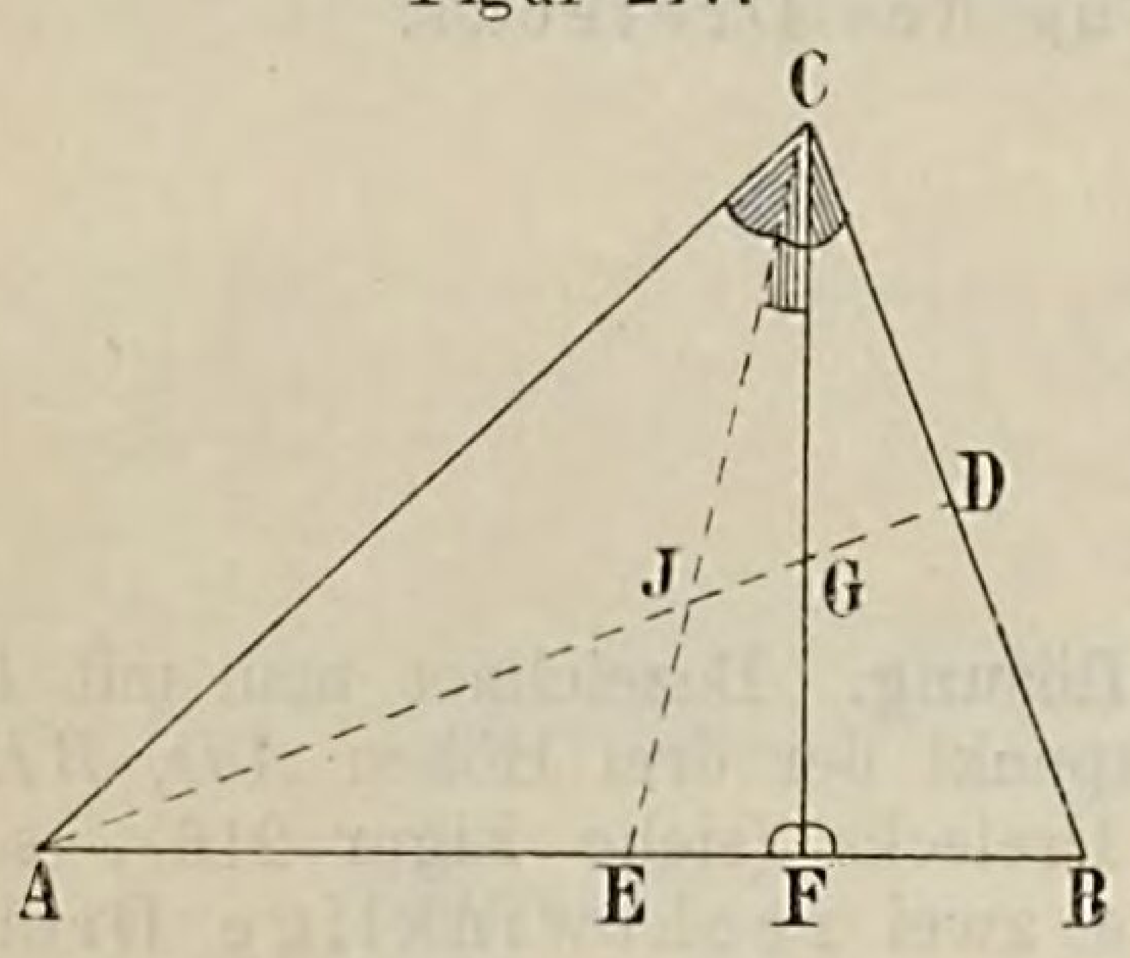
$$BHF = CHE = \alpha$$
$$CHD = AHF = \beta$$
$$AHE = BHD = \gamma.$$

Erkl. 531. Dass alle drei Höhen durch denselben Punkt H gehen müssen, wird erst im nächsten Teile dieses Lehrbuches bewiesen werden. Von den zwei Stücken, welche im Punkte H auf jeder Höhe begrenzt werden, heisst das durch die Ecke gehende der obere, das auf der Seite endigende der untere Höhenabschnitt.

Erkl. 532. Dass am Höhenschnittpunkt H je ein Winkel einem Dreieckswinkel gleich ist, lässt sich auch beweisen aus Lehrsatz 39 des zweiten Teiles, denn die Schenkel je eines solchen von zwei Höhen gebildeten Winkels stehen senkrecht auf den Dreiecksseiten, also den Schenkeln eines Dreieckswinkels.

Aufgabe 108. Welche Winkel bildet eine Höhe eines Dreiecks mit den drei Winkelhalbierenden des Dreiecks?

Figur 217.



Auflösung. Von den Winkelhalbierenden ist eine eine benachbarte und trifft die Höhe im Eckpunkte des Dreiecks, die andern beiden schneiden einander und die Höhe h_c im Innern des Dreiecks im Punkte G. Die benachbarte Winkelhalbierende muss nach der Antwort der Frage 85 auf derjenigen Seite der Höhe liegen, welcher die grössere Dreiecksseite und deswegen auch der grössere Teilwinkel und die grössere Projektion auf der Grundseite anliegt. Man hat daher in Figur 217:

$$\sphericalangle FCE = \begin{cases} \sphericalangle FCA - ECA = 90^0 - \alpha - \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right), \\ \sphericalangle ECB - FCB = \frac{\gamma}{2} - (90^0 - \beta) = \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) - 90^0. \end{cases}$$

Erkl. 533. Dass die Winkelgrössen:

$$90^0 - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \text{ und } \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) - 90^0$$

wirklich gleichen Wert haben müssen, bestätigt die aus ihrer Gleichsetzung hervorgehende Gleichung:

$$90 + 90 = \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) + \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = \alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Dass der Winkel $AGC = 90 + \frac{\gamma}{2}$ ist, folgt nicht nur aus dem Dreieck AGC selbst, sondern auch daraus, dass $\sphericalangle AGC$ Aussenwinkel ist

Und für den Winkel AGC als dritten Winkel in $\triangle ACG$ erhält man:

$$\sphericalangle AGC = 180^0 - \left(\frac{\alpha}{2} + 90^0 - \alpha\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\alpha,$$

bezw. für seinen Nebenwinkel:

$$\sphericalangle AGF = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha;$$

und ebenso für die Winkel mit w_b:

$$90 \pm \frac{\beta}{2}.$$

Ebenso bildet die Höhe h_b mit der benachbarten Winkelhalbierenden w_b den Winkel:

für das rechtwinklige Dreieck AGF, in welchem $\sphericalangle F = 90$, $\sphericalangle A = \frac{\alpha}{2}$ ist. Ebenso ist $\sphericalangle CGD$ als Scheitelwinkel gleich dem $\sphericalangle AGF$ im gleichen Dreieck, also Komplementwinkel zu dessen Winkel bei A, nämlich $= 90 - \frac{\alpha}{2}$.

Erkl. 534. Der Winkel, unter welchem sich die beiden Winkelhalbierenden w_a und w_c treffen, ist wegen des Dreiecks ACJ gleich

$$180^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^0 - \frac{\alpha + \gamma}{2} =$$

$$180^0 - \frac{180^0 - \beta}{2} = 90 + \frac{\beta}{2},$$

also sein Nebenwinkel $90 - \frac{\beta}{2}$. Ebenso bilden die andern Winkelhalbierenden ihre Winkel:

$$\sphericalangle(w_b w_c) = 90 \pm \frac{\alpha}{2}; \quad \sphericalangle(w_a w_b) = 90 \pm \frac{\gamma}{2}.$$

$$90^0 - \left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right) = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - 90^0$$

und mit der Winkelhalbierenden

w_a die Winkel $90^0 \pm \frac{\alpha}{2}$,

mit w_c die Winkel $90^0 \pm \frac{\gamma}{2}$.

Und endlich bildet die Höhe h_a mit der benachbarten Winkelhalbierenden w_a den Winkel:

$$90^0 - \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = \left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) - 90^0,$$

mit w_b die Winkel $90 \pm \frac{\beta}{2}$,

mit w_c die Winkel $90 \pm \frac{\gamma}{2}$.

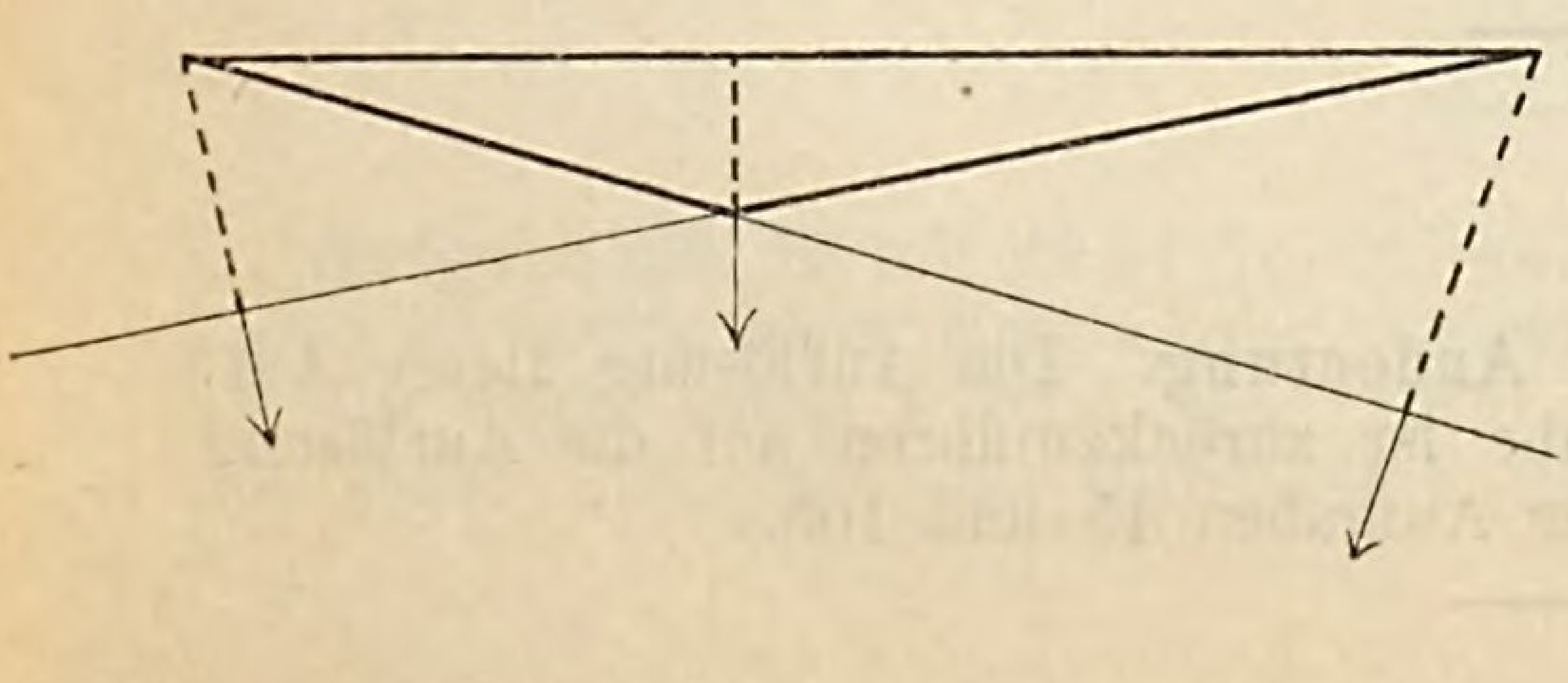
Aufgabe 109. Wie ändern sich Seiten und Winkel eines Dreiecks, wenn eine seiner Höhen grösser oder kleiner wird?

Erkl. 535. Man spricht von absolutem Wachstum, bezw. Abnehmen bei einer alleinstehenden Grösse, die von Beziehungen zu anderen losgelöst (absolvere = ablösen) ist, dagegen von relativem Wachstum bezw. Abnehmen bei einer mit andern Grössen zu einer Gruppe vereinigten Grösse, deren Wert im Verhältnis oder in Beziehung zu den anderen (relativ = rückbezüglich) zu betrachten ist. So ist in der Zahlengruppe 11, 13, 16 die Zahl 16 die absolut und relativ grösste, unter der Zahlengruppe 18, 200, 300 aber ist 18 die relativ kleinste, obgleich sie absolut sogar grösser ist als die vorige Zahl 16. Und ebenso ist in einem Dreieck mit den Seiten $a = 17$, $b = 18$, $c = 16$ die Seite $c = 16$ die absolut und relativ kleinste Seite, im Dreieck mit den Seiten $a = 170$, $b = 180$, $c = 16$ aber ist dieselbe absolut gleich geblieben, dagegen relativ zu den anderen beiden viel kleiner geworden.

Auflösung. Wenn die Höhe h_c oder FC des Dreiecks ABC in Figur 217 unter Beibehaltung ihres Fusspunktes wächst, so wird in jedem der rechtwinkligen Dreiecke AFC und BFC die Kathete FC länger, also der gegenüberliegende Winkel bei A bezw. B grösser, und nach Satz 53 ebenso die Hypotenuse AC bezw. BC als schiefe Linie nach einem vom Fusspunkte F weiter entfernten Punkte länger, dagegen wird Winkel γ kleiner, weil infolge des Wachstums von α und β seine beiden Teilwinkel abnehmen. Die Seite c bleibt absolut gleich, verglichen mit dem Wachstum der Seiten a und b aber wird sie relativ kleiner. Man kann also sagen, dass wenn eine Höhe des Dreiecks wächst, dann die ihr zugehörige Winkelgrösse und Seite (absolut bezw. relativ) abnimmt, die übrigen Seiten und Winkel aber zunehmen.

Aufgabe 110. Man soll Aufgabe 106 auf die oberen Höhenabschnitte anwenden.

Figur 218.



Auflösung. Angewendet auf die vom Höhenschnittpunkt nach den drei Eckpunkten gehenden oberen Höhenabschnitte liefert die Aufgabe 106 das Ergebnis, dass die Summe der oberen Höhenabschnitte im spitzwinkligen Dreieck kleiner als der ganze und in jedem Dreieck grösser als der halbe Dreieckumfang sein muss, während von den Höhen selber das letztere nicht allgemein

zu beweisen war. Es ist nämlich im stumpfwinkligen Dreieck der „obere Höhenabschnitt“ sogar grösser als die Höhe selber, und es kann eintreffen, dass bei ganz grossen Seiten die Höhen selber sehr klein sind (vergl. Figur 218), ihre oberen Abschnitte aber sehr gross.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 111. Zwischen welchen Grenzen muss die dritte Seite eines Dreiecks liegen, dessen erste beiden Seiten sind:

a) 9 und 13, c) 100 und 360,
b) 29 und 31, d) 23 und 17.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 99.

Aufgabe 112. Von einem Dreieck sei bekannt die grösste und die kleinste Seite, nämlich: a) 23 und 17, b) 30 und 10, c) 41 und 1; wie kann die mittlere Seite heissen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 99 und 111 mit Berücksichtigung der vorgeschriebenen Grenzen.

Aufgabe 113. Von einem Dreieck sei bekannt die grösste und die mittlere Seite, nämlich: a) 23 und 17, b) 30 und 20, c) 30 und 10; wie kann die kleinste Seite heissen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 99 und 111 mit Berücksichtigung der vorgeschriebenen Grenzen.

Aufgabe 114. Von einem Dreieck sei bekannt die mittlere Seite und die kleinste, nämlich: a) 23 und 17, b) 30 und 10, c) 41 und 1; wie kann die grösste Seite heissen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 99 und 111 mit Berücksichtigung der vorgeschriebenen Grenzen.

Aufgabe 115. Man bestätige die in Aufgabe 100 aufgestellte Behauptung an den drei Seiten einiger Dreiecke der vorigen Aufgaben.

Aufgabe 116. Man bestätige den in Erklärung 593 aufgestellten Satz an denjenigen Dreiecken, welche in den Sätzen 85 betrachtet sind.

Aufgabe 117. Es seien zwei Punkte A und B gegeben und eine zwischen beiden hindurchgehende Gerade g. Man soll auf dieser einen Punkt P bestimmen, so dass $AP + BP$ so klein wie möglich wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist zurückzuführen auf die Auflösung der Aufgaben 15 und 103.

Aufgabe 118. Man soll dieselbe Aufgabe 117 für den Fall lösen, dass die Punkte A und B auf der gleichen Seite der Geraden g liegen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist zurückzuführen auf die Auflösung der Aufgaben 15 und 103.

Aufgabe 119. Man beweise, dass die durch eine Winkelhalbierende des Dreiecks auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte kleiner sind, als die anstossenden Seiten eines jeden derselben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 105.

Aufgabe 120. Man zeichne in einem stumpfwinkligen Dreieck die drei Höhen und untersuche deren Winkel mit Seiten und Winkelhalbierenden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 107 und 108.

2) Aufgaben über das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck.

(Zu Abschnitt C 1 c α, β, γ, δ)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 121. Man soll die Verbindungsstrecke der Schenkelschnittpunkte der Winkelhalbierenden des gleichschenkligen Dreiecks, also in Figur 66 die Strecke EF auf ihre Länge untersuchen.

Erkl. 536. Man kann auf Grund der nebenstehenden Ueberlegung den Satz aussprechen:

> Die von der Winkelhalbierenden des gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Schenkeln abgeschnittenen unteren Abschnitte sind gleich der zur Grundseite parallelen Verbindungsstrecke ihrer Endpunkte.

Ueber das Viereck $ABEF$ vergleiche man Frage 154 und Aufgabe 128.

Auflösung. Da in Fig. 66 die Linien AE und BF Winkelhalbierende sind, ausserdem die Linie EF parallel zu AB sein muss, so sind bei E und F gleiche innere Wechselwinkel zu jenen bei A und B, so dass man erhält:

$$\frac{\alpha}{2} = FAE = BAE = AEF = EFB = ABF$$
$$= EBF = \frac{\beta}{2}.$$

Also ist im Dreieck AFE der

$$\sphericalangle FAE = \sphericalangle FEA$$

und im Dreieck BEF der

$$\sphericalangle EBF = \sphericalangle EFB.$$

Demnach sind AFE und BEF gleichschenklige Dreiecke, so dass:

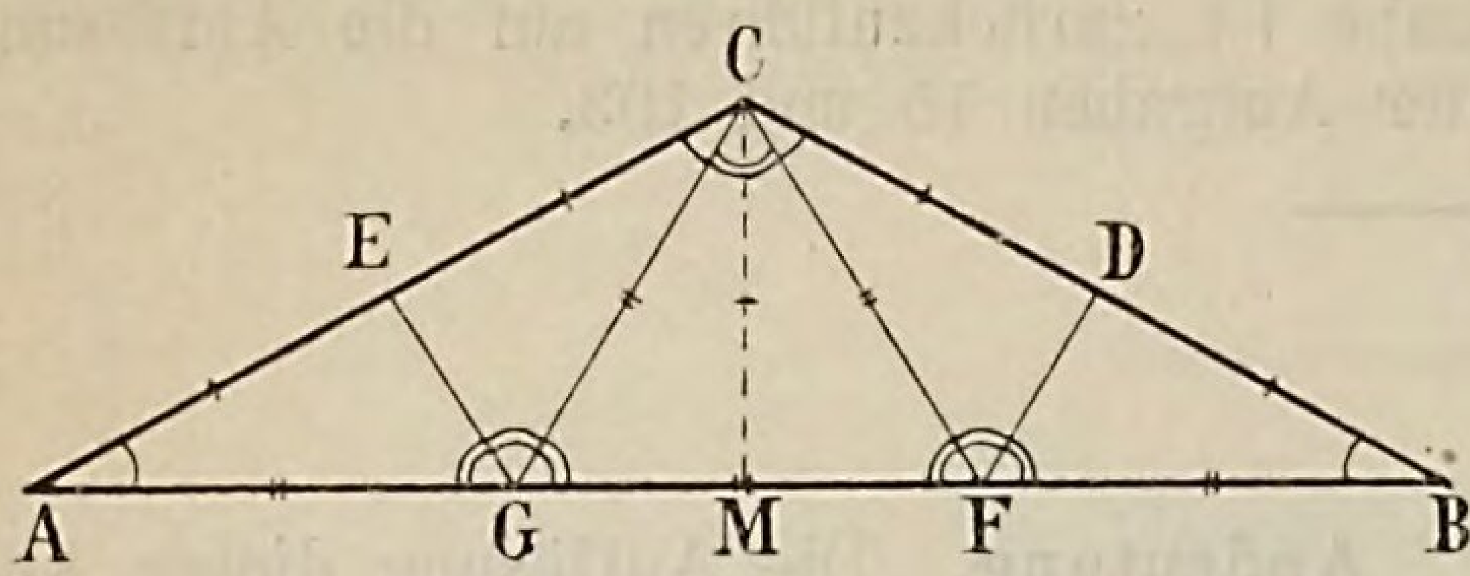
$$FE = AF = BE$$

sein muss.

Aufgabe 122. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert werden, welches an der Spitze einen Winkel von 120^0 hat, und sollen die durch die Mittelsenkrechten

seiner Seiten erzeugten Dreiecke untersucht werden.

Figur 219.



Erkl. 537. Statt einen Winkel von 120° als Scheitelwinkel zu konstruieren, hätte man auch die Grösse von 30° für die Basiswinkel berechnen und solche an einer beliebig gewählten Grundseite antragen können. Auch hätte es genügt, nur auf einer Seite der Symmetrieachse CM die Untersuchung durchzuführen, da wegen der Symmetrie auf der andern Seite stets gleiche Stücke entstehen müssen.

Erkl. 538. Da die Mittelsenkrechte DF und EG auch wieder die Winkel bei F und G, und MC jenen bei C (sowohl den ganzen $\sphericalangle ACB$, als den mittleren GCF) halbiert, so zerfällt das ganze gleichschenklige Dreieck ABC durch die fünf Transversalen in sechs Teildreiecke, welche sämtlich die Winkel 30, 60, 90 haben und sämtlich die gleichlange Hypotenuse haben, also auch sämtlich kongruent sind.

Daher ist in diesem gleichschenkligen Dreieck auch die Höhe CM gleich der halben Schenkellänge, und das Stück:

$$DF = EG = GM = FM = \frac{1}{6} AB.$$

Auflösung. Um ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Schenkelwinkel von 120° zu konstruieren, zeichne man mittels des Winkelmessers einen Winkel von 120° und trage auf dessen Schenkeln je zweimal gleichlange Strecken ab (siehe Figur 219). Die Verbindungsstrecke der zweiten Endpunkte A und B liefert die Grundseite des Dreiecks; in den ersten Endpunkten D und E als Mittelpunkten von AC und AB errichte man die Senkrechten DF und EG und ebenso im Mittelpunkte M der Grundseite AB die Mittellinie MC. Verbindet man dann noch Punkt C mit F und G, so ist:

$$\sphericalangle ACB = 120^0,$$

folglich:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \frac{180 - 120}{2} = 30^0.$$

Als Punkt der Mittelsenkrechten von BC hat F gleichen Abstand von B und C, also ist:

$$FB = FC \text{ und } \sphericalangle FCB = \sphericalangle FBC = 30^0,$$
$$\sphericalangle BFC = 120^0, \sphericalangle CFG = 60^0.$$

Ebenso ist andererseits:

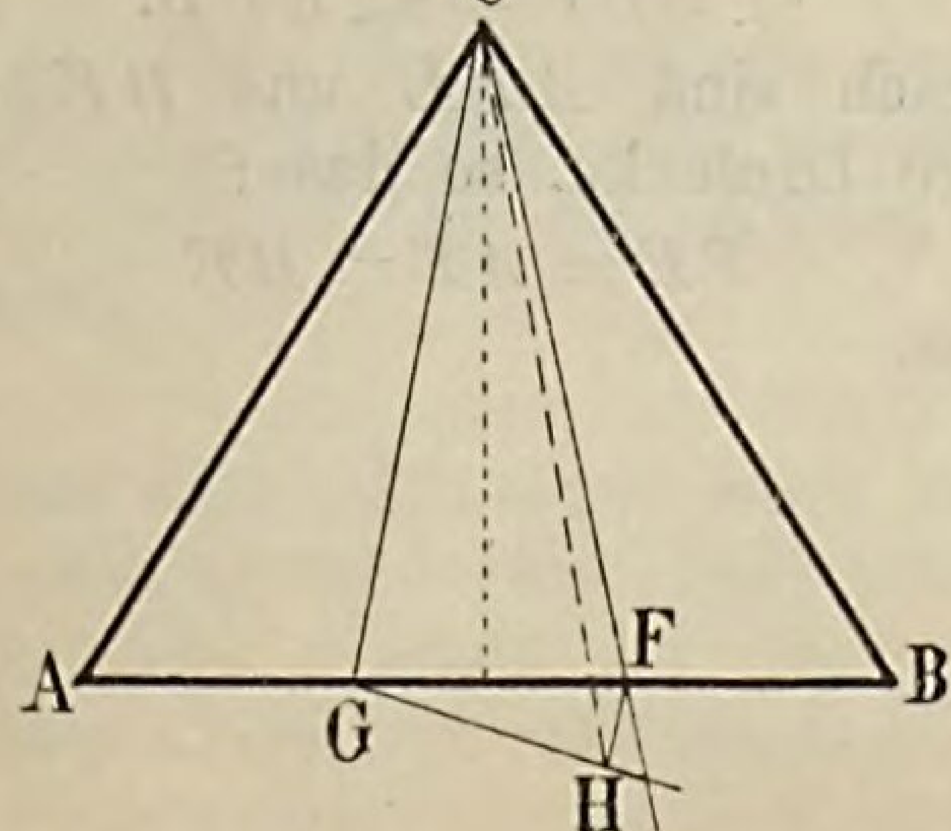
$$GA = GC, \sphericalangle GAC = GCA = 30^0, \sphericalangle AGC = 120^0, \sphericalangle CGF = 60^0.$$

Da aber der ganze Winkel bei C 120° hat, so bleibt für den mittleren Winkel FCG noch $120 - 2 \cdot 30 = 60^0$. Demnach ist das Dreieck FCG ein gleichseitiges wegen seiner drei gleichen Winkel von 60°, und man erhält:

$$AG = GC = CF = GF = FB = \frac{1}{3} \cdot AB.$$

Aufgabe 123. Man beweise, dass in jedem beliebigen gleichschenkligen Dreieck, wenn die Grundseite in drei gleiche Teile geteilt wird, der von den Verbindungslinien der Spitze mit den inneren Fusspunkten gebildete Winkel grösser ist, als die beiden unter sich gleichen mit den Schenkeln gebildeten äusseren Winkel.

Figur 220.



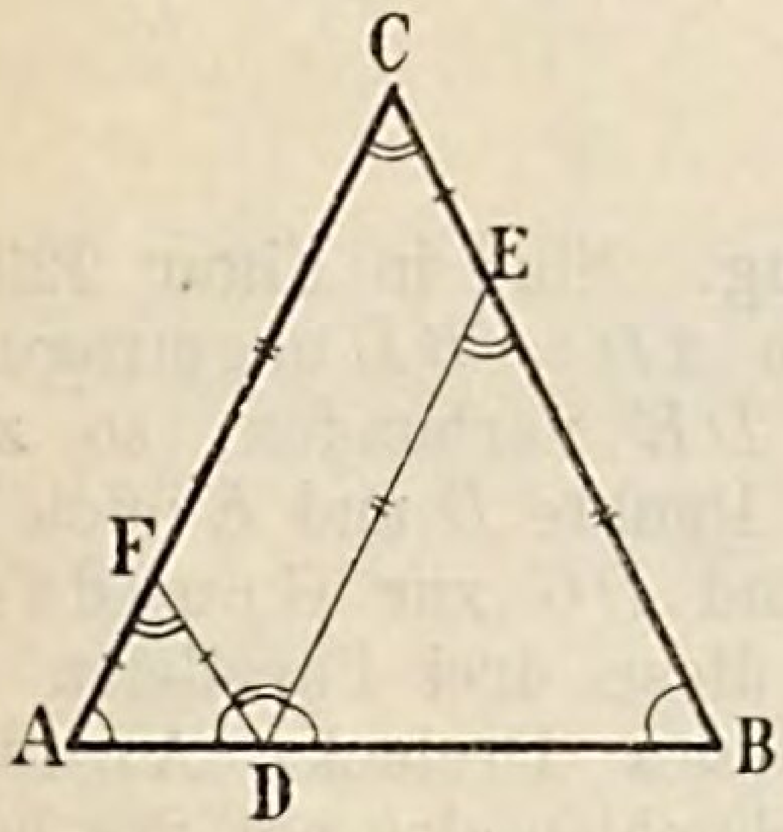
Auflösung. Zum Beweise klappe man das Dreieck ACG in Figur 220 um die Linie CG als Achse um. Dabei bleibt CG an der gleichen Stelle; Winkel AGC, welcher als Aussenwinkel des Dreiecks MCG ein stumpfer sein müsste, fällt teilweise unterhalb GF, also fällt auch der dritte Punkt H als symmetrischer zu A unterhalb FG und es wird $GH = GA = GF$. Da aber jeder Punkt auf der Verlängerung von BF nach Satz 53 noch weiter von G entfernt sein muss, als F, so kann Punkt H nicht auf diese Verlängerung fallen, sondern H und mit diesem Punkt auch die Linie BA muss innerhalb des Winkels GCF fallen. Also ist:

$$\sphericalangle GCH = GCA = BCF \text{ kleiner als } \sphericalangle GCF.$$

Erkl. 539. Das Dreieck in Figur 219 mit den Winkeln 30°, 30°, 120° bildet den Uebergang für die Beziehung dieses äusseren Winkels zum Basiswinkel selbst. Ist der Basiswinkel selbst 30°, so ist dieser äussere Winkel auch 30°. Ist der Basiswinkel kleiner als 30°, so ist derselbe grösser; wächst der Basiswinkel über 30°, so wird der betrachtete Winkel auch kleiner als der Basiswinkel.

Aufgabe 124. In einem gleichschenkligen Dreieck ziehe man von einem beliebigen Punkte der Grundseite nach jedem Schenkel eine parallele Strecke zum andern Schenkel und untersuche deren Länge.

Figur 221.



Erkl. 540. Da die drei Winkel beim Punkte D zusammen einen gestreckten bilden, und zwei davon $= \alpha = \beta$ sind, so muss der dritte $\sphericalangle EDF = \gamma$ sein. Ebenso muss in den Dreiecken ADF und BDE der dritte Winkel bei F bezw. E gleich γ sein, denn die zwei andern Winkel dieser Dreiecke sind jeweils $= \alpha = \beta$. Dasselbe folgt auch aus der Gleichheit der korrespondierenden Winkel bei C und F am Schenkel FC, und bei C und E am Schenkel CE, bezw. der inneren Wechselwinkel bei F, D und E.

Auflösung. Zieht man im gleichschenkligen Dreieck ABC (siehe Figur 221) die Strecken $DE \parallel AC$ und $DF \parallel BC$, so sind bei A und D sowie bei B und D jeweils korrespondierende gleiche Winkel vorhanden. Da aber $\alpha = \beta$ ist, so sind diese korrespondierenden Winkel selbst unter sich gleich gross, und folglich sind ADF und BDE gleichschenklige Dreiecke, also $AF = FD$ und $BE = ED$.

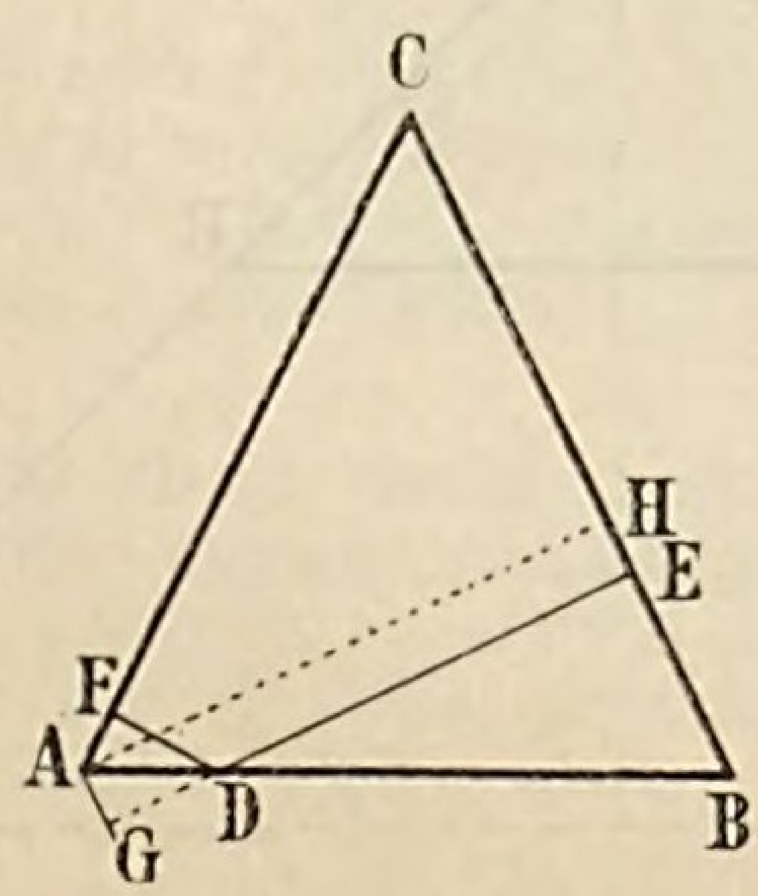
Ferner sind DE und FC bezw. DF und CE parallele Strecken zwischen Parallelen, also nach Satz 32 auch $DE = FC = BE$ und $DF = CE = AF$.

Es sind also die Längen der beiden Parallelen auf jedem Schenkel ebenfalls vorhanden und man erhält den

Satz: Die Summe der beiden Strecken, welche von einem beliebigen Punkte der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks nach dessen Schenkeln je parallel zum andern Schenkel gezogen werden, ist stets gleich der Schenkellänge des gleichschenkligen Dreiecks.

Aufgabe 125. In einem gleichschenkligen Dreieck ziehe man von einem beliebigen Punkte der Grundseite nach jedem Schenkel eine senkrechte Strecke und untersuche deren Länge.

Figur 222.



Auflösung. Zieht man im gleichschenkligen Dreieck ABC (siehe Figur 222) die Strecke $DE \perp BC$ und $DF \perp AC$, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADF und DBE mit Winkeln $\alpha = \beta$. Folglich sind auch deren Winkel bei D beide gleich, nämlich $\sphericalangle ADF = 90^0 - \alpha = 90^0 - \beta = \sphericalangle BDE$. Wird also das Dreieck ADF um AD als Achse umgeklappt, so fällt Winkel ADF als $\sphericalangle ADG$ auf den Scheitelwinkel von BDE; GDE wird eine gerade Linie, und wegen der rechten Winkel bei G und E wird $AG \parallel BE$. Zieht man also auch noch von A die Höhe $AH \perp BC$, so sind wieder

Erkl. 541. Bei den beiden Aufgaben 124 und 125 ist zu beachten, dass man von jeglichem Punkte der Grundseite aus dasselbe Ergebnis erhält, dass also die Summe je zweier paralleler Strecken von der Grundseite aus gleich der Schenkellänge und die Summe je zweier senkrechten Strecken von der Grundseite aus gleich der Länge der Schenkelhöhe des Dreiecks ist. Ist der Scheitelwinkel des Dreiecks spitz, wie in Figur 221 und 222, so bilden die senkrechten Strecken einen stumpfen, die parallelen einen spitzen Winkel; ist der Scheitelwinkel stumpf, so bilden die senkrechten Strecken einen spitzen, die parallelen einen stumpfen Winkel.

nach Satz 32 als parallele Strecken zwischen Parallelen:

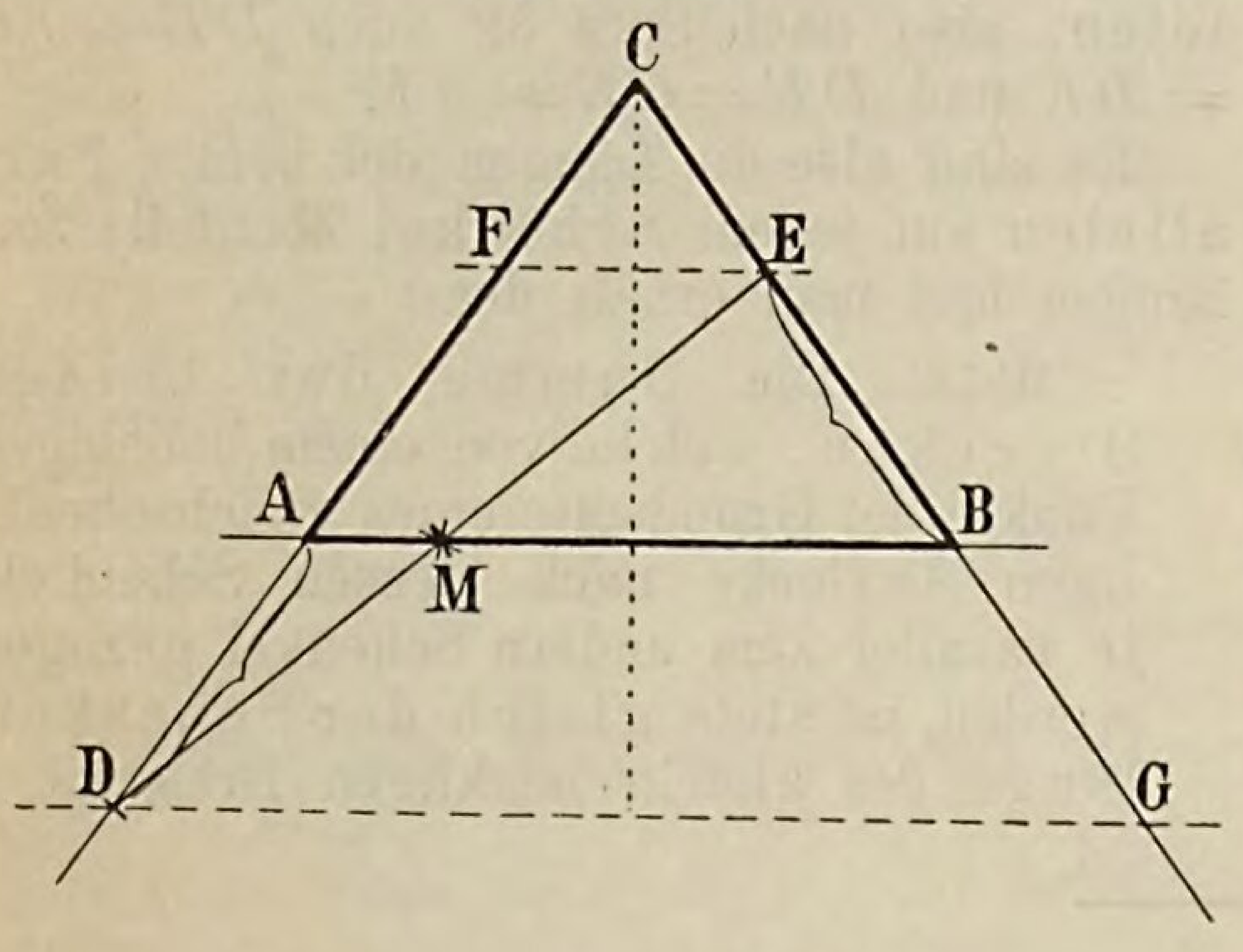
$$AH = GE = GD + DE = FD + DE.$$

Man erhält also den

Satz: Die Summe der beiden von einem beliebigen Punkte der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Schenkel gezogenen senkrechten Strecken ist stets gleich der Länge der zu einem Schenkel gehörigen Höhe des gleichschenkligen Dreiecks.

Aufgabe 126. Man trage von dem Eckpunkte an der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks auf dem einen Schenkel in der Richtung zur Spitze hin, auf dem andern in der Richtung von der Spitze weg gleichlange Strecken ab und beweise, dass die Verbindungstrecke ihrer Endpunkte von der Grundseite halbiert wird.

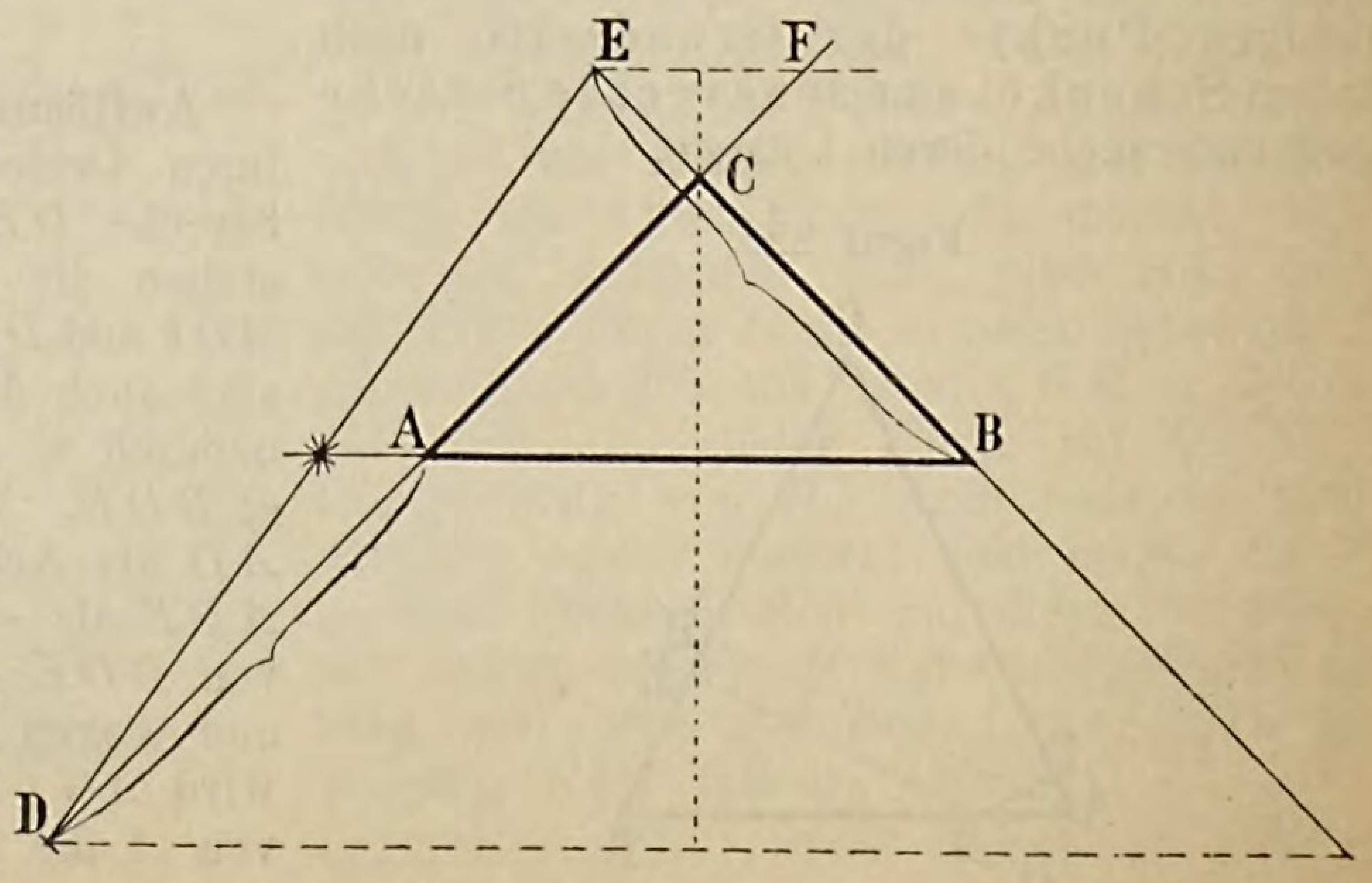
Figur 223.



Auflösung. Sind in Figur 223 und 224 die Strecken $AD = BE$ abgetragen und die Endpunkte DE verbunden, so ziehe man durch diese Punkte D und E auch die Parallelen EF und DG zur Grundseite AB. Dann sind diese drei Parallelen zur Symmetrieachse des Dreiecks Achsensenkrechte, schneiden also auf den beiden symmetrischen Schenkeln symmetrisch gleiche Strecken aus, so dass man auf AC und BC jeweils zwei gleichgrosse Strecken erhält, nämlich $AD = BG = BE = AF$. Nun sind aber DF, DE und EG Transversalen der Parallelen EF und DG, also muss AB als Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier solcher Transversalen nach Satz 31 b Mittelparallele sein und auch die dritte Transversale DE im Mittelpunkte treffen, daher ist auch $DM = ME$, also M die Mitte von DE.

Erkl. 542. Wie Figur 223 zeigt, gilt die Behauptung der Aufgabe 126 nicht nur für die Lage des Punktes E auf dem Schenkel selbst, sondern auch auf seiner Verlängerung. — Zu bemerken ist, dass Punkt M nie mit dem Mittelpunkte der Grundseite zusammenfallen kann, weil sonst in den Dreiecken AMD und BME ausser D und E auch A und B in Bezug auf M als Zentrum zentrisch-symmetrische Punkte, also AD und BE parallele Geraden werden müssten. Vielmehr liegt Punkt M immer näher bei demjenigen Eckpunkte, von welchem aus in der Richtung von der Spitze weg abgetragen

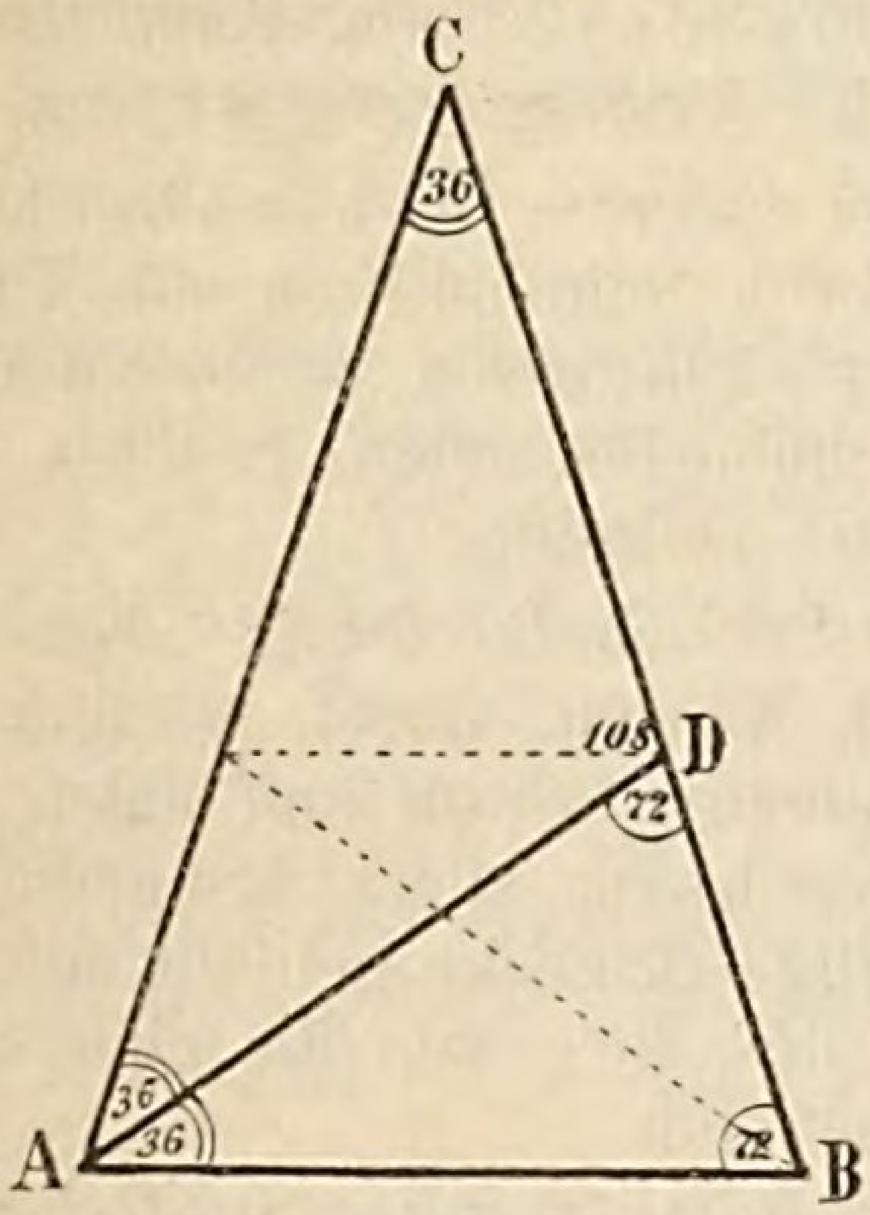
Figur 224.



wurde, rückt also nach der Grundseitenmitte vor, wenn die abgetragene Strecke beiderseits gleich 0 wird.

Aufgabe 127. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert werden, welches an der Spitze einen Winkel von 36° hat, und sollen die durch die Winkelhalbierende eines Basiswinkels erzeugten Dreiecke untersucht werden.

Figur 225.



Erkl. 543. Das im Nebenstehenden betrachtete gleichschenklige Dreieck mit dem Scheitelwinkel von 36° könnte 10mal um den Punkt C herum angelegt werden. Wegen dieser Eigenschaft tritt dasselbe auf bei der Lehre der regelmässigen Vielecke; und dabei wird insbesondere die Gleichheit der drei Stücke $BA = AD = DC$ von grosser Wichtigkeit, da diese Länge im Dreieck ABC als Grundseite, im $\triangle ABC$ als Schenkel gegenüber 72° und im $\triangle ADC$ als Schenkel gegenüber 36° auftritt.

Erkl. 544. Würde man die zweite Winkelhalbierende bei B hinzunehmen, so entstünden die achsig-symmetrisch kongruenten beiden Teildreiecke, und nach Aufgabe 121 würde die Strecke BD noch zweimal auftreten, nämlich auf dem Schenkel AC und als Verbindungsstrecke von D mit dem achsig-symmetrischen Punkte auf AC.

Auflösung. Um ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Scheitelwinkel von 36° zu konstruieren, zeichne man mittels des Winkelmessers einen Winkel von 36° und trage auf den Schenkeln gleichlange Seiten ab (siehe Figur 225). Dann ist die Summe der Winkel $\alpha + \beta = 180^0 - 36^0 = 144^0$, also jeder einzelne Basiswinkel 72° oder das Doppelte des Scheitelwinkels. Durch die Winkelhalbierende wird daher der Basiswinkel in zwei Hälften geteilt, die je 36° betragen, also dem Scheitelwinkel selbst wieder gleich sind. Daher ist nicht nur ABC ein gleichschenkliges Dreieck, sondern auch ACD mit den Winkeln $C = 36^0$, $\sphericalangle CAD = 36^0$, also $\sphericalangle ADC = 180^0 - 2 \cdot 36^0 = 108^0$, und mit den gleichen Schenkeln $AD = CD$.

Im dritten Dreieck ABD ist nun $\sphericalangle DAB = 36^0$, $\sphericalangle B = \beta = 72^0$ und $\sphericalangle ADB$ entweder als dritter Winkel $180^0 - 36^0 - 72^0$, oder als Nebenwinkel des Winkels $ADC = 180^0 - 108^0$, oder als Aussenwinkel des Dreiecks $ACD = 36^0 + 36^0$, also gleich 72°, so dass dieses Dreieck ABD wieder ein gleichschenkliges Dreieck ist, und zwar mit denselben Winkeln, wie das grosse Dreieck ABC und mit den gleichen Schenkeln $AB = AD$. Es entstehen also im ganzen drei gleichschenklige Dreiecke, und zwar mit den Winkeln:

$ABC: \sphericalangle A = 72 \quad \sphericalangle B = 72 \quad \sphericalangle C = 36$

$BDA: \sphericalangle B = 72 \quad \sphericalangle D = 72 \quad \sphericalangle A = 36$

$CAD: \sphericalangle C = 36 \quad \sphericalangle A = 36 \quad \sphericalangle D = 108$

und mit den gleichen Seiten:

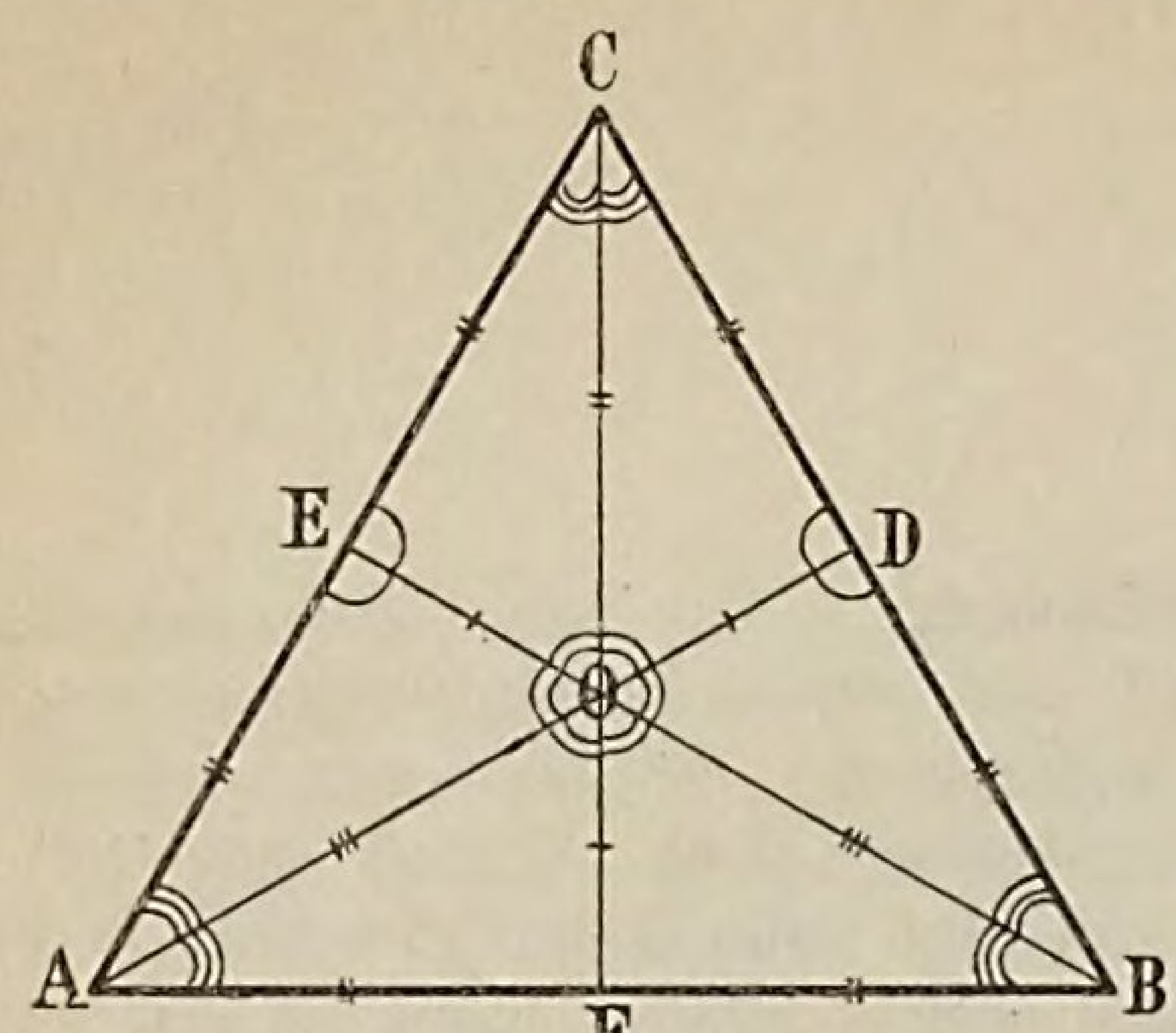
$$AC = BC \text{ und } BA = AD = DC.$$

Aufgabe 128. Man soll ein gleichseitiges Dreieck zeichnen mit seinen drei Symmetrieachsen, und die dadurch erzeugten Teildreiecke untersuchen.

Erkl. 545. Dass die drei Symmetrieachsen durch einen Punkt gehen, folgt schon aus dem Satz 58, da je zwei entsprechende Linien zweier Schenkel als symmetrische Geraden sich auf der Achse treffen müssen.

Auflösung. Um ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, konstruiere man entweder mittels des Winkelmessers oder mittels der in Antwort 102 und Fig. 76 angegebenen Kreise einen Winkel von 60° und trage auf dessen Schenkeln zwei gleichlange Seitenstrecken ab. Dann ist die Verbindungslinie einer jeden Ecke mit der Mitte der

Figur 226.



Erkl. 546. Die gleichschenkligen Dreiecke, welche durch je zwei obere Höhenabschnitte und eine Dreiecksseite gebildet werden, sind von der Art, welche in Aufgabe 122 betrachtet wurde.

Erkl. 547. Durch je zwei untere Höhenabschnitte wird mit der nicht zugehörigen Seite und den beiden andern Seitenhälften ein Fünfeck gebildet mit den Winkeln 60^0, 60^0, 90^0, 240^0, 90^0, nämlich die Fünfecke:

$$ABDOEA, \; BCEOFB, \; CAFODC.$$

Durch die sechs vorhandenen Geraden sollten eigentlich auch Sechsecke bezw. Sechsseite gebildet werden. Solche kommen jedoch nicht zu stande, weil je drei der sechs geraden Linien durch denselben Punkt gehen.

Erkl. 548. Das gleichseitige oder regelmässige Dreieck bildet auch einen beachtenswerten Beleg für die Sätze 97. Denn es besitzt drei Symmetrieachsen und diese schneiden sich in einem Punkte und unter Winkeln von $\frac{180^0}{3} = 60^0$, wofür $\frac{180}{60} = \frac{360}{120} = 3$ eine ganze Zahl ist. Diese Achsen bilden $2 \cdot \frac{360}{120} = 6$ kongruente Ebenenteile, von welcnen je zwei aufeinanderfolgende ungleichwendig, je zwei durch einen Teil getrennte Teile gleichwendig kongruent sind; und durch Umdrehung um $\frac{360^0}{3} = 120^0$ kommt die ganze Figur mit sich selbst zur Deckung.

Gegenseite eine Symmetrieachse und damit zugleich Winkelhalbierende des Winkels und Mittelsenkrechte der Seite. Eine jede dieser Achsen teilt das ganze Dreieck in zwei kongruente Hälften, deren jede ein rechtwinkliges Dreieck ist mit den Winkeln 30^0, 60^0, 90^0, nämlich:

$$\triangle AFC \cong BFC \cong BDA \cong CDA \cong CEB \cong AEB.$$

Durch je zwei obere Höhenabschnitte wird von dem ganzen Dreieck ferner ein gleichschenkliges Dreieck mit den drei Winkeln 30^0, 30^0, 120^0 abgeschnitten, nämlich:

$$\triangle AOB \cong BOC \cong COA.$$

Je zwei untere Höhenabschnitte bilden mit zwei Seitenhälften ein Viereck mit je zwei gleichgrossen anstossenden Seiten und gegenüberliegenden rechten Winkeln, nämlich die Deltoide:

$$AFOE \cong BDOF \cong CEOD.$$

Endlich werden durch je eine Seitenhälfte, einen oberen und einen unteren Höhenabschnitt sechs kongruente kleine rechtwinklige Dreiecke gebildet mit den Winkeln 30^0, 60^0, 90^0, wie die oben zuerst genannten, nämlich

$$\triangle AFO \cong BFO \cong BDO \cong CDO \cong CEO \cong AEO.$$

Von diesen Figuren sind die drei gleichschenkligen Dreiecke und die drei Deltoide achsig-symmetrisch und zentrisch, d. h. sie gelangen durch Umdrehung um O zur Deckung (aber durch Umdrehung um 60^0, nicht um 180^0 oder eine halbe Umdrehung; daher sind sie auch nicht zentrisch-symmetrisch), unter den rechtwinkligen Dreiecken sind je zwei gleichwendig und je zwei ungleichwendig kongruent, und jedes ist mit drei andern achsig-symmetrisch zu je einer der drei Symmetrieachsen, mit den zwei übrigen zentrisch, d. h. durch Umdrehung um 120^0 zur Deckung kommend.

Es treten ausser den Seiten und Höhen selbst im Ganzen nur dreierlei Streckengrössen auf, nämlich die drei unteren Höhenabschnitte, die drei oberen Höhenabschnitte und die sechs gleichen Seitenhälften.

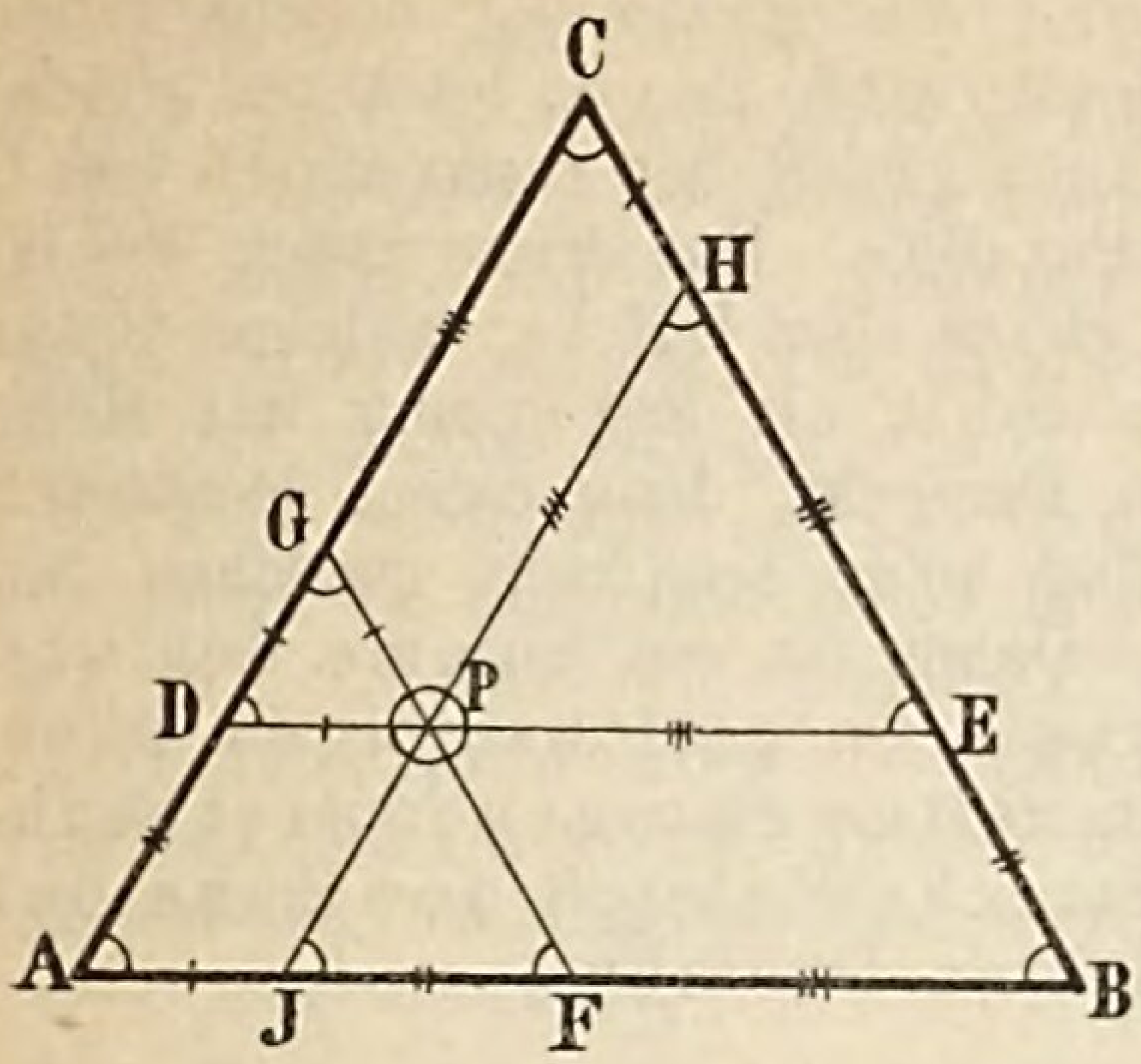
Aufgabe 129. In einem gleichseitigen Dreieck ziehe man von einem beliebigen im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte parallele Strecken zu den drei Seiten und untersuche deren Länge.

Auflösung. Zieht man durch den Punkt P (Figur 227 und 228) die Strecken

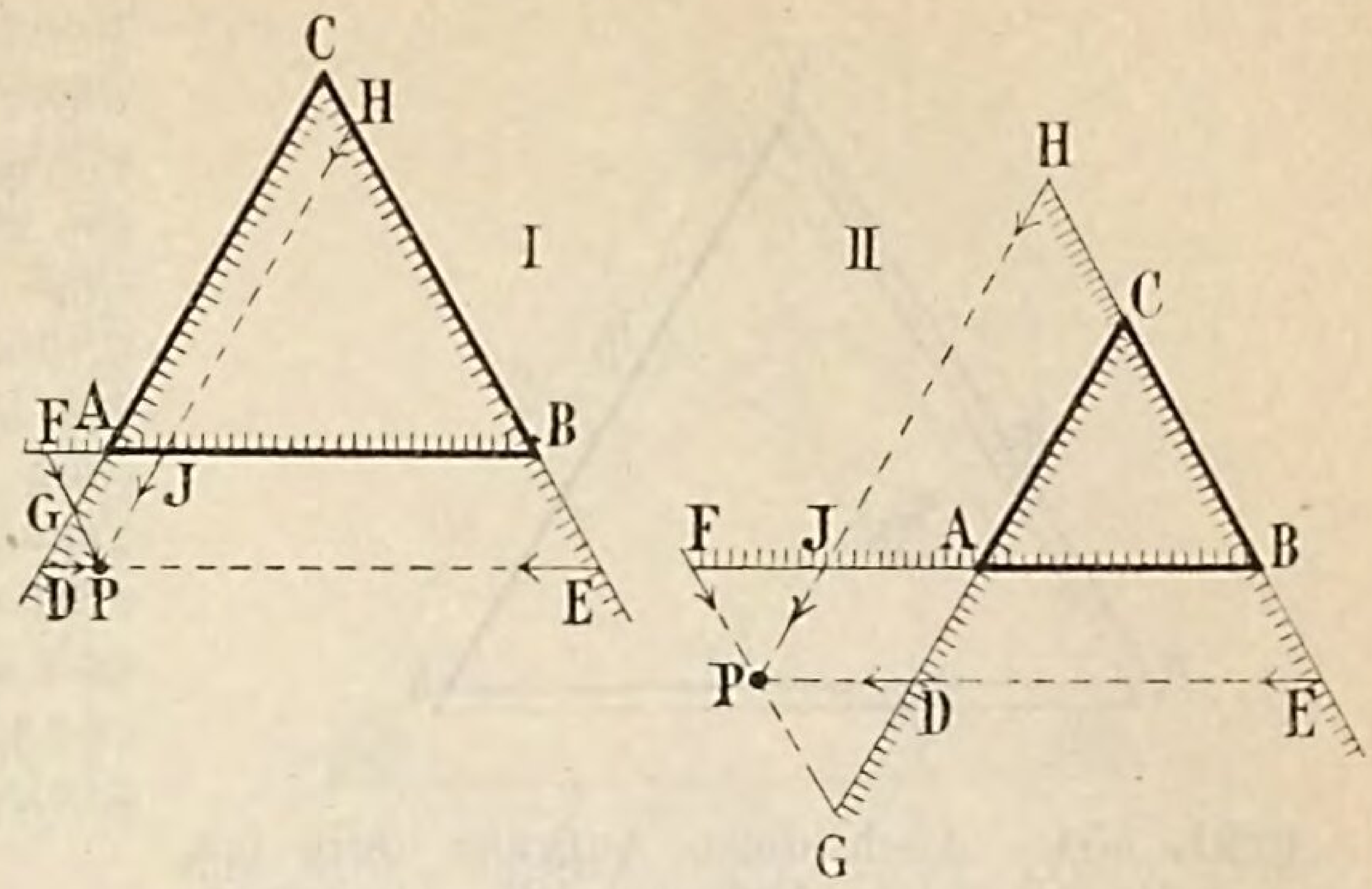
$$DE \parallel AB, \; FG \parallel BC, \; HJ \parallel CA,$$

so entstehen in den sechs Punkten D, E, F, G, H, J, jeweils zu den Dreieckswinkeln korre-

Figur 227.



Figur 228.



Erkl. 549. Statt den Beweis in der nebenstehenden Untersuchung für alle drei Seiten gleichmässig zu führen, kann man ihn auch zurückführen auf den in der Aufgabe 124 bewiesenen Satz. Nach diesem ist nämlich im gleichschenkligen Dreieck CDE die Summe $PG + PH$ gleich dem Schenkel CD, und im gleichschenkligen Dreieck HJB die Summe $PE + PF$ gleich dem Schenkel BJ. Da also ferner als parallele Strecken zwischen Parallelen noch $PD = AJ$ und $PJ = AD$ sind, so erhält man wieder:

$$\begin{aligned} PD + PE + PF + PG + PH + PJ \\ = CD + BJ + AJ + AD \\ = AC + AB = 2AB = 2BC = 2AC. \end{aligned}$$

Erkl. 550. Rückt der Punkt P auf eine Dreiecksseite selbst, so fällt die Aufgabe mit Aufgabe 124 vollständig zusammen, da eine der Parallelstrecken selbst Seite wird.

Rückt P ausserhalb des Dreiecks, so behält der Satz seine Gültigkeit, wenn man diejenigen Strecken negativ in die Summe einsetzt, für welche die Richtung vom Seitenschnittpunkte nach dem Punkte P auf die entgegengesetzte Seite dieser Dreiecksseite fällt, wie das Dreieck selbst zu ihr liegt. So sind in Figur 228 I positiv zu setzen die Strecken: DP, EP, GP, HP, dagegen negativ FP und JP, und in Figur 228 II positiv nur EP und HP, dagegen negativ DP, FP, GP, JP.

spondierende Winkel von 60°, am Punkte P selbst sechs Winkel von 60°, so dass die Dreiecke PEH, PGD, PJF je drei gleiche Winkel von 60° erhalten und gleichseitig werden. Ausserdem sind zwischen je zwei der parallelen Strecken andere Strecken parallel und symmetrisch gelegen, so dass man im Ganzen nur dreierlei Streckenlängen, aber jede fünfmal erhält, nämlich:

1) . . . $AJ = PD = DG = GP = CH$

2) . . . $BE = PF = FJ = JP = AD$

3) . . . $CG = PH = HE = EP = BF$.

Je drei dieser fünf Strecken setzen eine jede der drei Dreiecksseiten zusammen, je zwei übrige treffen in P zusammen, also ist die Summe der von einem Punkt im gleichseitigen Dreieck zu den Seiten gezogenen Parallelstrecken gleich zwei Dritteilen des Dreiecksumfanges oder gleich der doppelten Seitenlänge.

Aufgabe 130. In einem gleichseitigen Dreieck zeichne man von einem beliebigen im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte senkrechte Strecken zu den drei Seiten und untersuche deren Länge.

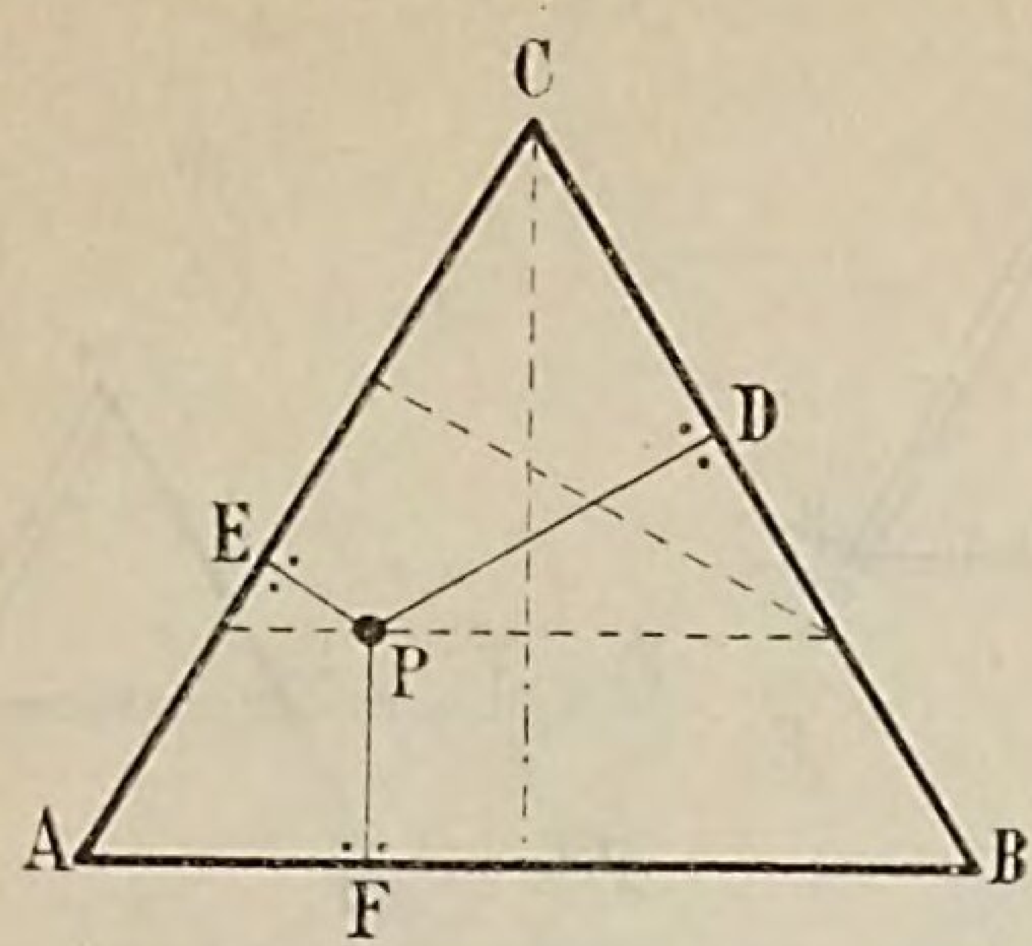
Auflösung. Zieht man durch den Punkt P (Figur 229) die Strecken

$$PD \perp BC,\ PE \perp AC,\ PF \perp AB,$$

und ausserdem durch P eine parallele Linie zu einer Seite, etwa AB, so ist durch diese Parallele ein gleichschenkliges Dreieck abgeschnitten, in welchem Punkt P als Punkt der Grundseite angesehen werden kann,

so dass also nach dem Satz in Aufgabe 125 die Summe $PD + PE$ gleich der Schenkelhöhe dieses Dreiecks wird, also da letzteres gleichseitig ist, auch gleich der Senkrechten von C auf deren Parallele. Das dritte Stück PF ist aber dann gleich dem Stücke, welches dieser Höhe noch fehlt als Ergänzung zur Höhe des ganzen Dreiecks, denn dieses Reststück und PF sind beide senkrecht zwischen den Parallelen. Daher ist die Summe der von einem Punkte im gleichseitigen Dreieck zu den Seiten gezogenen drei senkrechten Strecken gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks.

Figur 229.



Erkl. 551. Auch diese Aufgabe fällt mit ihrer entsprechenden Aufgabe 125 zusammen, wenn Punkt P auf eine Seite selbst rückt, denn dann wird die dritte senkrechte Strecke gleich Null.

Rückt P ausserhalb des Dreiecks, so tritt dieselbe Beschränkung ein, welche in Erkl. 550 für Aufgabe 129 angegeben wurde. Es behält nämlich der Satz seine Gültigkeit, wenn man diejenigen senkrechten Strecken negativ in der Summe einsetzt, für welche die Richtung vom Seitenfusspunkte nach dem Punkte P auf die entgegengesetzte Seite dieser Dreiecksseite fällt, wie das Dreieck selbst.

Aufgabe 131. Was für Strecken und Winkel beim gleichseitigen Dreieck kommen zur Deckung, wenn dasselbe um 120° gedreht wird?

Erkl. 552. Nach den Sätzen 43 und 44 kommen Verbindungslinien entsprechender Punkte und Schnittpunkte entsprechender Linien mit einander zur Deckung und bilden gleiche Strecken und Winkel. Hat man also drei Punkte oder Geraden, von welchen bei Drehung von 120° jedes mit dem nächsten zur Deckung gelangt, so müssen die Aussenwinkel ihres Dreiecks auch gleich 120° sein, also die Innenwinkel 60° — und man hat gleichseitige Dreiecke.

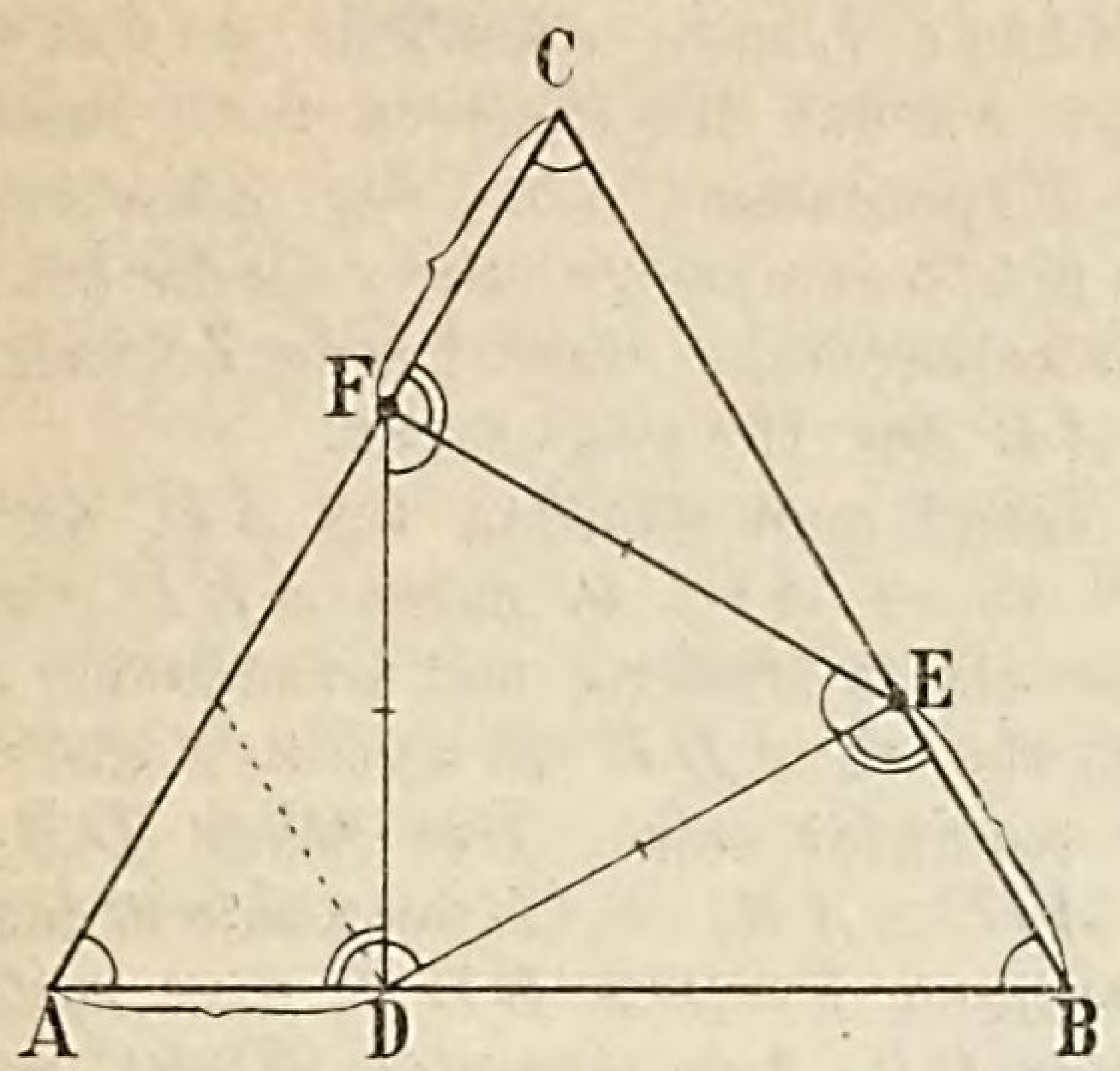
Erkl. 553. Wählt man insbesondere (wie in Figur 230 geschehen) die Verbindungsstrecken derjenigen Punkte, welche auf jeder Seite um ein Drittel der Seitenlänge von der Anfangsecke entfernt sind, so bilden diese wie alle vorigen ein gleichseitiges Dreieck, und zwar ein solches, dessen Seiten zu denen des ursprünglichen senkrecht sind. Denn in dem aus einer Seite DF dieses eingeschriebenen Dreiecks mit je einem Stück AD von $\frac{1}{3}$ und AF von $\frac{2}{3}$ Seitenlänge gebildeten Dreieck ist die Verbindungslinie der Seitenmitte von AF

Auflösung. Wenn das gleichseitige Dreieck um 120° gedreht wird, so kommt jede Ecke auf die nächstfolgende Ecke und jede Seite auf die nächstfolgende Seite. Dabei gelangen also auch je zwei solche Punkte zur Deckung, welche auf zwei aufeinanderfolgenden Seiten liegen und gleichen Abstand von der Anfangsecke haben; und die Verbindungslinien solcher Punkte auf aufeinanderfolgenden Seiten kommen ebenfalls zur Deckung. Daher sind auch die auf solchen Linien ausgeschnittenen Strecken und die von ihnen mit den Seiten gebildeten Winkel gleichgross (siehe Figur 230).

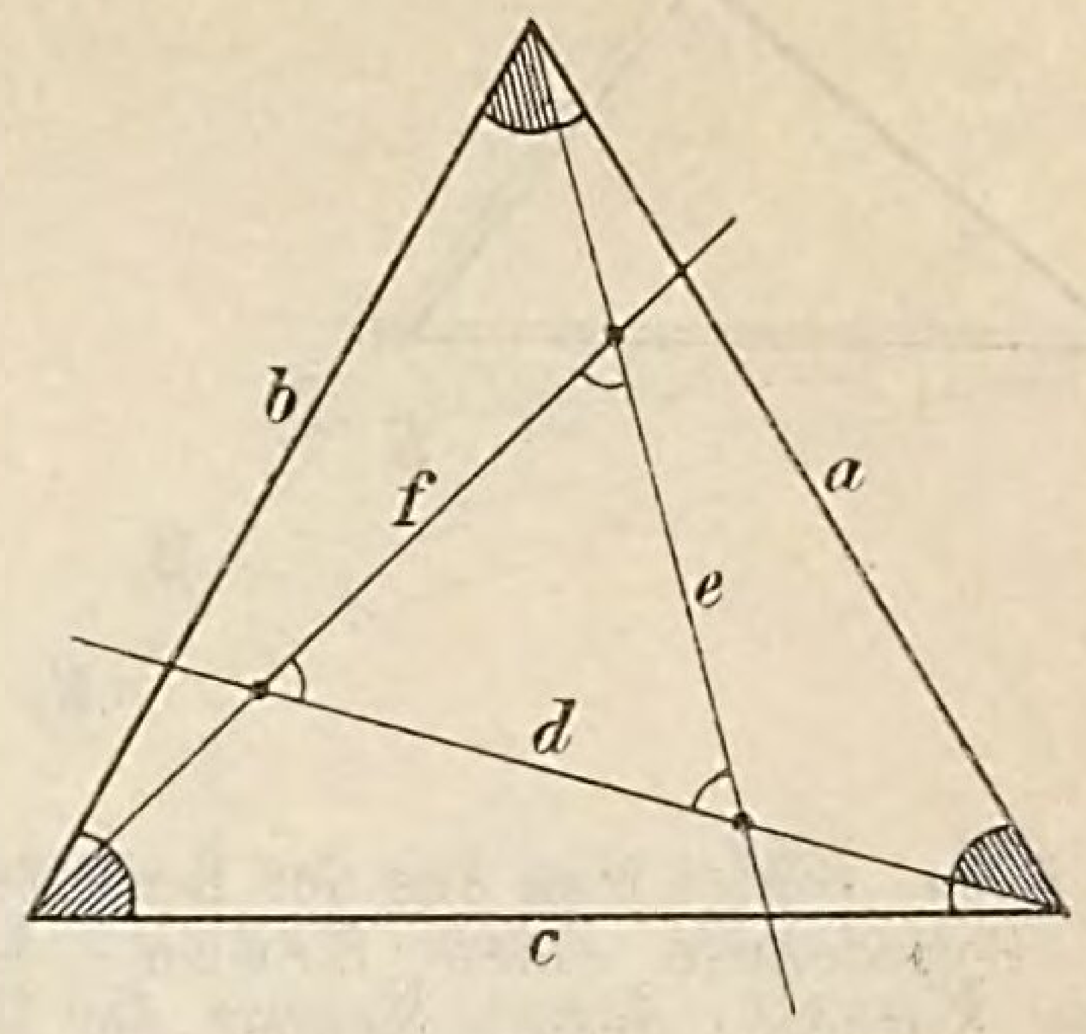
Entsprechend gelangen auch je zwei solche Geraden zur Deckung, welche durch zwei aufeinanderfolgende Seiten gehen und mit der Seite gleiche Winkel bilden; und die Schnittpunkte solcher Geraden durch aufeinanderfolgende Eckpunkte kommen ebenfalls zur Deckung. Daher sind auch die von solchen Geraden gebildeten Winkel und die auf ihnen ausgeschnittenen Strecken gleichgross (siehe Figur 231).

Je drei solcher Punkte aber und je drei solcher Geraden, die durch Drehung um

Figur 230.



Figur 231.

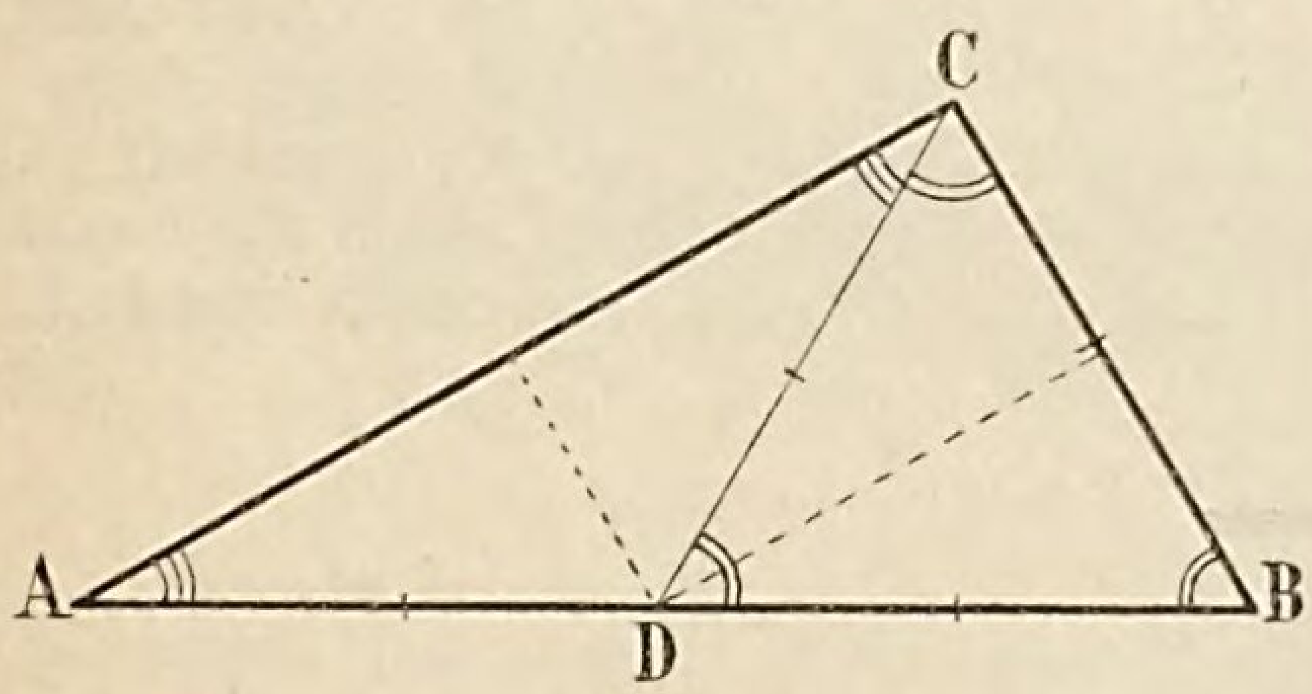


mit der Gegenecke D wieder Seite eines gleichseitigen Dreiecks, also gleich $\frac{AF}{2}$, und daher ist nach Satz 60 der Winkel $ADF = 90^0 = BED = CFE$.

120^0 zur Deckung kommen, bilden wieder ein gleichseitiges Dreieck (Dreieck DEF in Figur 230 und def in Figur 231).

Aufgabe 132. Man soll den Beweis durchführen, dass wenn in einem Dreieck die drei Winkel 30^0, 60^0, 90^0 sind, dann die Hypotenuse das doppelte der kleinsten Kathete ist.

Figur 232.



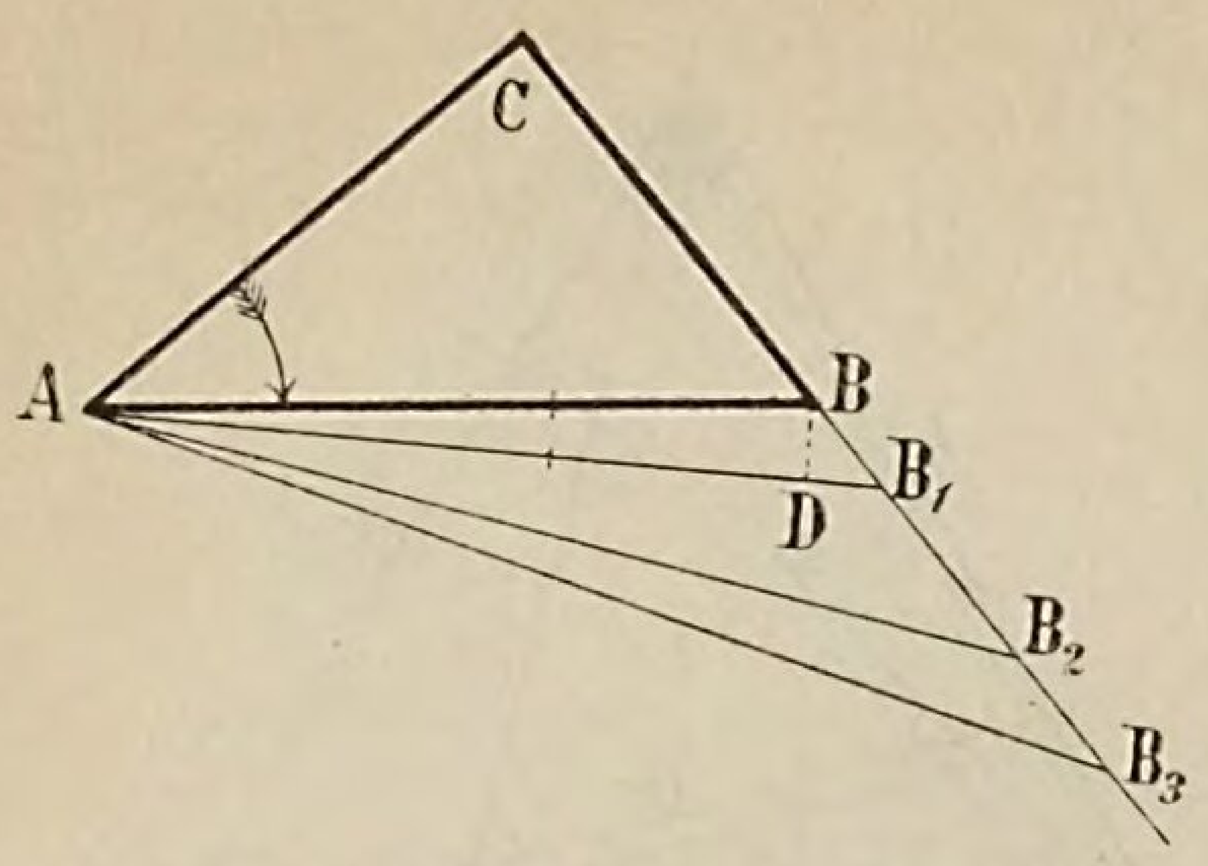
Erkl. 554. Entsprechend der nebenstehenden Ausführung kann man aus dem in Aufgabe 122 betrachteten gleichschenkligen Dreieck mit Basiswinkeln von 30^0 ein rechtwinkliges Dreieck erzeugen, wenn man an einem Schenkel ein gleichseitiges Dreieck ansetzt, dessen Seite der Schenkellänge gleich ist.

Auflösung. Sind die Winkel α, β, γ des Dreiecks ABC in Figur 232 der Reihe nach 30^0, 60^0, 90^0, so ist die Kathete BC gegenüber dem kleinsten Winkel von 30^0 die kleinste. Trägt man dann am Punkte C den Winkel 30^0 an die längste Kathete CA an, so entstehen zwei Teildreiecke ACD und BCD. Im ersteren ist $\sphericalangle A = 30^0 = \sphericalangle ACD$, also $AD = CD$; im zweiten ist $\sphericalangle B = 60^0 = \sphericalangle BCD$, also auch $\sphericalangle BDC = 60^0$, und folglich $BC = CD = DB$. Daher sind die beiden Teile der Hypotenuse gleichgross und je gleich der Kathete BC, also die ganze Hypotenuse doppelt so gross wie diese Kathete.

Aufgabe 133. Wie ändern sich die Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine Kathete unverändert bleibt, und ihr anliegender spitzer Winkel wächst?

Auflösung. Wenn die Kathete AC in Figur 233 und ebenso der rechte Winkel bei C unverändert bleibt, und der Winkel α wächst, so muss sein Komplementwinkel $\beta = 90 - \alpha$ abnehmen. Durch das Zunehmen des Winkels α rückt aber gleichzeitig Punkt B auf der Linie BC weiter weg vom Fusspunkte C der Senkrechten von A auf BC. Daher wird die andere Kathete BC stets

Figur 233.



Erkl. 555. Bildet man aus der Kathete CB und der Hypotenuse einen Bruch, dessen Zähler die Kathete, dessen Nenner die Hypotenuse ist, so ist dessen Wert kleiner als 1, und es muss in diesem Bruch $\frac{CB}{AB}$ sowohl Zähler als Nenner mit wachsendem Winkel α zunehmen. Würden beide in gleichem Verhältnis wachsen, so bliebe der Wert des Bruches derselbe. Nach nebenstehender Ausführung aber wächst der Zähler rascher als der Nenner, folglich wird auch der Bruch $\frac{\text{Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$ bei wachsendem Gegenwinkel dieser Kathete immer grösser, bei abnehmendem Gegenwinkel kleiner.

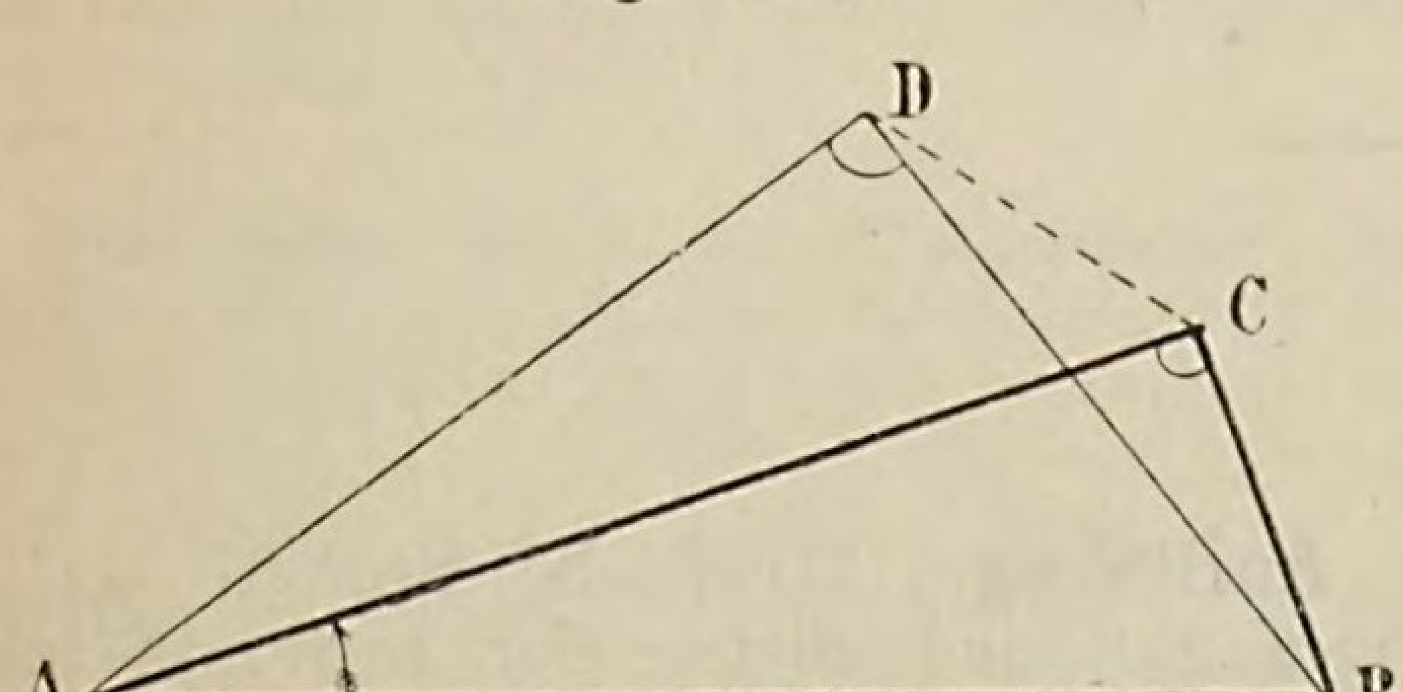
Erkl. 556. Da der Bruch $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ sich mit änderndem Winkel α ebenfalls verändert, so heisst er eine „Funktion" des Winkels α, und zwar wird derselbe als „Sinusfunktion" des Winkels α bezeichnet (siehe Kleyer, Lehrbuch der Goniometrie).

grösser, und die Hypotenuse AB als schiefe Linie ebenfalls grösser. Und zwar wächst die Kathete noch rascher als die Hypotenuse; denn der Zuwachs BB_1 der Kathete ist grösser als die bei gleichem Winkelzuwachs entstehende Zunahme $AB_1 - AB$ der Hypotenuse.

Trägt man nämlich auf AB_1 die Strecke AB ab $= AD$, so muss ABD ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite BD werden, also $\sphericalangle ADB$ ein spitzer und $\sphericalangle BDB_1$ ein stumpfer sein. Das Stück $DB_1 = AB_1 - AD = AB_1 - AB$ liegt also in dem stumpfwinkligen Dreieck BDB_1 dem spitzen, dagegen BB_1 dem stumpfen Winkel gegenüber. Folglich ist das Stück BB_1 stets grösser als die Zunahme der Hypotenuse.

Aufgabe 134. Wie ändern sich die Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Hypotenuse unverändert bleibt, und ein ihr anliegender spitzer Winkel wächst?

Figur 234.



Erkl. 557. Für die Ausdrücke „gegenüberliegende Kathete" und „anliegende Kathete" eines Winkels gebraucht man auch die kürzeren Bezeichnungen „Gegenkathete" und „Ankathete".

Auflösung. Wenn die Hypotenuse AB in Figur 234 unverändert bleibt und der Winkel α zunimmt, so findet man die neue Lage D des Punktes O, indem man von B aus auf den neuen Schenkel eine Senkrechte errichtet. Dann muss der neue Winkel $\beta = 90 - \alpha$ als Komplement eines grösseren Winkels α kleiner sein als der vorherige, und da die Winkel ACB und ADB rechte sind, so müssen DCB und ADC stumpfwinklige Dreiecke sein. Demnach muss die dem stumpfen Winkel bei C gegenüberliegende neue Kathete BD grösser sein, als die im gleichen Dreieck BCD befindliche vorherige Kathete BC. Dagegen muss die dem stumpfen Winkel bei D gegenüberliegende vorherige Kathete AC grösser sein, als die im gleichen Dreieck ADC befindliche neue Kathete AD.

Erkl. 558. Bildet man aus der Gegenkathete CB des Winkels α als Zähler und dessen Ankathete CA als Nenner einen Bruch, so muss in diesem Bruch $\frac{CB}{CA}$ bei wachsendem Winkel α der Zähler CB wachsen und der Nenner CA abnehmen. Schon der eine dieser beiden Umstände würde genügen, den Bruch wachsen zu machen. Da aber nach Nebenstehendem beide Umstände sogar zusammentreffen, so muss der Brnch $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ bei wachsendem Winkel desto rascher zunehmen, bei abnehmendem Winkel rasch abnehmen.

Erkl. 559. Da dieser Bruch $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ sich mit änderndem Winkel α ebenfalls verändert, so heisst er eine „Funktion" des Winkels α, und zwar wird derselbe als „Tangensfunktion" des Winkels α bezeichnet (siehe Kleyer, Lehrbuch der Goniometrie).

Wenn also ein spitzer Winkel des rechtwinkligen Dreiecks wächst und die Hypotenuse unverändert bleibt, so wächst die Gegenkathete des Winkels, und die Ankathete nimmt ab.

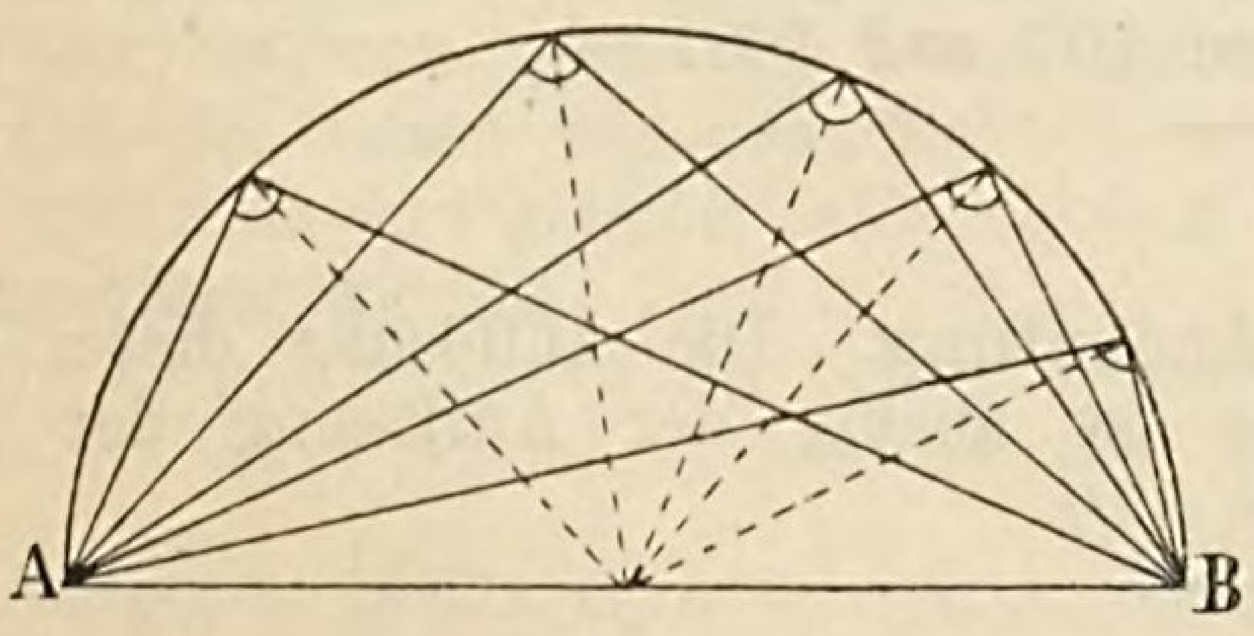
Aufgabe 135. Man soll beweisen, dass im rechtwinkligen Dreieck die Mittelsenkrechten beider Katheten durch den Mittelpunkt der Hypotenuse gehen.

Erkl. 560. Der nebenstehende Beweis ergibt einen ganz besondern Fall eines allgemeinen Gesetzes für die Dreiecke, welches im nächsten Teile dieses Lehrbuches behandelt wird, im Abschnitt über die besonderen Punkte im Dreieck.

Auflösung. Da jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Kathete nach Satz 14 gleichen Abstand haben muss von den Endpunkten der Kathete, so muss dies auch vom Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten mit der Hypotenuse gelten. Nach Satz 60 hat aber der Mittelpunkt der Hypotenuse gleiche Entfernung von den drei Eckpunkten des Dreiecks, also muss jener Schnittpunkt und dieser Mittelpunkt zusammenfallen.

Aufgabe 136. Man zeichne über einer beliebigen Strecke AB als Durchmesser einen Halbkreis und beweise, dass die Verbindungslinie jedes Kreispunktes mit A und B einen rechten Winkel bildet.

Figur 235.

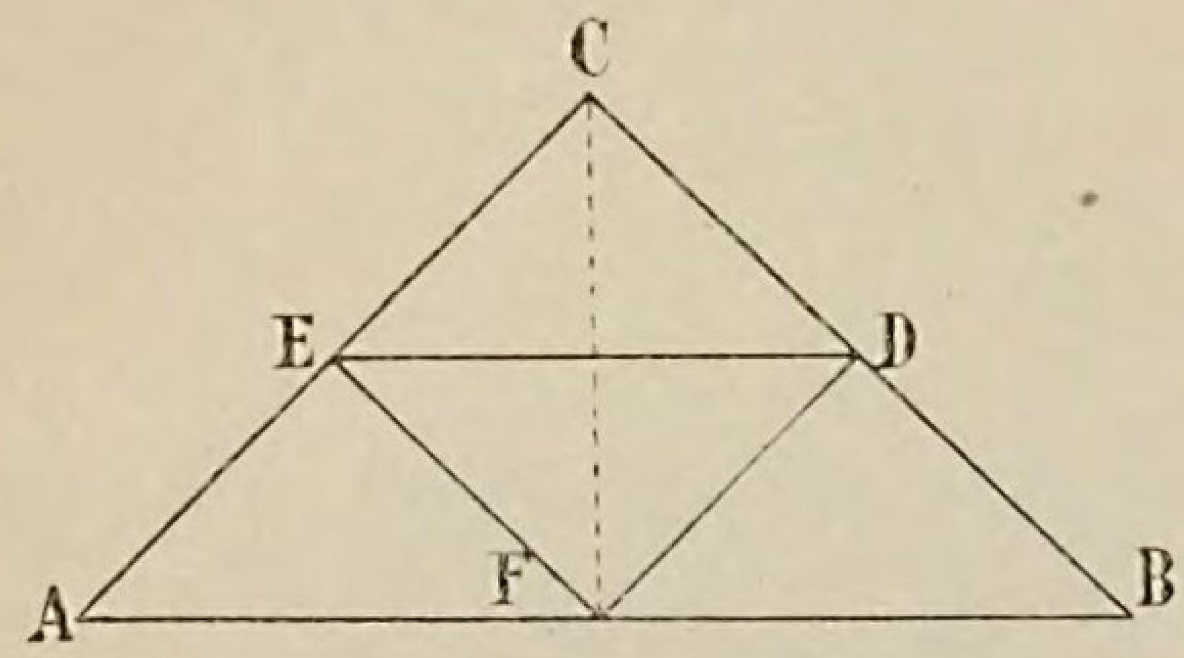


Erkl. 561. Nach dem Nebenstehenden hätte man den Punkt D der Figur 234 statt durch Konstruktion der Senkrechten von B auf AD auch finden können als Schnittpunkt der Linie AD mit dem Halbkreis über AB.

Auflösung. Jeder Punkt des Halbkreises über AB hat vom Kreismittelpunkt den gleichen Abstand, wie A und B, nämlich $\frac{AB}{2}$. Folglich bilden je zwei Verbindungsstrecken mit A und B ein Dreieck, in welchem die Entfernung einer Ecke von der Mitte der Gegenseite gleich der Hälfte dieser Seite ist, also muss nach Satz 60 jedes dieser Dreiecke ein rechtwinkliges d. h. jeder Winkel zweier Verbindungslinien ein rechter sein.

Aufgabe 137. Man soll beweisen, dass die Mittelpunkte der Seiten eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks wieder ein ebensolches Dreieck bilden.

Figur 236.



Erkl. 562. Nicht nur das Dreieck DEF, sondern auch die drei andern Teildreiecke AEF, BDF, DEC sind gleichschenklig und rechtwinklig, und ebenso CDF und CEF. Dies lässt sich leicht unmittelbar beweisen, geht aber auch hervor aus der Antwort der Frage 110 und aus Satz 85.

Auflösung. Sind D, E, F in Figur 236 die Seitenmitten des Dreiecks ABC, so sind in Bezug auf die Mittellinie CF als Symmetrieachse D und E symmetrische Punkte, also DE Achsensenkrechte und parallel AB. Wegen derselben Symmetrie sind auch DF und EF symmetrisch gleiche Strecken. Jede von ihnen ist aber nach Satz 60a in dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck BFC bezw. AFC gleich der halben Hypotenuse BC, bezw. AC, also $DF = EF = BD = AE$. Demnach sind die Dreiecke AEF und BDF gleichschenklig, die Winkel bei A, B und F je gleich 45^0, und folglich auch deren innere Wechselwinkel bei D und E gleich 45^0, und der dritte Winkel des Dreiecks DEF bei F gleich 90^0.

Also ist DEF ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.

Aufgabe 138. Es soll das Anwachsen der Zahlen der Teilungslinien und Teildreiecke des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks untersucht werden, durch welche dasselbe nach Erkl. 203 und Figur 87 in kongruente Felder geteilt wird.

Erkl. 563. Da die Felder stets sämtlich kongruent sind, so bilden ihre Inhalte eine absteigende Reihe nach Potenzen von 2:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n} \text{ oder } 2^{-n}.$$

Auflösung. Das rechtwinklig - gleichschenklige Dreieck wird geteilt durch jeweils so viele neue Teilungslinien, als bereits Felder vorhanden sind, also durch:

1 Linie erster Art in 2 Felder, durch

2 Linien zweiter Art in 4 Felder, durch

4 Linien dritter Art in 8 Felder, durch

8 Linien vierter Art in 16 Felder, allgemein durch ·· 2^{n-1} Linien n-ter Art in 2^n Felder.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 139. Man zeichne ein stumpfwinklig-gleichschenkliges Dreieck und bestätige an ihm die Ergebnisse der Aufgaben 107 und 108.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 107 und 108.

Aufgabe 140. Man unterscheide an einem stumpfwinklig-gleichschenkligen Dreieck die „unteren“ und „oberen“ Höhenabschnitte.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 110.

Aufgabe 141. Man verlängere in einem gleichschenkligen Dreieck einen Schenkel um sich selbst über den Scheitel hinaus, und untersuche die Verbindungslinie des Endpunktes mit der Grundseitenecke.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 136.

Aufgabe 142. Wie gestaltet sich Aufgabe 125 für stumpfwinklig-gleichschenklige Dreiecke?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 125.

Aufgabe 143. Könnte in Aufgabe 126 auch die Grundseite selbst halbiert werden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist mittels Satz 31 zu bewerkstelligen.

Aufgabe 144. Welches müssen die Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sein, in welchem die Winkelhalbierende eines Winkels an der Grundseite der Grundseite selbst gleich wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 127. Man setze die Beziehungen der Winkel in den entstehenden gleichschenkligen Dreiecken an.

Aufgabe 145. Welches müssen die Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sein, in welchem die Winkelhalbierende eines Winkels an der Grundseite mit dem Scheitelpunkt wieder ein gleichschenkliges Dreieck bildet?

Andeutung. Wie bei der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 146. Man beweise, dass, wenn in einem gleichschenkligen Dreieck die Halbierungslinie eines Winkels an der Grundseite mit dem Scheitelpunkt wieder ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dieselbe auch gleich der Grundseite sein muss und umgekehrt.

Andeutung. Wie bei der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 147. Man beweise, dass im gleichseitigen Dreieck ein oberer Höhenabschnitt das Doppelte vom unteren sein muss.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist die Anwendung der Aufgabe 130 für den Schnittpunkt der drei Höhen.

Aufgabe 148. Was für Winkel muss ein Dreieck besitzen, wenn die Senkrechten auf zwei seiner Seiten von den Punkten, welche die dritte in drei gleiche Teile teilen, Mittelsenkrechten werden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 122.

Aufgabe 149. Man beweise, dass ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, wenn man die Halbierungslinie eines Winkels durch eine Parallele zu einem der Schenkel durchschneidet.

Andeutung. Man beachte das Entstehen gleicher Wechselwinkel.

Aufgabe 150. Man beweise, dass ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, wenn man einen der Innenwinkel einer Transversale mit einer von zwei gegebenen Parallelen halbiert.

Andeutung. Wie bei der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 151. Man beweise aus der vorigen Aufgabe, dass die Winkelhalbierenden entgegengesetzter Winkel an Parallellen senkrecht sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Anwendung des Satzes 57.

Aufgabe 152. Man untersuche die einzelnen Strecken, welche nach dem Verfahren in Frage 109 auf der Grundseite des rechtwinkligen Dreiecks in Figur 85 entstehen.

Andeutung. Man berücksichtige die Gleichheit der Schenkel gegenüber gleichen Winkeln.

Aufgabe 153. Man beweise, dass in Fig. 87 je zwei der schiefen Linien, welche von einem gegebenen Punkte der Grundseite nach den Schenkeln gehen, gleichlange Summen haben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 124.

Aufgabe 154. Man beweise, dass die Behauptung in Aufgabe 124 auch für Punkte der Grundseite ausserhalb des Dreiecks gilt, wenn solche Strecken negativ gerechnet werden, welche nach auswärts vom Dreieck (also abwärts von der Grundseite) gerichtet sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 124 und 129.

Aufgabe 155. Man beweise die Giltigkeit des Satzes in Aufgabe 125 für Punkte ausserhalb des Dreiecks mit derselben Beschränkung.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 125 und 129.

Aufgabe 156. Man zeichne und beweise die in Erkl. 551 aufgestellten Fälle der Behauptung.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 129 und 130.

Aufgabe 157. Man trage bei einem rechtwinkligen Dreieck auf eine Kathete die Hypotenuse auswärts oder einwärts ab und untersuche die entstehenden Dreiecke.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog dem Verfahren in der Antwort auf Frage 109.

Aufgabe 158. Man verlängere oder verkürze bei einem rechtwinkligen Dreieck die eine Kathete um die andere und untersuche die entstehenden Dreiecke. — Man verbinde das Verfahren wie bei der vorigen Aufgabe, wiederhole dasselbe auch beim rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck.

Andeutung. Wie bei der vorigen Aufgabe.

3) Aufgaben über die Konstruktion von Dreiecken.

(Zu Abschnitt C 1 d.)

a) Ueber Konstruktionsaufgaben im allgemeinen.

Frage 213. Aus wie vielen und welchen Teilen besteht die Auflösung einer Konstruktionsaufgabe?

Erkl. 564. Wenn im Vorhergehenden oder Folgenden nicht bei allen Konstruktionsaufgaben die sämtlichen vier Teile ausdrücklich hervorgehoben sind, so hat dies seinen Grund darin, dass bei vielen dieser Aufgaben die Aufgabestellung schon die Analysis, und die Ausführung den Beweis in sich selbst enthalten.

Antwort. Bei der Auflösung einer Konstruktionsaufgabe unterscheidet man vier Teile, nämlich:

1) Die Analysis oder Analyse oder Ueberlegung,

2) die Synthese oder Konstruktion oder Ausführung,

3) den Beweis,

4) die Determination oder Ausführbarkeit.

Frage 214. Worin besteht die Analysis bei einer Konstruktionsaufgabe?

Erkl. 565. Das Wort Analysis kommt von dem griechischen ἀνά auf und λύω lösen, heisst also wieder Auflösung, Zergliederung der Aufgabe. — Die zur Analysis gezeichnete Figur heisst auch Analysisfigur oder Ueberlegungsfigur.

Erkl. 566. Als Vermittlung des Uebergangs von den gesuchten zu den gegebenen Stücken und umgekehrt dienen Eigenschaften der Figuren, Lehrsätze, einfachere Konstruktionsaufgaben.

Antwort. Die Analysis bei einer Konstruktionsaufgabe besteht darin, dass man sich die Aufgabe als gelöste denkt, und die Beziehungen aufsucht, durch welche sich die unbekannten Stücke der Figur mit den gegebenen verknüpfen lassen. Dazu zeichnet man nach Vermutung oder nach dem Augenmass eine Figur, welcher die verlangte ungefähr gleichen soll, und sucht an dieser Figur einen solchen Uebergang von den als vorhanden gedachten unbekannten Stücken zu den gegebenen, welcher rückwärts wieder von den gegebenen zu den gesuchten soll führen können.

Frage 215. Worin besteht die eigentliche Konstruktion bei einer Konstruktionsaufgabe?

Erkl. 567. Bei jeglicher Konstruktionsaufgabe pflegen die drei Gruppen von Willkürlichkeiten einzutreten, welche in Antwort der Frage 113 besprochen sind, und welche bestehen in der Wahl:

1) eines ersten Punktes,

2) einer ersten Richtung,

3) der Drehungsrichtung eines ersten Winkels.

Antwort. Die Konstruktion gibt an, wie man von einem der gegebenen Stücke auszugehen, an dieselben anzuknüpfen, sie aneinander zu fügen hat, um mittels der in der Analysis gefundenen Beziehungen zwischen ihnen und den unbekannten Stücken zu den gesuchten Stücken zu gelangen, und so die verlangte Figur zu erhalten.

Frage 216. Worin besteht der Beweis bei einer Konstruktionsaufgabe?

Erkl. 568. Der Beweis hat auch zu zeigen, dass die gefundene Figur solche Eigenschaften enthält, welche zwar nicht als nach ihrer Grösse gegebene Stücke vorgeschrieben wurden, aber durch den blossen Namen der verlangten Figur in der Aufgabe vorgeschrieben sind.

Antwort. Der Beweis bei einer Konstruktionsaufgabe hat darzuthun, dass die gefundene Figur den in der Aufgabe enthaltenen Vorschriften auch wirklich entspricht, dass also die sämtlichen gegebenen Stücke in der gefundenen Figur sowohl ihrer vorgeschriebenen Grösse, als ihrer vorgeschriebenen Lage nach enthalten sind.

Frage 217. Worin besteht die Determination bei einer Konstruktionsaufgabe?

Erkl. 569. Der erste Teil der Determination beschränkt sich auf die Betrachtung der gegebenen Stücke. Der zweite aber erhebt sich über diesen Standpunkt der Aufgabestellung selber und betrachtet die vollendete Aufgabe vom allgemeinsten, nicht bloss praktischen, sondern theoretisch wissenschaftlichen Gesichtspunkte aus.

Antwort. Die Determination bei einer Konstruktionsaufgabe hat eine doppelte Bestimmung.

Erstens gibt die Determination an, ob aus den gegebenen vorliegenden Stücken überhaupt eine Lösung, und ob aus derselben nur eine oder mehrere, und wie viele Lösungen möglich sind.

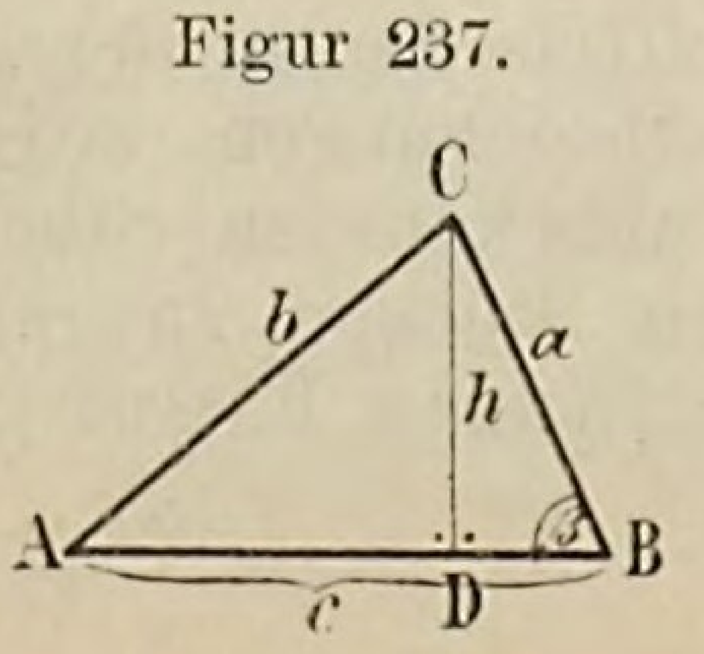
Zweitens gibt die Determination an, welchen Einfluss auf die Möglichkeit und Anzahl der Lösungen beliebige Veränderungen der gegebenen Stücke ausüben könnten.

Anmerkung 4. Da die Lösung von Konstruktionsaufgaben eines der Hauptziele der mathematischen Wissenschaften im allgemeinen und der Geometrie im besonderen bildet, so sind derselben in dieser Encyklopädie besondere Bücher gewidmet. In diesen findet man eine grosse Anzahl von Aufgabengruppen mit vielen einzelnen Beispielen. Es sind daher an dieser Stelle dieses Lehrbuches nur diejenigen grundlegendsten Konstruktionsaufgaben aufgeführt, welche mit der Theorie selbst im engsten und untrennbaren Zusammenhang stehen, und deren Kenntnis für das weitere Studium der Planimetrie unumgänglich nötig ist. Wegen aller übrigen wird nur auf die Hauptvertreter einzelner Gruppen verwiesen und der Weg angedeutet werden, wie man von den grundlegenden oder sogenannten Fundamentalaufgaben zu den allgemeineren und schwierigeren Aufgaben fortschreiten kann.

b) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 159. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Seite, ihr Gegenwinkel und eine nicht zugehörige Höhe, also etwa die Stücke b, β, h_c.

Figur 237.



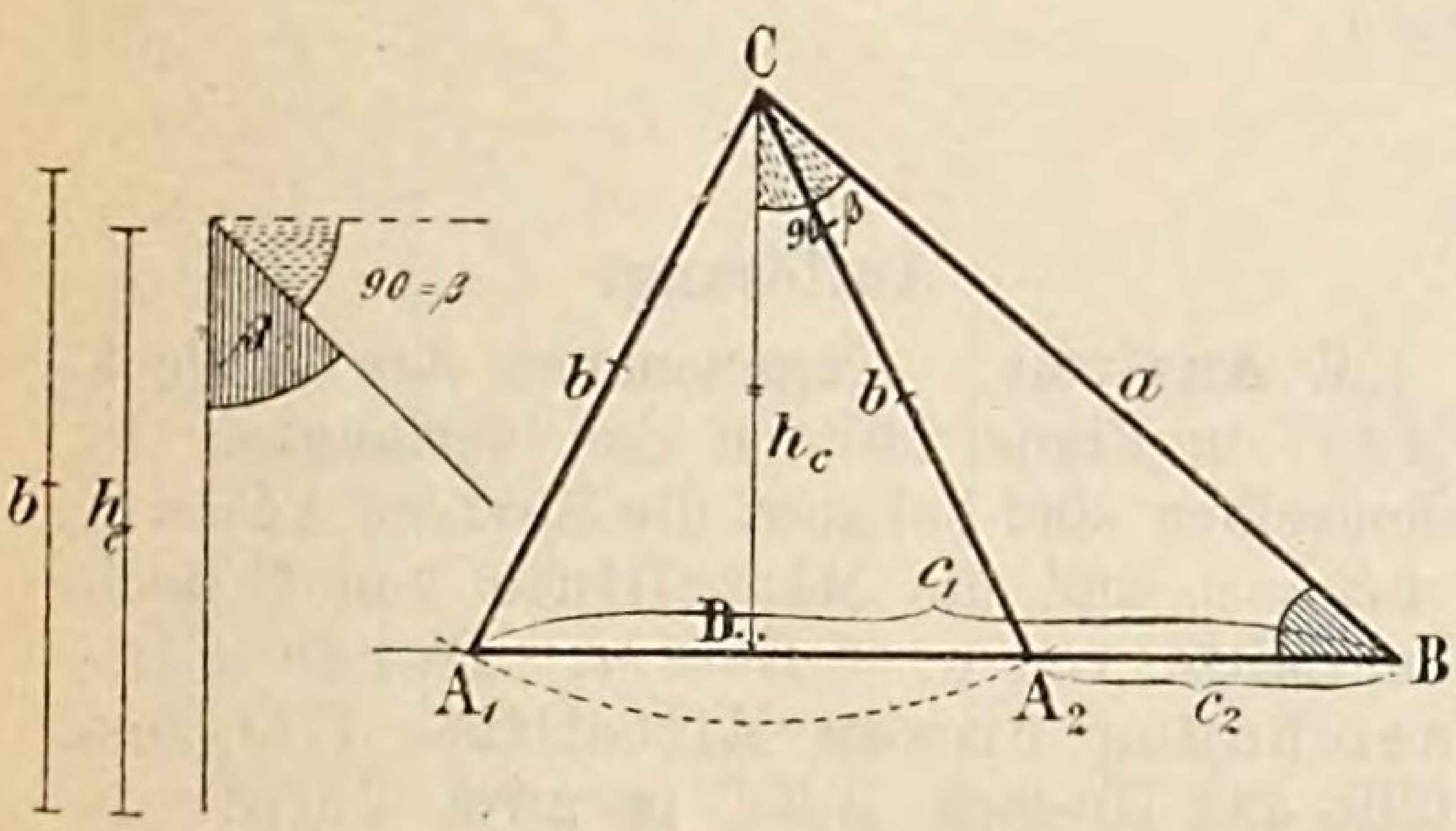
Auflösung.

I. Analysis. Angenommen das Dreieck AB in Figur 237 sei das verlangte. In demselben sind bekannt die Seite $AC = b$, der Winkel $ABC = \beta$ und die zur Seite c gehörige Höhe $CD = h$. Durch Einzeichnung der Höhe CD entstehen zwei rechtwinklige Teildreiecke, ACD und BCD. In dem ersteren ACD kennt man die Seite $AC = b$, die Seite $CD = h$ und den rechten Winkel ADC bei D. Also ist dieses Teil-

Erkl. 570. Wie in Antwort der Frage 112 und Erkl. 206 angegeben wird, können ausser Seiten und Winkeln eines Dreiecks auch Höhen, Mittellinien u. s. w. als „Stücke“ zur Konstruktion vorgeschrieben werden. Aus diesen Stücken bildet man sodann einzelne Teildreiecke, mittels deren das ganze Dreieck zusammengesetzt wird.

Erkl. 571. Die Bezeichnung der gegebenen Stücke durch Buchstaben hat stets nach der in den Antworten der Fragen 70, 71, 84 und Erkl. 169 ausgeführten Art und Weise zu geschehen. Umgekehrt bildet es einen wesentlichen Teil einer Aufgabenstellung, wenn die gegebenen Stücke nur durch ihre Bezeichnung mit Buchstaben angegeben sind, dann die Aufgabe in Worte mit richtiger Benennung der gegebenen Stücke einzukleiden. Man vergleiche darüber diese und die folgenden Aufgaben.

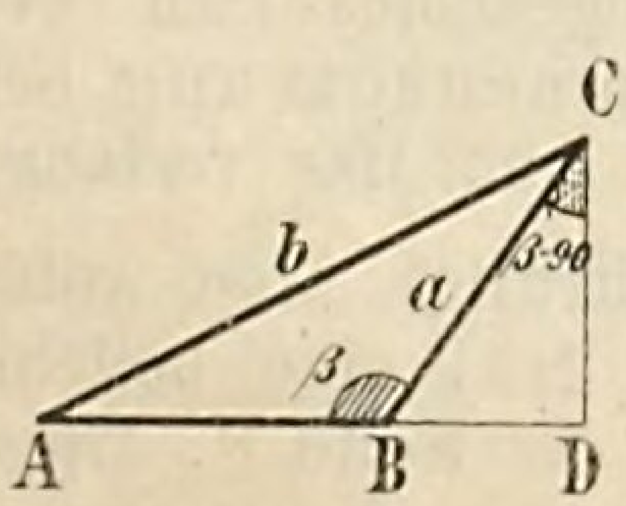
Figur 238.



Erkl. 572. Man kann auch, statt mit Strecke $CD = h$ zu beginnen, zuerst die Linie c als Grundlinie wählen und auf ihr in beliebigem Punkte D die Senkrechte von der Länge h errichten. Es ist ferner vollständig gleichgültig, mit welchem der beiden Teildreiecke begonnen wird, ob also zuerst das Teildreieck ACD oder BCD konstruiert wird.

Erkl. 573. Ist β ein stumpfer Winkel, so ist sein Komplementwinkel $90^0 - \beta$ negativ, nämlich gleich $-(\beta - 90^0)$. Daher wäre dieser Winkel $\beta - 90^0$ in der negativen Umdrehungsrichtung, also nach links von der Strecke CD anzutragen, um den Punkt B auf der Grundlinie auszuschneiden (siehe Figur 239).

Figur 239.



Erkl. 574. Es gehört zum Beweise nicht nur, dass die gegebene Strecke h im Dreieck

dreieck konstruierbar aus den zwei Seiten b und h und dem der grösseren von beiden gegenüberliegenden rechten Winkel. Von dem andern Teildreieck BCD kennt man die Seite $CD = h$ und die zwei Winkel $ABC = \beta$ und $BDC = 90^0$, folglich wegen der Winkelsumme von 180^0 auch den dritten Winkel $BCD = 90 - \beta$. Also ist auch dieses Teildreieck vollständig konstruierbar, nämlich aus einer Seite und den drei Winkeln. Durch Zusammensetzung beider Teildreiecke entsteht dann das verlangte.

II. Ausführung. Man wähle willkürlich eine beliebige Linie als Richtung der Linie h, trage darauf die gegebene Länge h als Strecke CD ab und errichte im Punkte D eine Senkrechte auf h nach beiden Seiten. Sodann konstruiere man den Winkel (h, a) als Komplementwinkel zum gegebenen Winkel β, trage denselben im Punkte C an CD im positiven Drehungssinne (mit der Uhrzeigerdrehung) an, und bezeichne den Schnittpunkt seines Schenkels mit der Senkrechten als Punkt B. Alsdann nehme man die gegebene Strecke b in den Zirkel und beschreibe um Punkt C als Mittelpunkt einen Kreisbogen mit Radius b. Der Schnittpunkt dieses Kreisbogens links vom Punkte B ist Punkt A.

III. Beweis. Das gefundene Dreieck ABC besitzt die verlangten Eigenschaften, denn es ist Seite AC abgetragen $= b$, die Höhe von C auf c ist als Senkrechte konstruiert und abgetragen gleich der gegebenen Länge h, und Winkel ABC ist im rechtwinkligen $\triangle BCD$ Komplementwinkel zum Winkel BCD, also zum Winkel $90^0 - \beta$. Daher ist $\sphericalangle ABC = 90^0 - (90^0 - \beta) = \beta$.

IV. Determination. Die Aufgabe ist nur lösbar wenn die Senkrechte h kürzer ist, als die schiefe Linie b. Sie ergibt zwei verschiedene Lösungen, wenn der Kreisbogen um C mit Radius b die Seite c zweimal schneidet links vom Punkte B, wenn also die Seite b bei spitzem Winkel β kleiner ist, als die im Teildreieck BCD entstehende Seite a; sie ergibt nur eine Lösung, wenn β stumpf oder bei spitzem Winkel β Seite b gleich oder grösser ist, wie die Seite a des Teildreiecks BCD; aber keine Lösung, wenn bei stumpfem Winkel β die Seite b kleiner ist, als die im Teildreieck BCD entstehende Seite a.

ABC vorhanden sei, sondern auch, dass sie als Höhe vorhanden ist. Daher muss nachgewiesen werden, dass die gegebene Strecke h_c 1) auf der Grundlinie c senkrecht steht und 2) die vorgeschriebene Länge hat.

Erkl. 575. In Figur 239 würde der Schluss des Beweises ausführen, dass $\sphericalangle BCD$ abgetragen $= \beta - 90$ sei, und dass $\sphericalangle ABC$ als Aussenwinkel:

$$= 90^0 + BCD = 90 + (\beta - 90) = \beta.$$

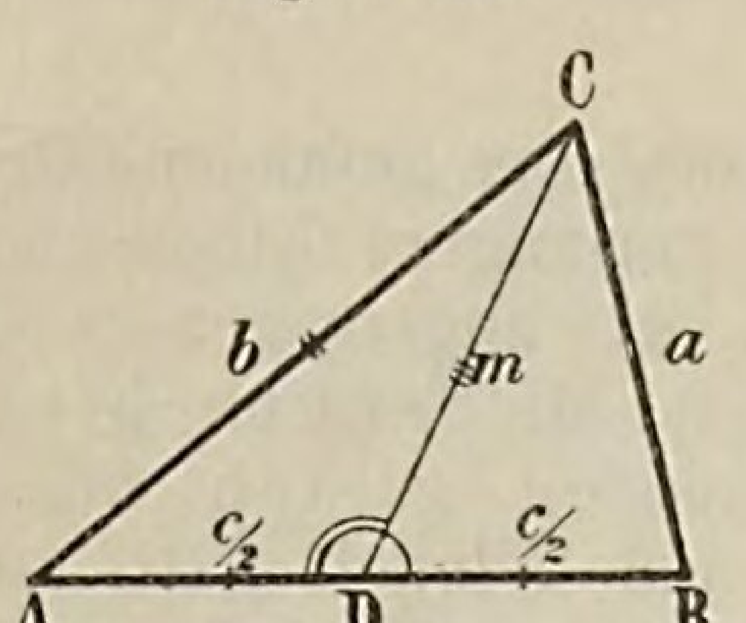
In diesem Falle eines stumpfen Winkels β wäre auch für die Länge der Seite b nicht die Länge h als untere Grenze zu setzen, sondern es müsste dann b auch länger sein, als die im Teildreieck BCD entstehende Seite a.

Erkl. 576. Zahlenmässige Festsetzung der Grenzen, zwischen welchen sich einzelne gegebene Stücke befinden müssen, ist nicht in der Planimetrie, sondern erst mittels der Trigonometrie möglich.

Aufgabe 160. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind die Stücke b, c, m_c, d. h.:

zwei Seiten und die zur einen derselben gehörige Mittellinie.

Figur 240.



Erkl. 577. Bei denjenigen Aufgaben, bei welchen die Höhe des Dreiecks gegeben ist, werden die beiden Teildreiecke rechtwinklig. Ist statt der Höhe aber entweder die Mittellinie oder die Winkelhalbierende gegeben, so weiss man von beiden Teildreiecken nur, dass die Seiten $\frac{c}{2}$ bezw. die Winkel $\frac{\gamma}{2}$ in beiden gleich sind. Die erstere Gruppe von Aufgaben ist daher vertreten durch die vorige Aufgabe 159, die zweite Art durch Aufgabe 160.

Erkl. 578. Bei dieser Aufgabe kann nicht mehr, wie bei der vorigen Aufgabe 159, mit jedem von beiden Teildreiecken beliebig angefangen werden. Man muss vielmehr hier das Teildreieck ACD aus den Seiten b, m, $\frac{c}{2}$ zuerst konstruieren, da man daraus erst ein weiteres, drittes Stück erhält für die Konstruktion des zweiten Teildreiecks BCD.

Auflösung.

I. Analysis. Angenommen das Dreieck ABC in Figur 240 sei das verlangte. In demselben sind bekannt die Seiten $AC = b$, $AB = c$, und die Mittellinie von C nach der Mitte von c, $CD = m$. Durch Einzeichnung dieser Mittellinie CD zerfällt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke ACD und BCD. In dem ersteren kennt man die Seite $AC = b$, die Seite $CD = m$ und auch die Seite AD als Hälfte der Seite c, also $AD = \frac{c}{2}$. Also kann man dieses Teildreieck ACD konstruieren aus seinen drei Seiten. Von dem andern Teildreieck BCD kennt man wieder die Seite $CD = m$ und $BD = \frac{c}{2}$. Durch Konstruktion des ersteren Teildreiecks ACD entsteht aber der Winkel ADG, welcher als seinen Nebenwinkel den Winkel BDC liefert. Daher kann man nach Konstruktion des ersten auch das zweite Teildreieck BCD konstruieren, nämlich aus zwei Seiten, m und $\frac{c}{2}$, und dem eingeschlossenen Winkel BDC. Durch Zusammensetzung beider Teildreiecke entsteht dann das verlangte.

II. Ausführung. Man wähle willkürlich (siehe Figur 241) eine beliebige Linie als die Richtung der Seite c, trage darauf die gegebene Länge c ab als Strecke AB, und suche deren Mittelpunkt D. Um die Punkte A bezw. D beschreibe man Kreisbögchen

Erkl. 579. Auch bei dieser Aufgabe ist von der Linie $CD = m$ zu beweisen: 1) dass sie Mittellinie ist, d. h. dass sie von C zum Mittelpunkte der Seite AB geht, 2) dass sie die vorgeschriebene Länge m hat. (Vergleiche Erkl. 574.)

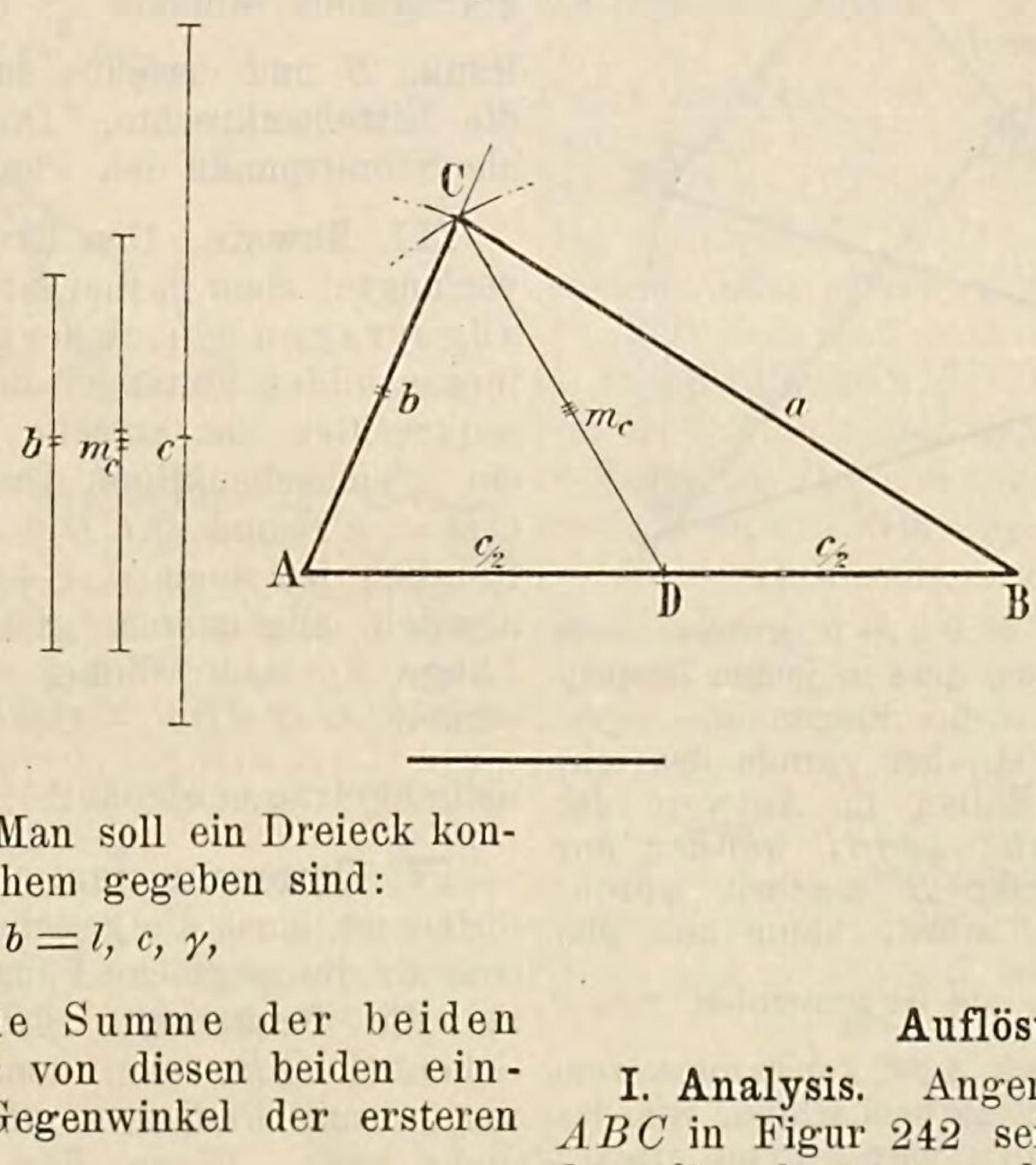
Erkl. 580. Will man die Bedingung für b, m, $\frac{c}{2}$ in Worten aussprechen, so kann man sagen, die Mittellinie müsse grösser sein, als die Differenz und kleiner als die Summe einer anliegenden Seite und der Hälfte ihrer zugehörigen Seite; oder die Seite c müsse zwischen der doppelten Summe und Differenz einer andern Seite und der ihr selbst zugehörigen Mittellinie liegen.

mit dem Radius b bezw. m, und bezeichne deren Schnittpunkt als Punkt C. Sodann verbinde man die Punkte B und C.

III. Beweis. Das gefundene Dreieck ABC ist das verlangte, denn es enthält die Seiten AB und AC abgetragen gleich den gegebenen Stücken c und b. Und die Verbindungsstrecke des Punktes C mit dem Mittelpunkte D der Seite c ist abgetragen gleich der vorgeschriebenen Länge m.

IV. Determination. Die Aufgabe ergibt stets nur eine einzige Lösung; und für ihre Ausführbarkeit besteht nur die einzige Beschränkung, dass aus den Stücken b, m, $\frac{c}{2}$ ein Dreieck konstruierbar sei, dass also jede dieser drei Strecken grösser als die Differenz und kleiner als die Summe der beiden andern sei.

Figur 241.



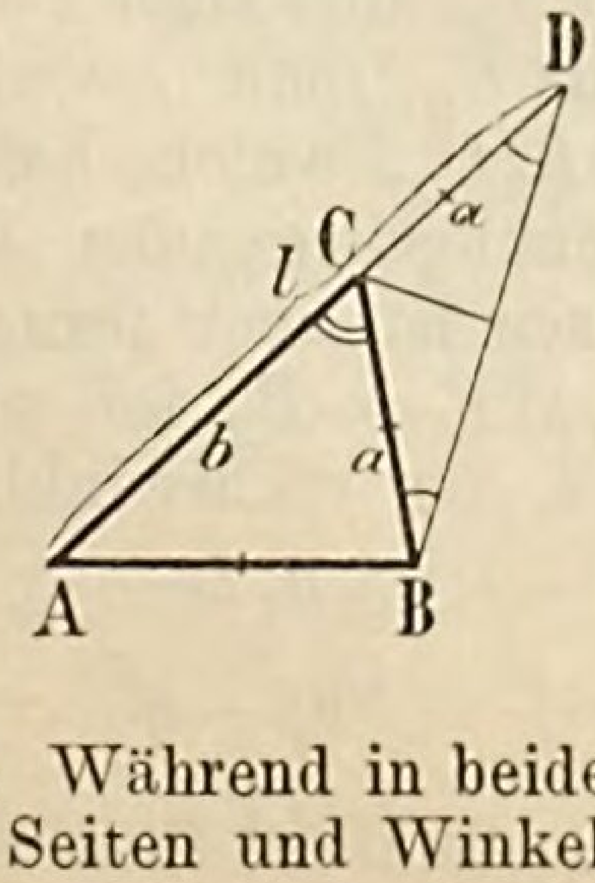
Aufgabe 161. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind:

$$a + b = l,\ c,\ \gamma,$$

also:

eine Seite, die Summe der beiden andern, und der von diesen beiden eingeschlossene Gegenwinkel der ersteren Seite.

Figur 242.



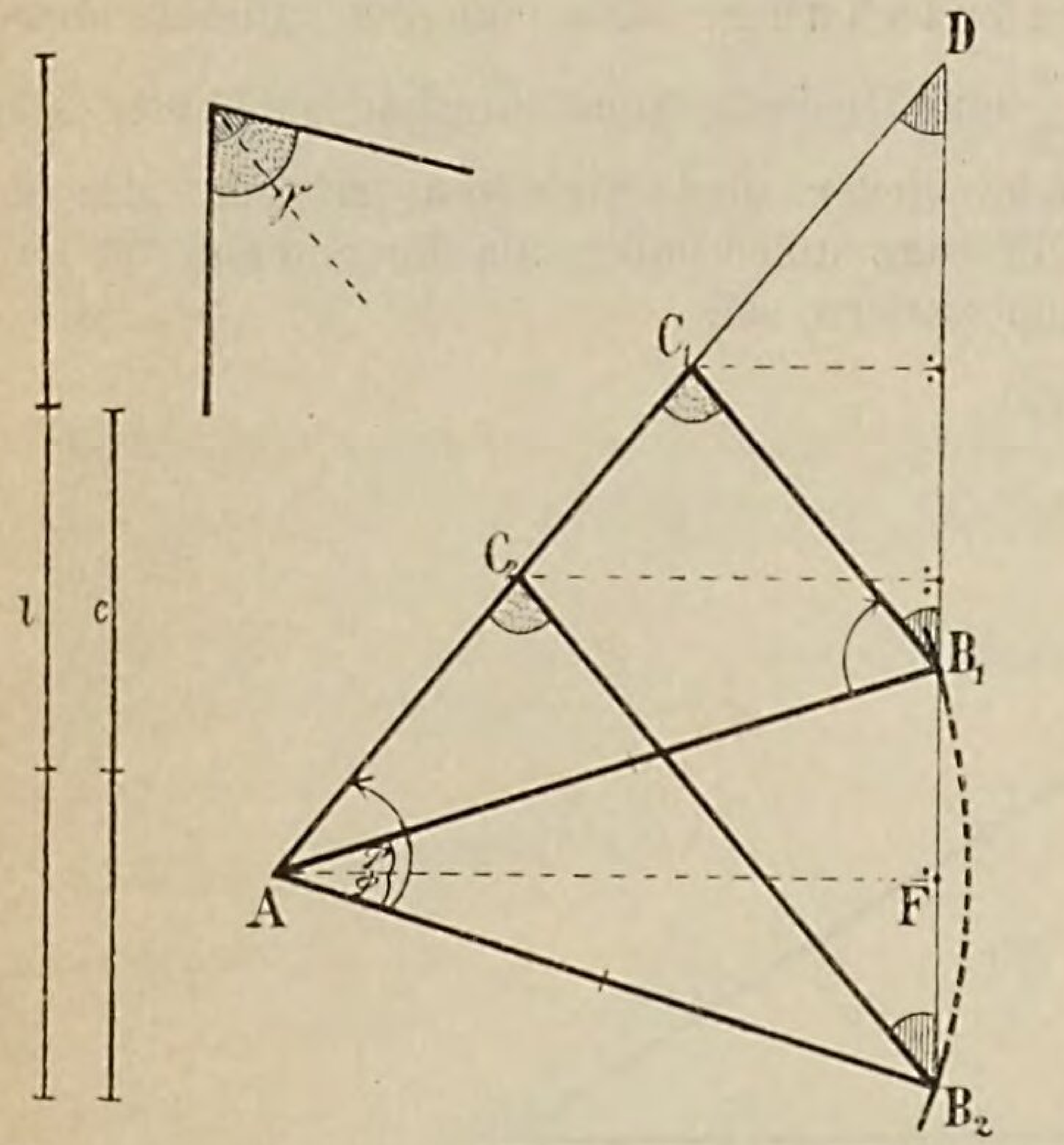
Erkl. 581. Während in beiden vorigen Aufgaben ausser Seiten und Winkeln des Dreiecks

Auflösung.

I. Analysis. Angenommen das Dreieck ABC in Figur 242 sei das verlangte. In demselben kennt man die Seite $AB = c$, die Summe der Seiten $AC + BC = l$, und den Winkel $ACB = \gamma$. Um die Summe $AC + BC$ am Dreieck ABC als Strecke auftreten zu machen, verlängere man die eine der Seiten a oder b um die andere; man macht also z. B. auf der Verlängerung von AC die Strecke $CD = CB$, so dass $AD = AC + BC = a + b$ wird. Von dem so entstehenden Teildreieck BCD weiss man nun, dass dasselbe gleichschenklig ist, dass also der bekannte Winkel γ als Aussenwinkel an der Spitze gleich Winkel $CBD + CDB$

auch andere Stücke auftreten, so sind in dieser Aufgabe 71 wieder nur Seiten und Winkel vertreten, aber nicht einzeln gegeben, sondern als Summe vereinigt. Ebenso kann eine Differenz zweier Seiten gegeben werden. Dann wird, um diese Differenz als Strecke auftreten zu machen, eine Seite um die andere verkürzt. Dabei fällt dann das Teildreieck wieder ganz ins Innere des gesuchten, wie bei Aufgabe 159 und 160, während bei Aufgabe 161 und bei dem Falle des stumpfen Winkels β in Aufgabe 159 (s. Figur 239) das Teildreieck ausserhalb des Hauptdreiecks zu liegen kommt.

Figur 243.



Erkl. 582. Dass $l = a + b$ grösser sein muss als c, folgt daraus, dass in jedem Dreieck mit den Seiten a, b, c die Summe $a + b > c$ sein muss. Dadurch ist aber gerade der einzige von den fünf Fällen in Antwort der Frage 119 ausgeschlossen, welcher nur einen einzigen Punkt B ergeben würde; denn nur wenn $c > l$ wäre, kann aus den Strecken c, l und $\frac{\gamma}{2}$ als Gegenwinkel von c bloss ein einziges Dreieck ABC konstruiert werden. Es ist sogar leicht zu beobachten, wie das Dreieck ABC unmöglich wird, wenn etwa l an der Grenze gleich c würde. Denn dann käme der eine Schnittpunkt B auf D selbst, der andere bildete mit D ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze A, so dass Punkt C mit A zusammenfallen müsste.

Erkl. 583. In Figur 243 sind die beiden Lösungen der Aufgabe durch die Beisetzung der Ziffern 1 und 2 an die Dreiecksbuchstaben auseinandergehalten. Im Wortlaute der „Ausführung" und des Beweises ist eine solche Trennung nicht nötig, da jene sowohl für die mit 1, als auch für die mit 2 bezeichneten Fälle gleichmässig Gültigkeit behalten.

ist, oder gleich $2 \cdot \sphericalangle CDB$. Folglich kennt man von dem grossen Dreieck ABD die Seiten $AB = c$, $AD = l$ und den der Seite c gegenüberliegenden Winkel $ADB = \frac{\gamma}{2}$. Daher kann man dieses Dreieck aus den angegebenen Stücken konstruieren und findet alsdann den Punkt C als Spitze des gleichschenkligen Dreiecks CBD.

II. Ausführung. Man trage die gegebene Länge l auf einer beliebigen Linie ab als Strecke AD, an derselben trage man (mittels des Winkelmessers oder sonstwie) im Punkte D die Hälfte $\frac{\gamma}{2}$ des gegebenen Winkels γ an; nehme sodann die gegebene Länge c in den Zirkel und beschreibe um Punkt A als Mittelpunkt mit dieser Strecke als Radius einen Kreisbogen. Den Schnittpunkt dieses Kreisbogens mit dem zweiten Schenkel des angetragenen Winkels $\frac{\gamma}{2}$ bezeichne man als Punkt B und errichte auf der Strecke BD die Mittelsenkrechte. Diese liefert auf AD als Schnittpunkt den Punkt C.

III. Beweis. Das Dreieck ABC ist das verlangte, denn in ihm ist zunächst Seite AB abgetragen gleich der gegebenen Strecke c; ferner bildet Punkt C als Punkt der Mittelsenkrechten der Strecke BD mit B und D ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem $CD = CB$ und $\sphericalangle CDB = CBD$ sein muss. Folglich ist auch $CA + CB = CA + CD$, nämlich abgetragen gleich der gegebenen Länge l; und Winkel ACB als Aussenwinkel $= \sphericalangle CDB + CBD = 2 \cdot CDB$, nämlich abgetragen gleich $2 \cdot \frac{\gamma}{2}$, also $\sphericalangle ACB = \gamma$.

IV. Determination. Damit die Aufgabe lösbar ist, muss die gegebene Seite c kleiner sein als die gegebene Länge l, aber grösser als die Senkrechte AF von A auf den Schenkel DB, weil sonst der Kreisbogen um A mit Radius C diesen Schenkel gar nicht trifft. Wenn dies aber der Fall ist, so erhält man stets zwei Schnittpunkte B, nämlich B_1 und B_2, also auch zwei Punkte C, nämlich C_1 und C_2, und zwei Dreiecke AB_1C_1 und AB_2C_2, welche beide die Seite c und den gegenüberliegenden Winkel γ besitzen. In diesen ist aber ferner, wenn man den Winkel $B_1AF = B_2AF$ mit φ bezeichnet, $\sphericalangle C_1B_1A$ am rechtwinkligen Dreieck $AB_1F = 180^0 - \sphericalangle C_1B_1D - \sphericalangle AB_1F =$

$$180 - \frac{\gamma}{2} - (90 - \varphi) = 90 - \frac{\gamma}{2} + \varphi$$

und $\sphericalangle C_2AB_2$ am rechtwinkligen Dreieck

Erkl. 584. Es ist sehr bemerkenswert, dass die beiden Dreiecke ABC ungleichwendig kongruent sind. Dieser Umstand liesse sich benutzen, um daraus Lehrsätze zu formulieren. So könnte man folgenden Satz aussprechen:

Wenn an dem Schenkel eines Winkels in zwei Punkten, welche von einem Punkte des andern Schenkels gleichen Abstand haben, derselbe Winkel im entgegengesetzten Drehungssinne nochmals angetragen wird, so bilden die beiden parallelen Strecken mit dem Punkte auf dem andern Schenkel ungleichwendig kongruente Dreiecke.

$DAF = \sphericalangle DAF + \sphericalangle B_2AF = 90 - \frac{\gamma}{2} + \varphi$, also $= C_1B_1A$. Daher haben die beiden gefundenen Dreiecke AB_1C_1 und AB_2C_2 ausser der Seite c zwei, also alle drei Winkel gemeinsam, nämlich:

$\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle B_2AC_2$, $\sphericalangle B_1C_1A = AC_2B_2 = \gamma$, $\sphericalangle C_1AB_1 = C_2B_2A$,

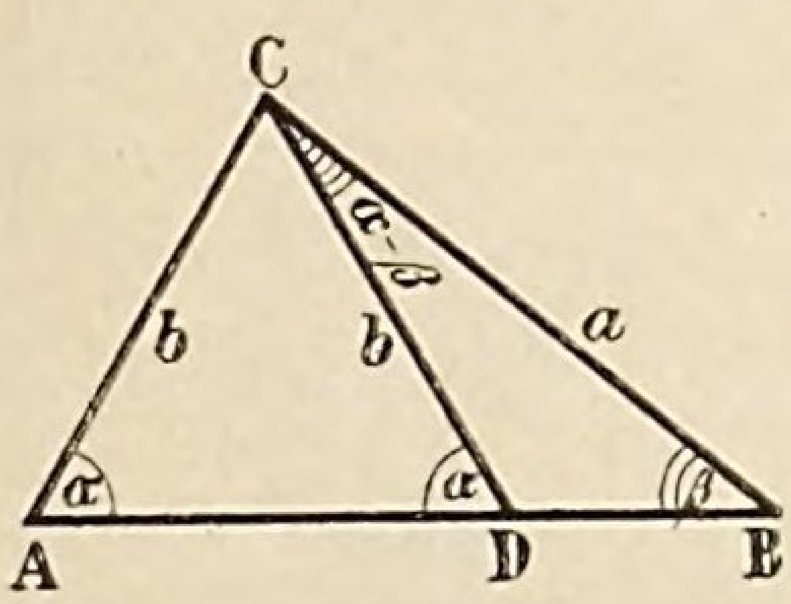
also sind beide Dreiecke ungleichwendig kongruent.

Aufgabe 162. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind die Stücke:

$$a,\ b,\ \alpha - \beta = \delta,$$

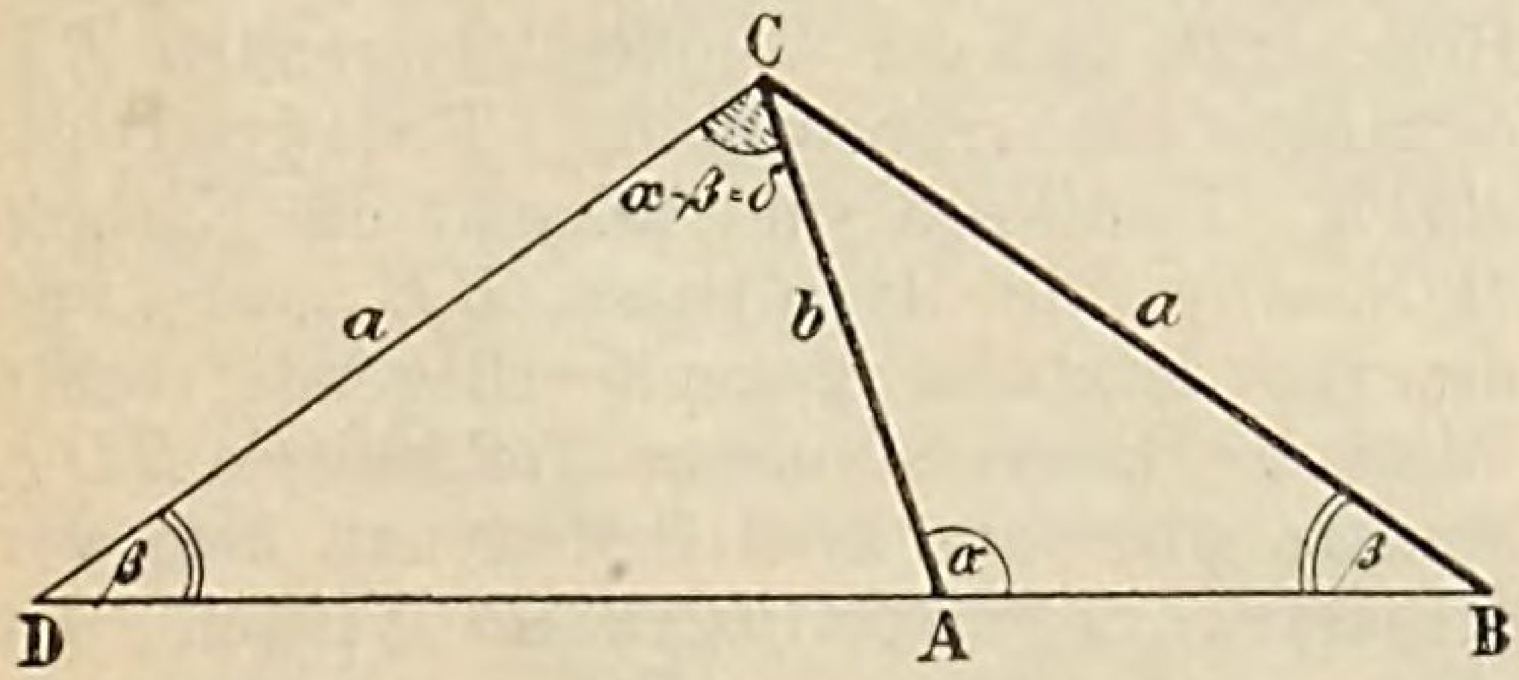
also zwei Seiten und die Differenz ihrer gegenüberliegenden Winkel.

Figur 244.



Erkl. 585. Figur 244 beruht auf der Annahme, dass $\sphericalangle \alpha$ ein spitzer sei. Ist der Winkel α ein stumpfer, so trage man nicht b gegen B hin, sondern a über A hinaus nochmals an, so dass das gleichschenklige Dreieck DBC in Figur 245 entsteht. Dann ist wieder $\sphericalangle ACD = \alpha - \beta$, also Teildreieck ACD konstruierbar aus zwei Seiten AC und CD und dem eingeschlossenen Winkel δ. — Auch die Ausführung könnte daher auf zweierlei Art ausgeführt werden, nämlich nach Figur 244 oder 245, jedoch ist bei jeder Gruppe gegebener Stücke a, b, δ nur immer die eine von beiden anwendbar.

Figur 245.



Auflösung.

I. Analysis. Angenommen, Dreieck ABC in Figur 244 sei das verlangte. In demselben sind bekannt die Seiten $BC = a$, $AC = b$ und die Differenz der Winkel $CAB - CBA = \alpha - \beta = \delta$. Um diesen Winkel δ an der Figur auftreten zu machen, trage man die Seite b von C aus nochmals gegen c ab, so dass $CD = CA$ ist. Dann wird nämlich bei dem Teildreieck BCD der Winkel ADC als Aussenwinkel gleich $\sphericalangle DBC + BCD$, also $\sphericalangle BCD = \alpha - \beta = \delta$. Daher kennt man in dem Teildreieck BCD die Seite $BC = a$, $CD = CA = b$, und den Winkel $BCD = \delta$, so dass das Dreieck konstruierbar wird aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Die Konstruktion dieses Dreiecks liefert aber den Winkel CBD, so dass man mittels dieses Winkels aus $\alpha - \beta$ sowohl α als β finden könnte, oder man ergänzt das gleichschenklige Dreieck ACD, um Punkt A zu finden.

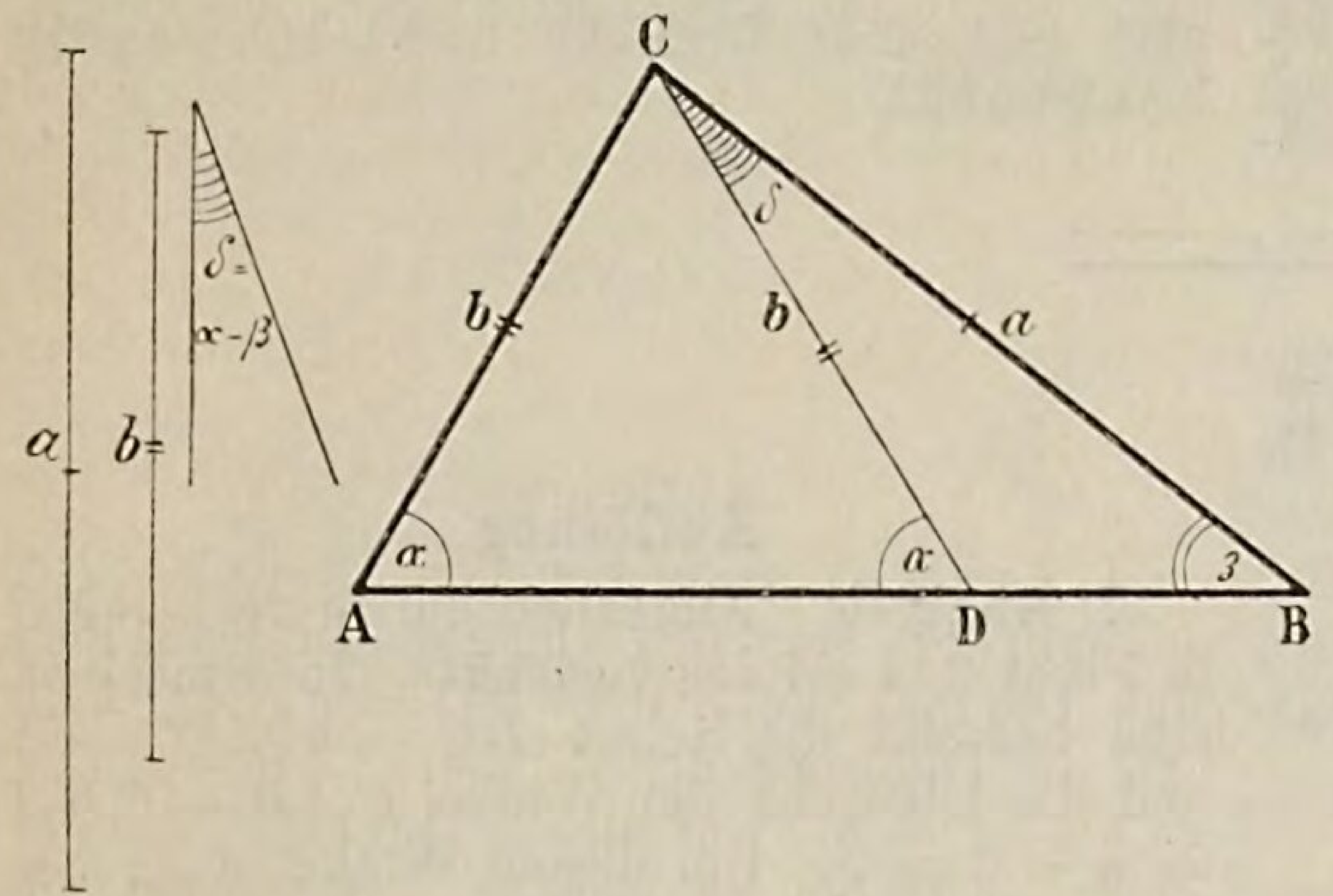
II. Ausführung. Man trage den Winkel $\alpha - \beta = \delta$ an beliebiger Stelle der Zeichnungsebene an (siehe Figur 246 auf nächster Seite) und mache auf seinem einen Schenkel $CB = a$, auf dem andern $CD = b$. Nach der Linie BD trage man von C aus die Strecke CD nochmals ab $= CA$, und erhält so den Punkt A.

III. Beweis. Das Dreieck ABC ist das verlangte, denn es enthält zunächst die Seiten CB und CA abgetragen gleich den gegebenen Längen a und b. Ferner ist wegen der abgetragenen Strecken $CA = CD$ der Winkel $\alpha = CAD = CDA$ und letzterer als Aussenwinkel $= \beta + \sphericalangle BCD$. Also ist $\alpha - \beta = \sphericalangle BCD$, also abgetragen gleich dem gegebenen Winkel δ.

IV. Determination. Die Aufgabe ist immer lösbar mit einziger Lösung. Zu beachten bleibt nur, dass, weil $\alpha - \beta = \delta$

Erkl. 586. Im Falle der Figur 245 würde der Beweis zunächst wieder das Vorhandensein der Stücke $AC = b$ und $BC = a$ erwähnen und dann zeigen, dass $\sphericalangle \beta = ADC$ ist, und dass Winkel $\alpha = BAC$ als Aussenwinkel $= \sphericalangle ADC + ACD$ ist, also $\sphericalangle ACD = BAC - ADC = BAC - ABC = \alpha - \beta$ abgetragen gleich δ.

Figur 246.



Erkl. 587. Liefert das Teildreieck aus a, b, δ gegenüber der grösseren Seite a einen stumpfen Winkel, so greift die Ausführung der Figur 246 Platz; ist aber der gegenüber a entstehende Winkel spitz, so wird nach Figur 245 nicht Seite b, sondern Seite a über DA hinaus nochmals angetragen, und liefert so den Punkt B. Im Grenzfall, wo der Winkel gegenüber a im Teildreieck BCD ein rechter ist, liefern beide Fälle der Konstruktion dasselbe Dreieck.

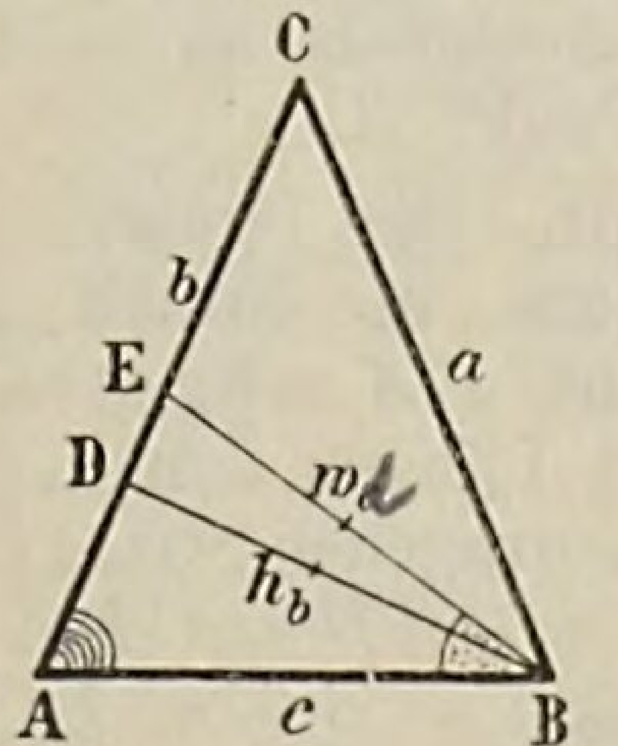
ist, $\alpha > \beta$ sein muss, also auch $a > b$ und β stets spitz.

Aufgabe 163. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind die Stücke:

$$\alpha,\ h_b,\ w_b,$$

also ein Winkel und die zu einer seiner Schenkelseiten gehörige Höhe und Winkelhalbierende.

Figur 247.



Erkl. 588. Während in den bisherigen Aufgaben nur immer eine Teilungslinie des Dreiecks auftrat, so sind es bei dieser Aufgabe 163 deren zwei. Diese bilden eine ganze Reihe von

Auflösung.

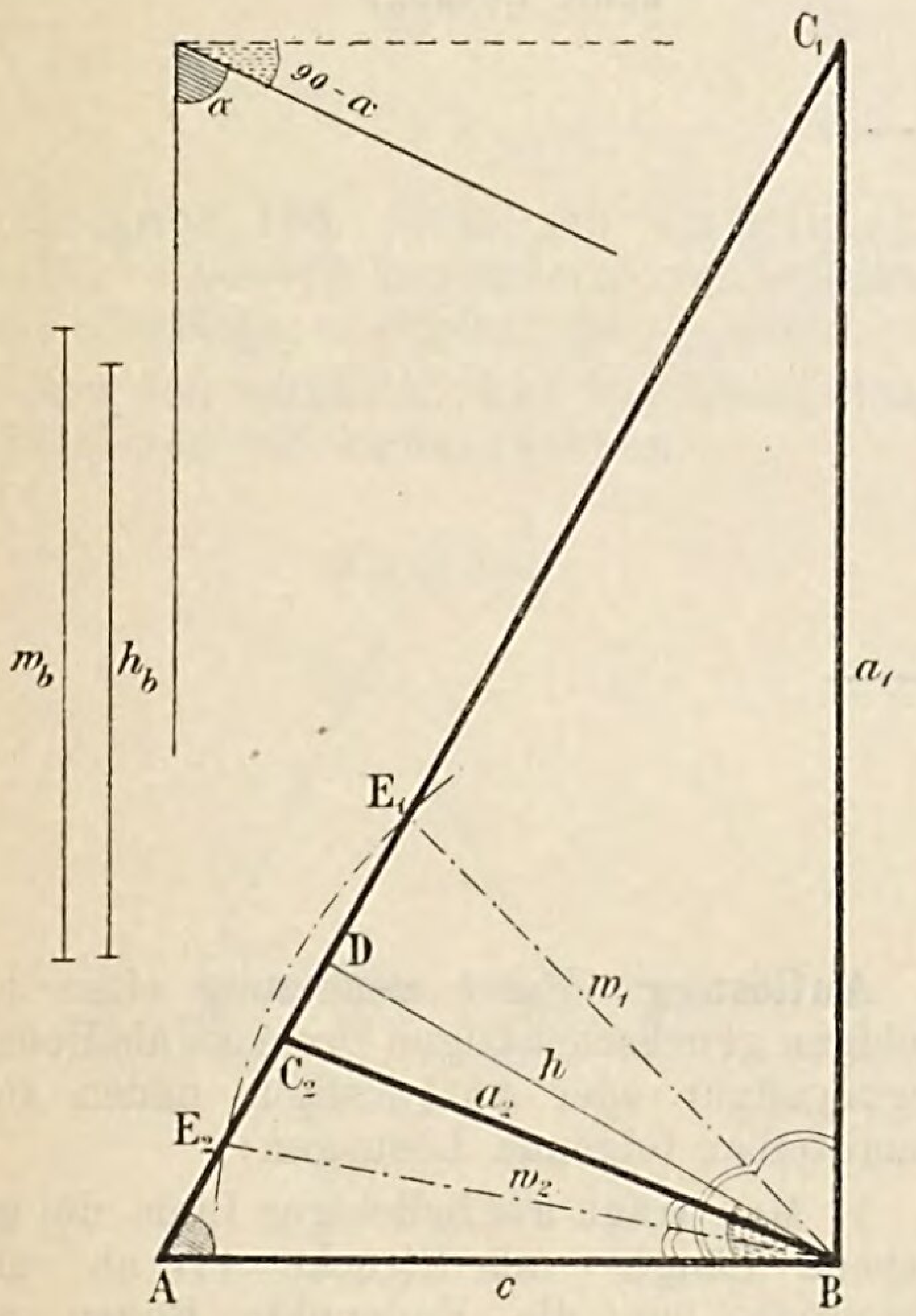
I. Analysis. Angenommen, das Dreieck ABC in Figur 247 sei das verlangte. In demselben kennt man den Winkel $BAC = \alpha$, die zur Seite $AC = b$ gehörige Höhe $BD = h_b$ und die Winkelhalbierende $BE = w_b$ vom Eckpunkte B. Durch Einzeichnung der Höhe BD und der Winkelhalbierenden BE entsteht das rechtwinklige Teildreieck BDE. In diesem sind bekannt die Kathete $BD = h_b$, die Hypotenuse $BE = w_b$ und der der letzteren gegenüberliegende rechte Winkel. Daher ist dieses Teildreieck BDE konstruierbar aus zwei Seiten und dem der grösseren gegenüberliegenden Winkel. Ist aber das Teildreieck BDE konstruiert, so kennt man wegen des Winkels α auch den Winkel $DBA = 90 - \alpha$ im Dreieck DBA, und erhält so die Seite c. Wenn aber Seite c bekannt ist, so kennt man den Winkel EBA,

Teildreiecken, nämlich ausser $(a, b, c) = ABC$ noch:

$$(a, b, w) = BCE$$
$$(a, b, h) = BCD$$
$$(w, b, h) = BED$$
$$(w, b, c) = BEA$$
$$(h, b, c) = BDA.$$

Die Hauptaufgabe der Analyse besteht nunmehr bei derartigen Aufgaben darin, ein solches Teildreieck ausfindig zu machen, in welchem drei Stücke gegeben sind, welche die Konstruktion desselben ermöglichen.

Figur 248.



Erkl. 589. In Figur 248 gelten wieder für Ausführung und Beweis die mit 1 oder 2 bezeichneten Buchstaben gleichmässig. Diejenigen Punkte und Strecken, welche für beide Lösungen als dieselben Elemente Gültigkeit behalten, sind nicht mit Ziffern versehen. Daher gilt z. B. Punkt A sowohl als A_1 wie als A_2, Höhe h ist sowohl h_1 für $\triangle ABC_1$, als auch die ausserhalb des stumpfen Winkels bei c_2 fallende Höhe h_2 für das Dreieck ABC_2.

Erkl. 590. Die in nebenstehender Determination angegebenen Bedingungen der Lösbarkeit ergeben sich durch folgende Ueberlegungen: Punkt C_1 entsteht nur, wenn der Schenkel BC_1 die Linie b trifft. Dieses geschieht nicht mehr, wenn der abgetragene Winkel E_1BC_1 ebenso gross oder noch grösser wird, als dessen innerer Wechselwinkel BE_1D, weil dann BC_1 mit der Richtung DE_1 parallel oder gar

und dieser muss gleich EBC sein, da BE Winkelhalbierende ist. Also kann man dann auch Winkel EBC antragen, und erhält so das ganze Dreieck ABC.

II. Ausführung. Auf einer beliebigen Linie als Seite b Figur 248 wähle man einen beliebigen Punkt D, trage in demselben eine Senkrechte auf b an, und mache auf ihr $DB = h_b$. Dann beschreibe man mit der gegebenen Länge w als Radius um B als Mittelpunkt einen Kreisbogen, welcher die Linie b trifft, und bezeichne den Schnittpunkt als Punkt E. Nun konstruiere man den Komplementwinkel zum gegebenen Winkel α, trage denselben an der Strecke BD im Punkte B im positiven Drehungssinne an und bezeichne diesen Schenkel als Seite c und den Schnittpunkt desselben mit Linie b als Punkt A. Endlich trage man den Winkel $(w, c) = EBA$ auf der andern Seite von BE nochmals an, bezeichne den neuen Schenkel als Seite a, und seinen Schnittpunkt auf Linie b als Punkt C.

III. Beweis. Das gefundene Dreieck ABC ist das verlangte, denn es enthält:

1) die gegebene Strecke h_b abgetragen auf der als Senkrechten zu b konstruierten Linie durch den Eckpunkt B. Es enthält:

2) die gegebene Strecke w_b abgetragen auf dem durch C gehenden Schenkel der abgetragenen gleichgrossen Winkelhälften $(w, c) = (w, a)$. Und es enthält:

3) als Winkel BAC den Komplementwinkel zu $\sphericalangle ABD$ wegen des rechtwinkligen Dreiecks ABD. Dieser Winkel ABD aber wurde konstruiert als Komplement zu α, also ist $\sphericalangle ABD = 90^0 - \alpha$, und folglich:

$$\sphericalangle BAC = 90^0 - ABD = 90^0 - (90^0 - \alpha) = 90^0 - 90^0 + \alpha = \alpha.$$

IV. Determination. Die Ausführung ist immer möglich, so lange h als Senkrechte kürzer ist, als die schiefe Linie w, und so lange α gewissen Bedingungen genügt. Da nämlich der Kreisbogen um B mit Radius w die Linie b in zwei Punkten schneidet, so kann das Dreieck BDE doppelte Lösung liefern, nämlich durch die Teildreiecke BDE_1 und BDE_2. Ersteres ergibt das Dreieck ABC_1, letzteres das Dreieck ABC_2. Beide besitzen $\sphericalangle BAC = \alpha$, Höhe $h = BD \perp AC$, Winkelhalbierende $w = BE_1 = BE_2$ mit gleichen Winkelhälften $ABE_1 = CBE_1$, $ABE_2 = CBE_2$. Von diesen Lösungen wird aber die erste unmöglich, wenn α kleiner ist, als das doppelte

divergent würde. Es ist also eine obere Grenze für den Winkel ABC_1, dass er $= 180 - BAC = 180 - \alpha$ wird. Nun ist aber $\sphericalangle ABC_1 = 2 \cdot \sphericalangle (w_1 c) = 2 \cdot [\sphericalangle (hc) + (hw)] = 2\,[90^0 - \alpha + (hw)] = 180^0 - 2\alpha + 2 \cdot \sphericalangle (hw)$. Also muss die Bedingung sein für die Lösbarkeit:

$$180^0 - \alpha > 180^0 - 2\alpha + 2 \sphericalangle (hw),$$

oder durch Wegfall von 180^0 und Herübersetzen von -2α als $+2\alpha$ auf die linke Seite:

$$\alpha > 2 \cdot \sphericalangle (hw).$$

Ferner ist die Lösung ABC_2 unmöglich, wenn der Schenkel BA innerhalb des Dreiecks BE_2D käme; d. h. die Punkte E_2 und A der zu b schiefen Linien BE_2 und BA müssen so liegen, dass der Winkel bei A kleiner ist, als der bei E_2. Es muss also $\alpha < \sphericalangle (w, b)$ oder kleiner als $90^0 - (hw)$ sein.

Erkl. 591. Durch Zusammensetzung beider Ungleichheiten für den Winkel (hw) allein findet man die Bedingung für h und w, dass, um zwei Lösungen zu ermöglichen,

$$90^0 - (hw) > 2\,(hw)$$

sein muss, also:

$$90^0 > 3\,(hw) \text{ oder } \sphericalangle (hw) < 30^0.$$

Zahlenmässige Festsetzung der Beziehungen zwischen α, h, w würde die Anwendung von trigonometrischen Hilfsmitteln erfordern.

des im rechtwinkligen Teildreieck BDE entstehenden Winkels (h, w); die zweite wird unmöglich, wenn α grösser wird, als der im rechtwinkligen Teildreieck BDE entstehende Winkel (w, b) (siehe Erkl. 590).

Für solche Werte der drei Grössen α, h_b w_b, für welche also:

$90^0 - (hw) > \alpha > 2\,(hw)$, erhält man 2 Lösungen;

$90^0 - (hw) > \alpha < 2\,(hw)$, ergibt 1 Lösung (ABC_2),

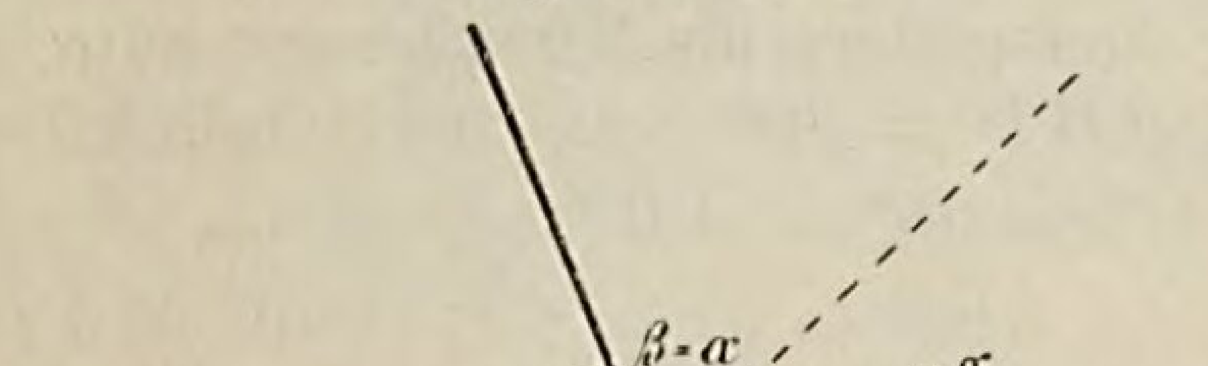
$90^0 - (hw) < \alpha > 2\,(hw)$, ergibt 1 Lösung (ABC_1),

$90^0 - (hw) < \alpha < 2\,(hw)$, ergibt keine Lösung.

Aufgabe 164. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind die Stücke:

1) . a, c: Grundseite und Schenkellänge,
2) . a, α: Schenkellänge und ein Winkel,
3) . c, α: Grundseite und ein Winkel.

Figur 249.



Erkl. 592. Die Konstruktion der drei Winkel des gleichschenkligen Dreiecks, wenn ein einzelner gegeben ist, wird in Figur 249 nochmals dargestellt. Dieselbe findet sich schon als Aufgabe 97 bezw. 98 und 117 im zweiten Teile dieses Lehrbuches.

Auflösung. Unter Benutzung eines beliebigen gleichschenkligen Dreiecks als Ueberlegungsfigur oder Analysisfigur finden sich unmittelbar folgende Lösungen:

1) Man trägt auf beliebiger Linie die gegebene Länge c als Strecke AB ab, und beschreibt um die Endpunkte Bogen mi- Radius $a = b$. Deren Schnittpunkt ist C.

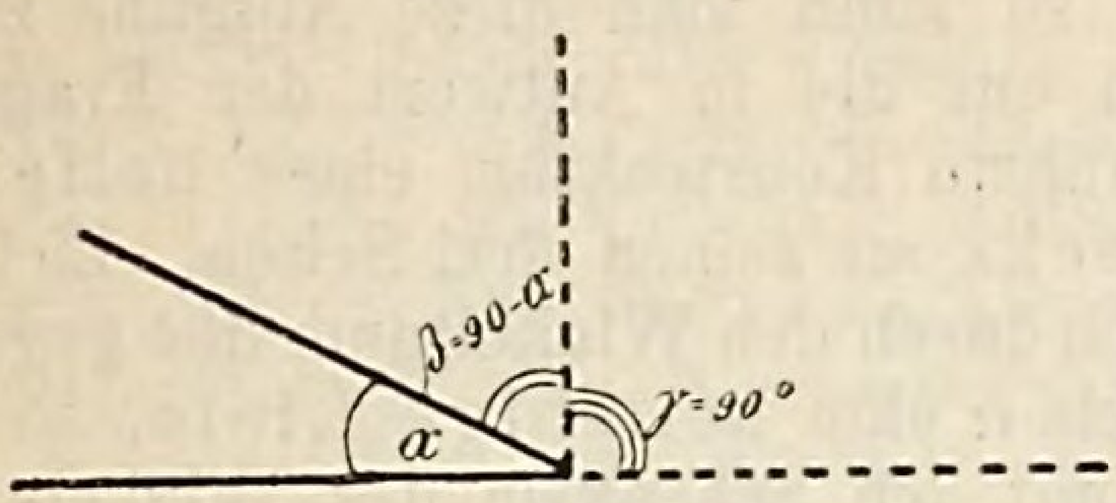
2) und 3) Man konstruiert zum $\sphericalangle \alpha$ auch noch $\sphericalangle \beta = \alpha$ und $\gamma = 180^0 - 2\,\alpha$, trägt auf beliebiger Linie die gegebene Länge a bezw. c als Strecke BC bezw. AB ab und trägt an derselben in den Endpunkten die zugehörigen Winkel an.

Aufgabe 165. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind die Stücke:

1) . a, b: beide Katheten,
2) . a, c: eine Kathete und die Hypotenuse,
3) . α, c: ein spitzer Winkel und die Hypotenuse,
4) . α, a: ein spitzer Winkel und eine Kathete.

Auflösung. Unter Benutzung eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks als Ueberlegungsfigur findet man unmittelbar folgende Lösungen:

Figur 250.



Erkl. 593. Zu Figur 250 wiederholt sich das in Erkl. 592 Gesagte.

1) Man trägt auf den Schenkeln eines beliebigen rechten Winkels C die Längen a und b ab.

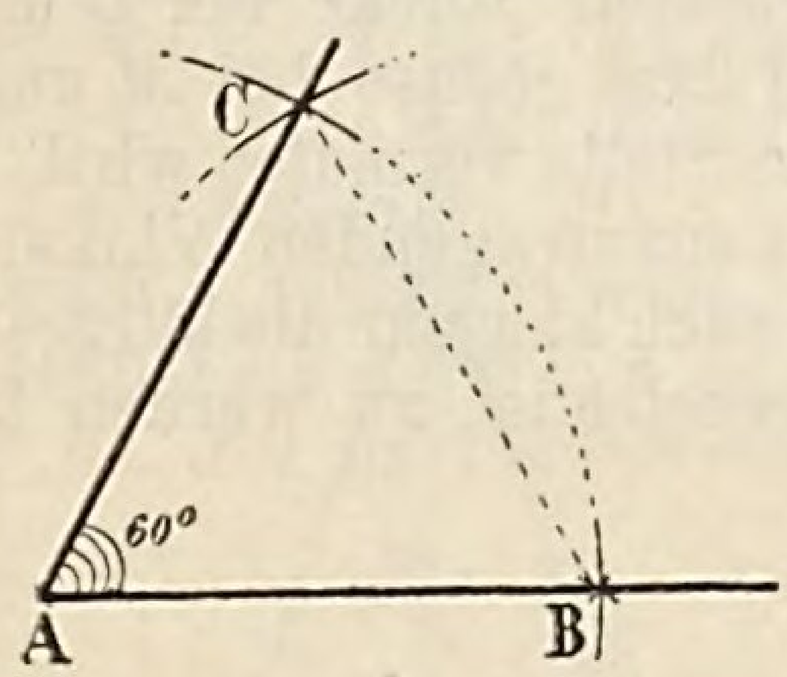
2) Man trägt auf den einen Schenkel eines beliebigen rechten Winkels C die gegebene Länge a ab als Strecke CB, und beschreibt um B mit Radius c einen Kreisbogen. Dieser trifft den anderen Schenkel in A.

3) und 4) Man konstruiere zum $\sphericalangle \alpha$ auch noch $\sphericalangle \beta = 90 - \alpha$ und $\gamma = 90^0$, trägt auf beliebiger Linie die gegebene Länge c bezw. a als Strecke AB bezw. BC ab und trägt an derselben in den Endpunkten die zugehörigen Winkel an.

Aufgabe 166. Man soll ein gleichseitiges Dreieck konstruieren, von welchem die Seitenlänge a gegeben ist — oder:

Man soll mittels Zirkel und Lineal einen Winkel von 60^0 konstruieren.

Figur 251.



Auflösung. Da man die erstere Aufgabe wegen der drei gleichen Seiten des gleichseitigen Dreiecks sowohl auf die erste, als auch auf die zweite oder dritte der Aufgaben 164 zurückführen kann, so kann man dieselben lösen, indem man entweder die in Antwort der Frage 102 und Figur 76 angegebenen Kreise um die Eckpunkte A und B mit Radius a zeichnet, oder indem man mittels des Winkelmessers in beiden Eckpunkten an a die Winkel von 60^0 anträgt. Umgekehrt kann daher die letztere — durch Anwendung des Winkelmessers stets ungenauer werdende — Konstruktion durch die erstere ersetzt werden (siehe Figur 251), indem man mit beliebiger Länge a um den Schnittpunkt A und um einen Punkt B des ersten Schenkels, welcher um a von A entfernt ist, mit Radius a Kreisbogen beschreibt.

Aufgabe 167. Man soll ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck konstruieren von welchem gegeben ist:

1) c : die Hypotenuse oder Grundseite,

2) a : die Kathete oder Schenkellänge.

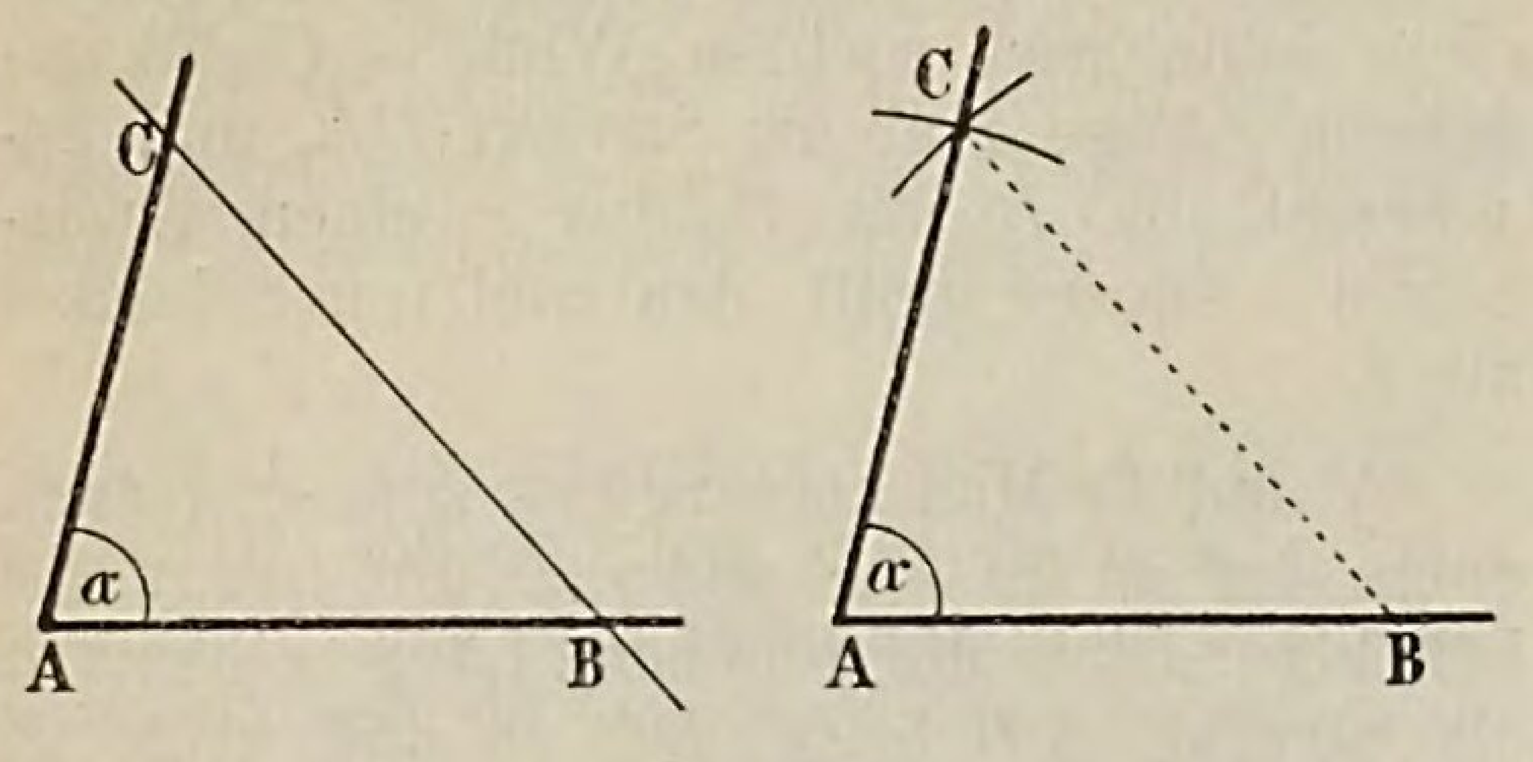
Erkl. 594. Wie die Konstruktion des zu nebenstehender Aufgabe nötigen Winkels von 45^0 und 90^0 (ebenso wie in Aufgabe 166 beim Winkel von 60^0) statt mit Winkelmesser, mittels Zirkel und Lineal zu machen sei, wird in den Aufgaben 170 bis 173 gezeigt werden.

Auflösung. Die erste dieser Aufgaben ist rückführbar auf die dritte von 164 oder 165, die zweite derselben auf die zweite von 164 oder die erste und vierte von 165 und beide werden gelöst, indem man an der gegebenen Strecke in beiden Endpunkten die zugehörigen Winkel anträgt.

Aufgabe 168. Man soll einen gegebenen Winkel α an einer andern gegebenen Linie in einem gegebenen Punkte an-

tragen — unter Benützung von Zirkel und Lineal ohne Winkelmesser.

Figur 252.

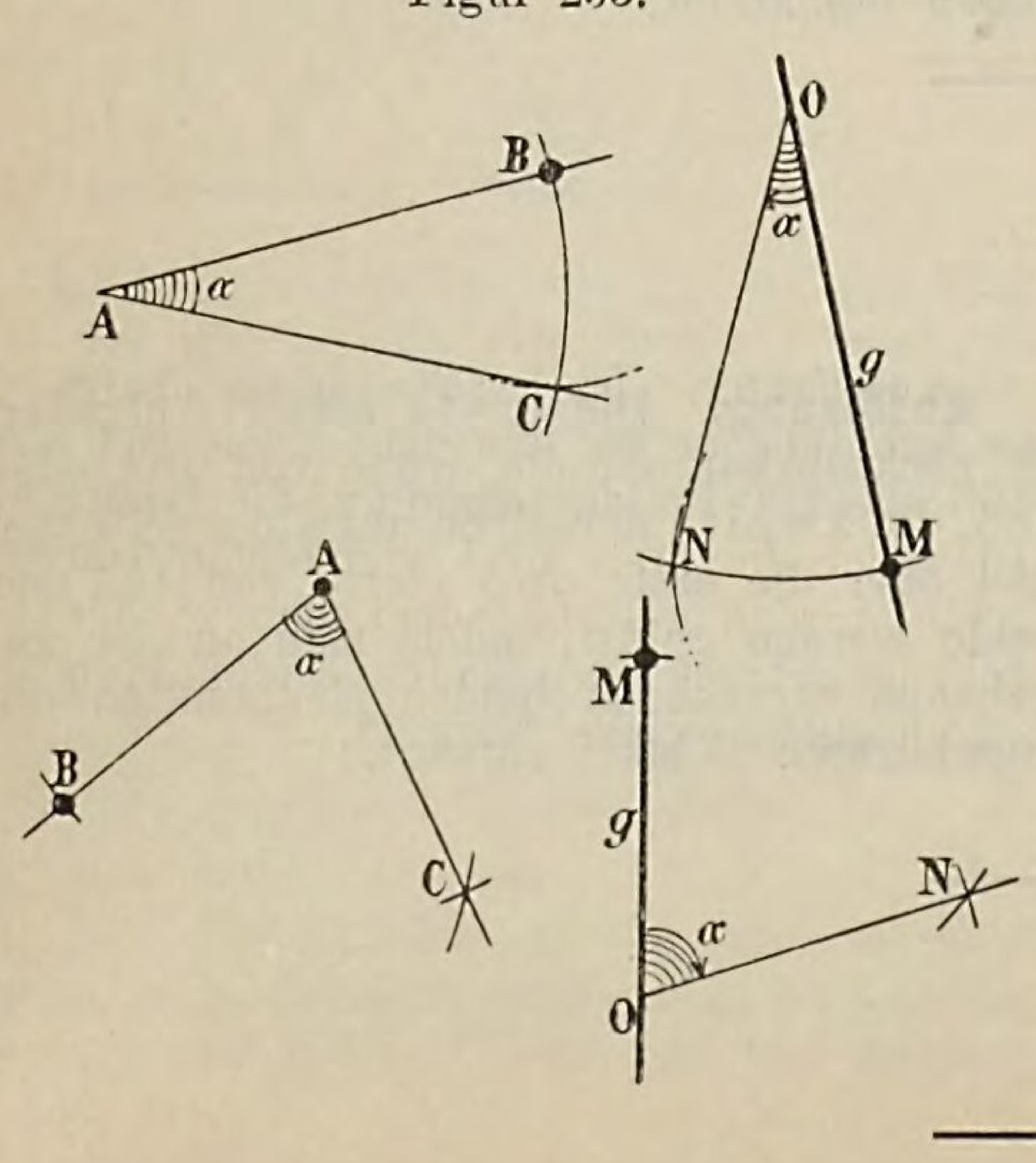


Erkl. 595. Die praktische Ausführung nebenstehender Aufgabe wird folgenderweise am einfachsten:

Um den gegebenen Winkel A in Figur 253 im Punkte O an die gegebene Linie g in vorgeschriebenem Drehungssinne anzutragen, beschreibe man mit beliebiger Zirkelöffnung erst um A einen Kreisbogen, welcher die Schenkel in B und C trifft und sofort mit derselben Zirkelöffnung einen Kreisbogen um O, welcher die Linie g in M trifft und von da aus nach der vorgeschriebenen Drehungsrichtung weiter geht. Dann kehre man mit dem Zirkel zurück zum Winkel α und nehme den Abstand BC in den Zirkel, setze dann mit dieser Zirkelöffnung in M auf g ein und beschreibe mit demselben Radius ($= BC$) ein Bögchen gerade nur an der Stelle, wo dieses den vorigen Kreisbogen schneidet. Der Schnittpunkt wird mit O verbunden, und diese Linie bildet mit OM einen Winkel gleich Winkel α.

Zum Beweise wäre das Dreieck OMN auszuzeichnen, seine Kongruenz mit Dreieck ABC wegen dreier gleichen Seiten zu berücksichtigen und daraus die Gleichheit der Winkel $BAC = MON$ zu folgern.

Figur 253.

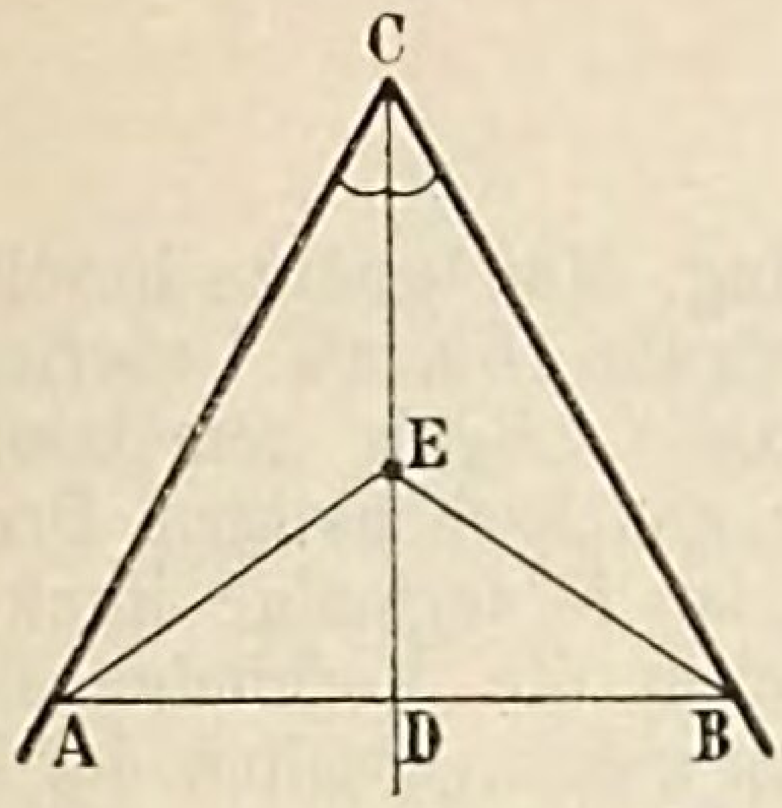


Auflösung. Ebenso wie in Aufgabe 166 die Konstruktion des Winkels von 60° auf die Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks aus seinen drei Seiten zurückgeführt wird, so kann man diese Aufgabe zurückführen auf die in Antwort der Frage 117 ausgeführte Konstruktion eines beliebigen Dreiecks an seinen drei Seiten. Zieht man nämlich durch den Winkelraum des gegebenen Winkels α eine beliebige Linie, so bildet diese mit den Schenkeln des Winkels α ein Dreieck ABC mit drei Seiten AB, BC, CA. Konstruiert man also (siehe Figur 252) aus denselben drei Seiten AB, BC, CA ein zweites Dreieck, so ist dies dem vorigen kongruent, also ist in ihm auch derselbe Winkel α nochmals konstruiert.

Vereinfacht wird die Lösung dieser Aufgabe dadurch, dass man das Dreieck ABC zu einem gleichschenkligen macht, so dass nur zweierlei Seitenlängen, nämlich BC und $AB = AC$ mit dem Zirkel gemessen zu werden brauchen. Bei einiger Uebung wird es zu erreichen sein (siehe Figur 253), dass von den Kreisbögen beim gegebenen Winkel nur die kürzesten Stücke bei B und C nötig werden, und dass ebenso bei M und N schon ungefähr die Stelle vermutet wird, wohin der Schenkel des anzutragenden Winkels gerichtet ist, dass also auch hier nur die kürzesten Bogenstückchen gezeichnet zu werden brauchen.

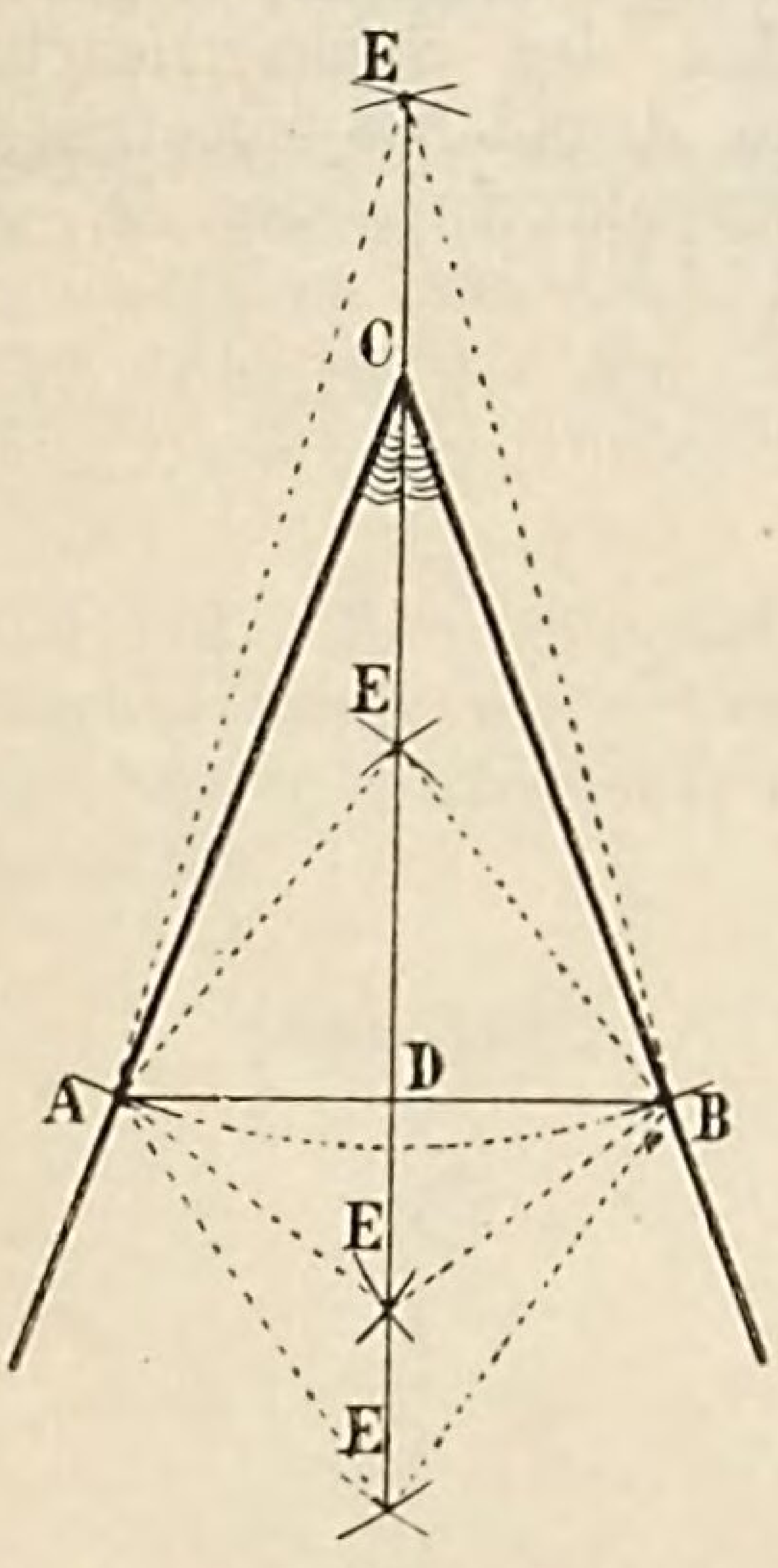
Aufgabe 169. Man soll einen gegebenen Winkel halbieren, ohne den Winkelmesser zu benützen.

Figur 254.



Erkl. 596. Wenn die Benützung des Massstabes gestattet würde, so könnte man auch die Linie CD als Mittellinie des Dreiecks ABC nehmen, also die Punkte A und B im gleichen Abstand von C miteinander verbinden und den Punkt C mit dem Mittelpunkte D der Verbindungsstrecke verbinden.

Figur 255.



Erkl. 597. Bei der einfachsten Art der Lösung, welche am häufigsten angewendet wird, wird die Zirkelöffnung $CA = CB$ einfach festgehalten, also auch $AE = BE = CA = CB$ gewählt. Jedoch kann es vorkommen, dass der Winkel ACB soweit am Rande der Zeichnungsebene liegt, dass nicht genügend Raum vorhanden ist, um einen solchen Punkt E zu wählen. Dann nimmt man eben die Länge $AE = EB$ kürzer, oder so, dass Punkt E zwischen D und C fällt, oder man legt E oberhalb C selbst. Jedenfalls darf aber $AE = BE$ nicht kürzer als $AD = BD = \frac{AB}{2}$ gewählt werden, da sonst die Kreisbogen einander gar nicht schneiden.

Auflösung.

I. Analysis. Angenommen Winkel ACB in Figur 254 sei der gegebene Winkel, CD seine gesuchte Halbierungslinie, dann kann man die Halbierungslinie CD betrachten als die Höhe und den Scheitel C als Spitze eines eben solchen gleichschenkligen Dreiecks, wie in der vorigen Aufgabe 168, dessen Grundlinie ihre Eckpunkte A und B auf den Schenkeln in gleichem Abstande von der Spitze C hat. Dann bildet jeder Punkt E der Winkelhalbierenden CD mit den beiden Eckpunkten A und B ebenfalls ein gleichschenkliges Dreieck; und umgekehrt geht die Linie, welche in einem dieser Dreiecke den Winkel halbiert, auch durch die Spitze von allen übrigen (siehe Figur 254). Wenn man daher über dieselbe Grundseite AB noch irgend ein zweites gleichschenkliges Dreieck AEB stellt nach der ersten Aufgabe 164, so liegt deren Spitze E auch auf der Winkelhalbierenden von ACB.

II. Ausführung. Man schneide (siehe Figur 255) durch einen Kreisbogen von dem Winkelscheitel C auf den Schenkeln die gleichen Stücke $CA = CB$ ab, setze dann mit einer beliebigen Zirkelöffnung in A und mit derselben Zirkelöffnung in B ein und beschreibe zwei Kreisbögchen, welche einander in E schneiden. Die Verbindungslinie von C mit dem Schnittpunkt E derselben halbiert den Winkel C.

III. Beweis. Da sowohl ACB als AEB gleichschenklige Dreiecke sind, so liegt sowohl C als E auf der Symmetrieachse von A und B, also ist DCE selbst die Achse und C und E sind Achsenpunkte, A und B symmetrische Punkte. Demnach sind die Linien AC und BC symmetrische Strecken, bilden also nach Satz 11 mit der Achse gleiche Winkel $ACD = BCD$.

IV. Determination. Die Aufgabe ist immer ausführbar und liefert stets die einzig mögliche Halbierungslinie des Winkels ACB. Die Spitze E des zweiten gleichschenkligen Dreiecks kann unterhalb AB liegen, zwischen D und C oder oberhalb C selbst.

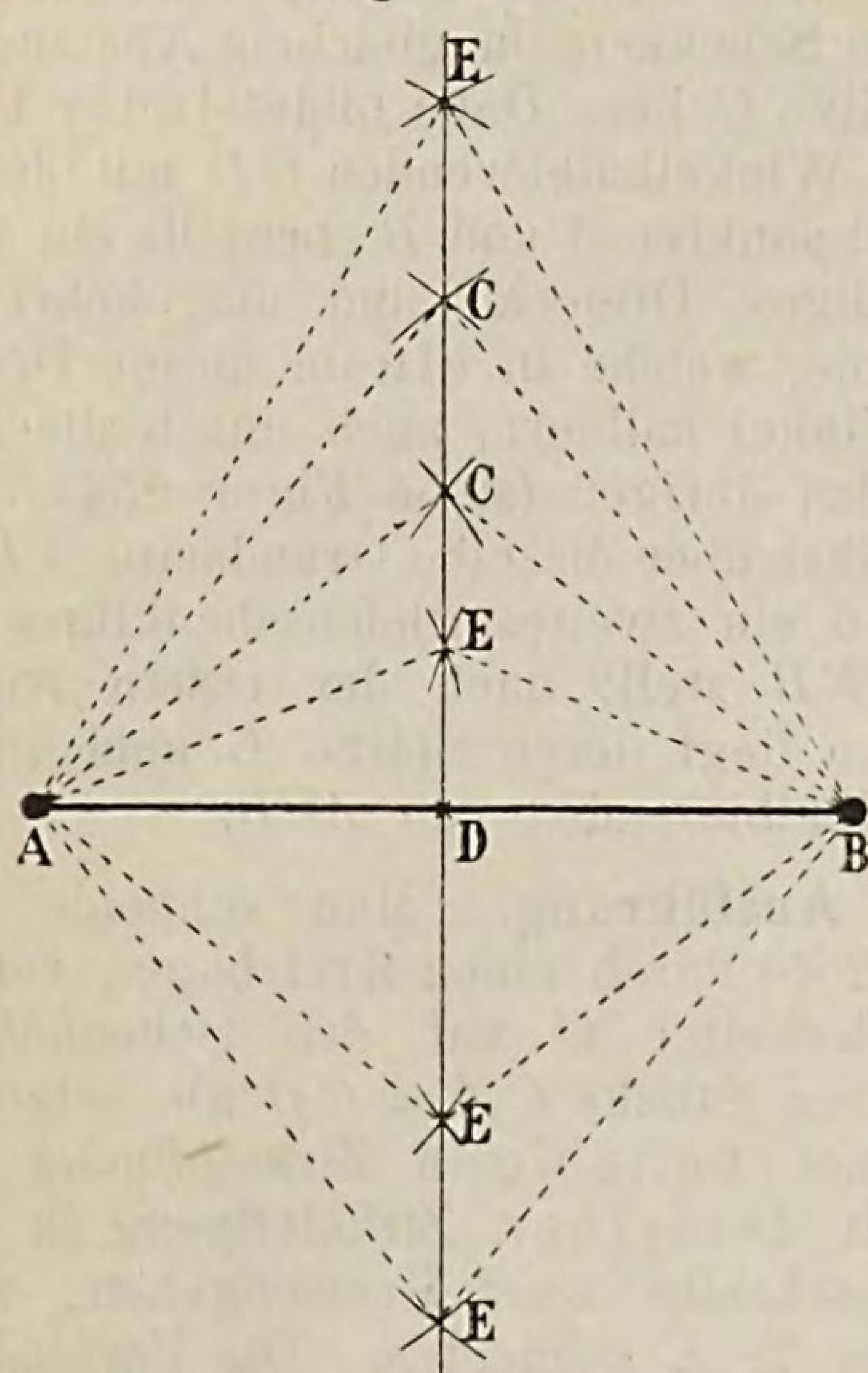
Aufgabe 170. Man soll ohne den Massstab zu benützen:

a) den Mittelpunkt einer gegebenen Strecke suchen, — oder

b) eine gegebene Strecke senkrecht halbieren, — oder

c) die Mittelsenkrechte einer gegebenen Strecke konstruieren.

Figur 256.



Erkl. 598. Am einfachsten wird die Ausführung wieder, wenn man für $AE = BE$ denselben Radius beibehält, wie für $AC = BC$. Doch ist dies keineswegs nötig. Vielmehr wird man häufig wegen Raummangel veranlasst sein, $AE = BE$ etwas kürzer zu wählen, als $AC = BC$, oder E zwischen D und C oder gar über C hinaus zu legen, letzteres besonders, wenn die Strecke AB etwa ganz am Rande der Zeichnungsebene gelegen ist.

Jedenfalls darf $AC = BC$ und $AE = BE$ nicht kürzer gewählt werden, als $AD = BD = \frac{AB}{2}$, da sonst die Kreisbogen einander gar nicht treffen.

Auflösung. Man benütze dieselbe Fig. 254, wie bei Aufgabe 169, als Ueberlegungsfigur, betrachte also AB als gemeinsame Grundseite vieler gleichschenkligen Dreiecke über AB; dann ist D derjenige Punkt von AB, durch welchen die Verbindungslinien aller ihrer Spitzen gehen, nämlich der Mittelpunkt der Grundseite.

Man zeichne also um die beiden Punkte A und B zwei Paare Kreisbögen, jedes Paar mit demselben Radius $AC = CB$ bezw. $AE = EB$, und verbinde CE. Diese Linie schneidet AB im Mittelpunkt und ist senkrecht AB.

Es sind nämlich sowohl ACB, als AEB gleichschenklige Dreiecke, folglich C und E Achsenpunkte der Symmetrieachse für A und B, also A und B symmetrische Punkte, AB Achsensenkrechte, also DC Mittelsenkrechte von AB.

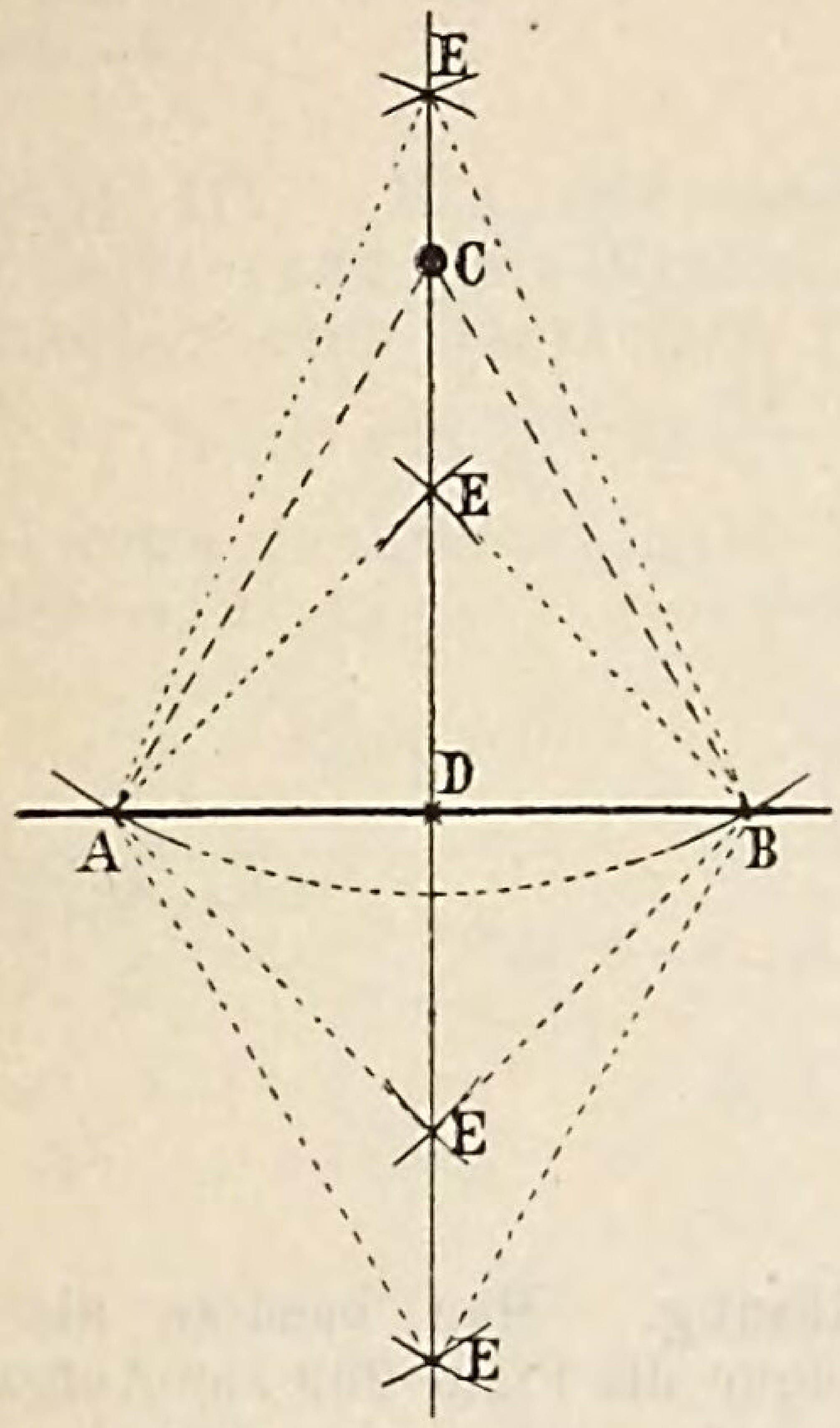
Aufgabe 171. Man soll auf eine gegebene Gerade g von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkte C eine Senkrechte errichten — ohne das Winkelscheit zu benützen.

Erkl. 599. Mit Benutzung des Massstabes könnte man sich wieder darauf beschränken, nach Auffindung der Punkte A und B in nebenstehender Weise den Mittelpunkt D

Auflösung. Man benütze wieder dieselbe Figur 254, wie in beiden vorigen Aufgaben, als Ueberlegungsfigur, betrachte also Punkt C als Spitze und die Gerade g als Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ABC. Dann findet man die Punkte A und B auf g durch den in Antwort der Frage 99 ange-

der Strecke AB abzumessen und mit C zu verbinden.

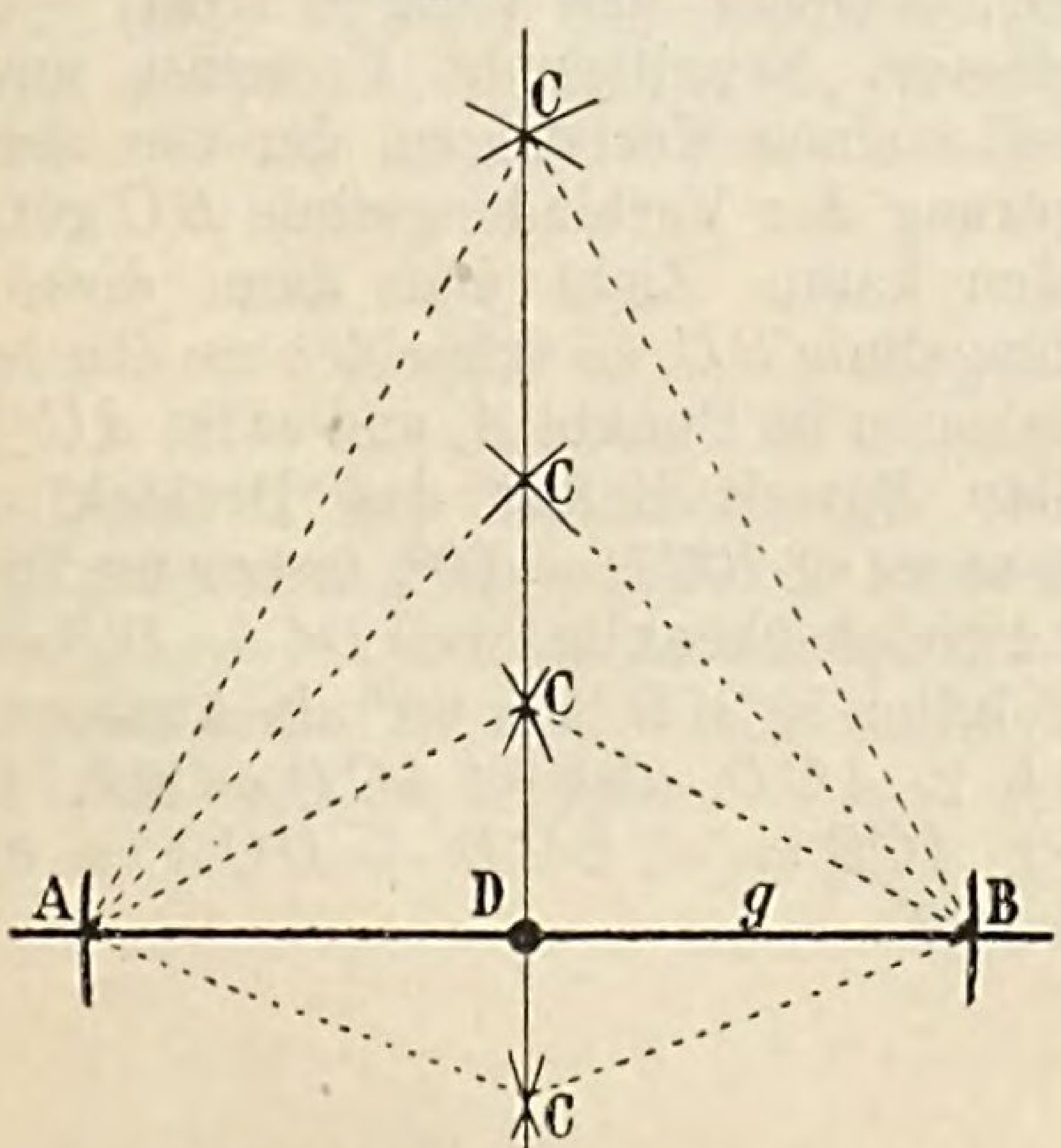
Figur 257.



Erkl. 600. Auch hier ist die einfachste Art der Lösung, die Radien $AE = EB$ gleich den Radien $CA = CB$ zu behalten. Für die Fälle, wo dies etwa nicht angeht, gilt hier dasselbe, wie in Erkl. 597 und 598 ausgeführt wurde.

Aufgabe 172. Man soll auf einer gegebenen unbegrenzten Geraden g in einem gegebenen Punkte D eine Senkrechte errichten.

Figur 258.



Erkl. 601. Man kann diese Aufgabe auch auffassen als einen besonderen Fall der Aufgabe 169, indem man D als Scheitel eines ge-

gebenen Kreis um die Spitze C mit Radius gleich der Schenkellänge, und ein zweiter Punkt der Senkrechten findet sich als Spitze irgend eines zweiten gleichschenkligen Dreiecks mit Grundseite AB.

Man zeichne also (siehe Figur 257) um Punkt C als Mittelpunkt mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, welcher die Gerade g in den Punkten A und B trifft, und zeichne dann um die Punkte A und B als Mittelpunkte mit beliebigem gleichgrossem Radius irgend zwei Kreisbogen, die sich treffen. Deren Schnittpunkt E verbindet man mit C und erhält dann $CD \perp AB$.

Der Beweis ist wörtlich derselbe wie in der vorigen Aufgabe 170.

Auflösung. Man benütze dieselbe Fig. 254 als Analysisfigur, wie in den vorigen Aufgaben, betrachte also die Gerade g als Grundseite und den Punkt D als Grundseitenmitte eines gleichschenkligen Dreiecks. Dann findet man die Punkte A und B als solche, die auf g im gleichen Abstande beiderseits von D liegen; und einen weiteren Punkt der Senkrechten findet man als Spitze irgend eines der gleichschenkligen Dreiecke über Grundseite AB.

Man trage also zunächst (siehe Fig. 258) beiderseits von D auf g gleichgrosse Strecken $DA = DB$ ab, und beschreibe dann um die Punkte A und B als Mittelpunkte mit gleichem Radius irgend zwei Kreisbogen, die sich treffen. Der Schnittpunkt C beider ist mit D zu verbinden und liefert $CD \perp AB$.

Den Beweis liefert das gleichschenklige Dreieck ABC. Denn da $DA = DB$ abgetragen wurde, so ist D Grundseitenmitte, also muss CD als Verbindungslinie der Spitze

gebenen gestreckten Winkels auf g betrachtet und diesen Winkel von 180^0 halbiert, also zwei gleiche Winkelhälften von je 90^0 ganz nach Aufgabe 169 konstruiert. Man erhält genau dieselbe Ausführung, wie die nebenstehende. Auch die nächste Aufgabe liefert eine bei dieser Aufgabe anwendbare Lösungsart.

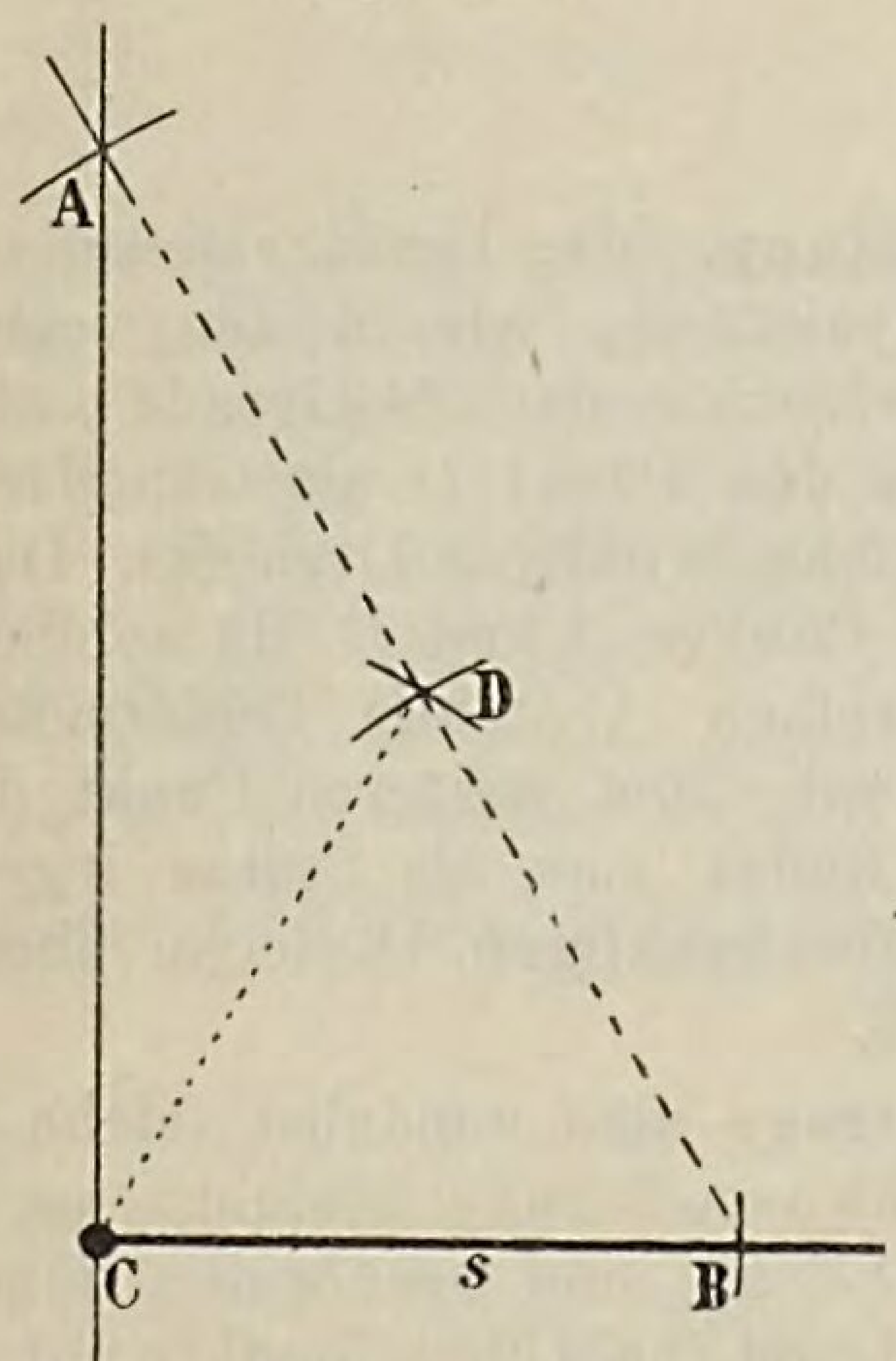
Erkl. 602. Der Radius $BC = AC$ darf diesmal nicht gleich oder kleiner als $DA = DB$ gewählt werden. Denn die Strecke AC als schiefe Linie zu CD muss jedenfalls länger sein, als die Senkrechte AD auf CD. Die Raumverhältnisse werden angeben, ob man $AC = BC$ nach der einen oder andern Seite abträgt, oder ob vielleicht die Kreisbogen nach der entgegengesetzten Seite kommen müssen, als die Senkrechte, so dass dann die verlangte Senkrechte die Verlängerung der Strecke CD würde.

mit der Mitte der Grundseite auf letzterer senkrecht sein.

Aufgabe 173. Man soll im Anfangspunkte C eines gegebenen Strahles s eine Senkrechte konstruieren, ohne denselben zu verlängern.

Erkl. 603. Wenn die Verlängerung zulässig wäre, so wäre diese Aufgabe auf die vorige zurückgeführt. Ist die Verlängerung aber nicht gestattet, oder wegen Raummangels nicht zulässig, so kann mittels der vorigen Aufgabe nicht geholfen werden. Dagegen kann die vorige Aufgabe stets mittels der vorliegenden gelöst werden, so dass diese Aufgabe 173 als zweite Lösungsart der Aufgabe 172 anzusehen ist.

Figur 259.



Erkl. 604. Auch hier hat man sich darauf einzuüben, dass von den Bogenstücken bei D und A nur gerade diejenigen kurzen Stücke erraten werden, welche zur Auffindung jener Punkte nötig werden. Auch die Linie BDA wird man nicht vollständig auszeichnen, sondern nur das Lineal anlegen und den Schnittpunkt auf dem Bögchen bei A anmerken.

Auflösung. Man benütze als Ueberlegungsfigur die Figur 232 zur Aufgabe 132, betrachte also auf s eine Strecke BC als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, das in B den Winkel von 60^0 hat. Dann ist Punkt D die Spitze eines gleichseitigen Dreiecks über Strecke BC, und der Punkt A der Senkrechten CA liegt auf der Verbindungslinie BD in gleichem Abstand von D, wie D selbst von B.

Man ziehe daher (siehe Figur 259) um Punkt C mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, der auch den Strahl s trifft, setze dann mit demselben Radius erst im Schnittpunkt B ein und beschreibe einen Kreisbogen, welcher den vorigen trifft, — dann in diesem Schnittpunkt C selbst und beschreibe einen Kreisbogen, der von der Verlängerung der Verbindungslinie BC getroffen werden kann. Zieht man dann diese Verbindungslinie BC, so schneidet sie den letzten Kreisbogen im Punkte A, und es ist $AC \perp CB$.

Den Beweis liefert das Dreieck ABC, denn es ist $\sphericalangle BCD = 60^0$, ferner ist Dreieck DCA gleichschenklig, weil $DC = DB = DA$ ist, folglich $\sphericalangle CDB = 60^0$ als Aussenwinkel gleich $2 \cdot ACD$, also $\sphericalangle ACD = 30^0$. Daher ist $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCD + DCA = 60^0 + 30^0 = 90^0$.

Erkl. 605. An Stelle des im Nebenstehenden ganz durchgeführten Beweises hätte auch eine Berufung auf Satz 60 vollständig genügt, da D als Mitte von AB und $DA = DC = DB$ konstruiert ist.

Aufgabe 174. Man soll mittels der Winkelhalbierung ohne Winkelmesser die Winkelgrössen herstellen von 30^0, 15^0, $7\frac{1^0}{2}\cdots$ sowie von 45^0, $22\frac{1^0}{2}\cdots$ oder: Man soll einen rechten Winkel in 3, 6, 9 ⋯ oder in 2, 4, 8 ⋯ gleiche Teile teilen.

Auflösung. Da man nach der Aufgabe 166 und den vier vorigen Aufgaben im stande ist, ohne Winkelmesser, bloss mit Zirkel und Lineal die Winkel von 60^0 und 90^0 herzustellen, so kann man mittels wiederholter Anwendung der Aufgabe 169 (siehe Fig. 260) leicht konstruieren die Winkelgrössen:

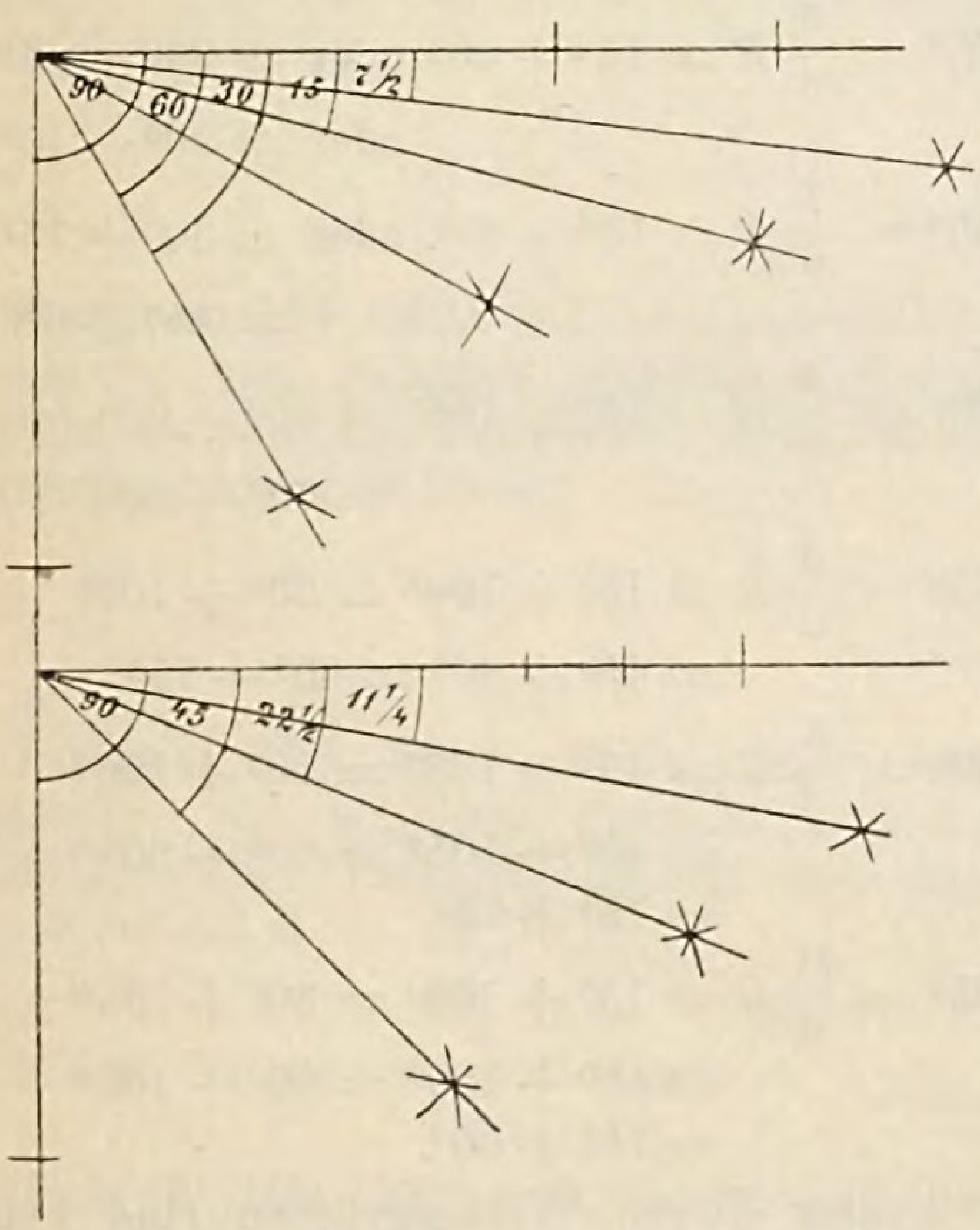
$$\frac{60^0}{2} = 30^0 = \frac{R}{3},$$
$$\frac{60^0}{4} = \frac{30^0}{2} = 15^0 = \frac{R}{6},$$
$$\frac{60^0}{8} = \frac{15^0}{2} = 7\frac{1^0}{2} = \frac{R}{12},$$
$$\frac{60^0}{16} = \frac{7^0\,30'}{2} = 3\frac{3^0}{4} = \frac{R}{24},$$
$$\frac{60^0}{32} = \frac{3^0\,45'}{2} = 1\frac{7^0}{8} = \frac{R}{48},$$

u. s. w.

$$\frac{90^0}{2} = 45^0 = \frac{R}{2},$$
$$\frac{90^0}{4} = \frac{45^0}{2} = 22\frac{1^0}{2} = \frac{R}{4},$$
$$\frac{90^0}{8} = \frac{22^0\,30'}{2} = 11\frac{1^0}{4} = \frac{R}{8},$$
$$\frac{90^0}{16} = \frac{11^0\,15'}{2} = 5\frac{5^0}{8} = \frac{R}{16},$$
$$\frac{90^0}{32} = 2\frac{13^0}{16} = \frac{R}{32},$$

u. s. w.

Figur 260.

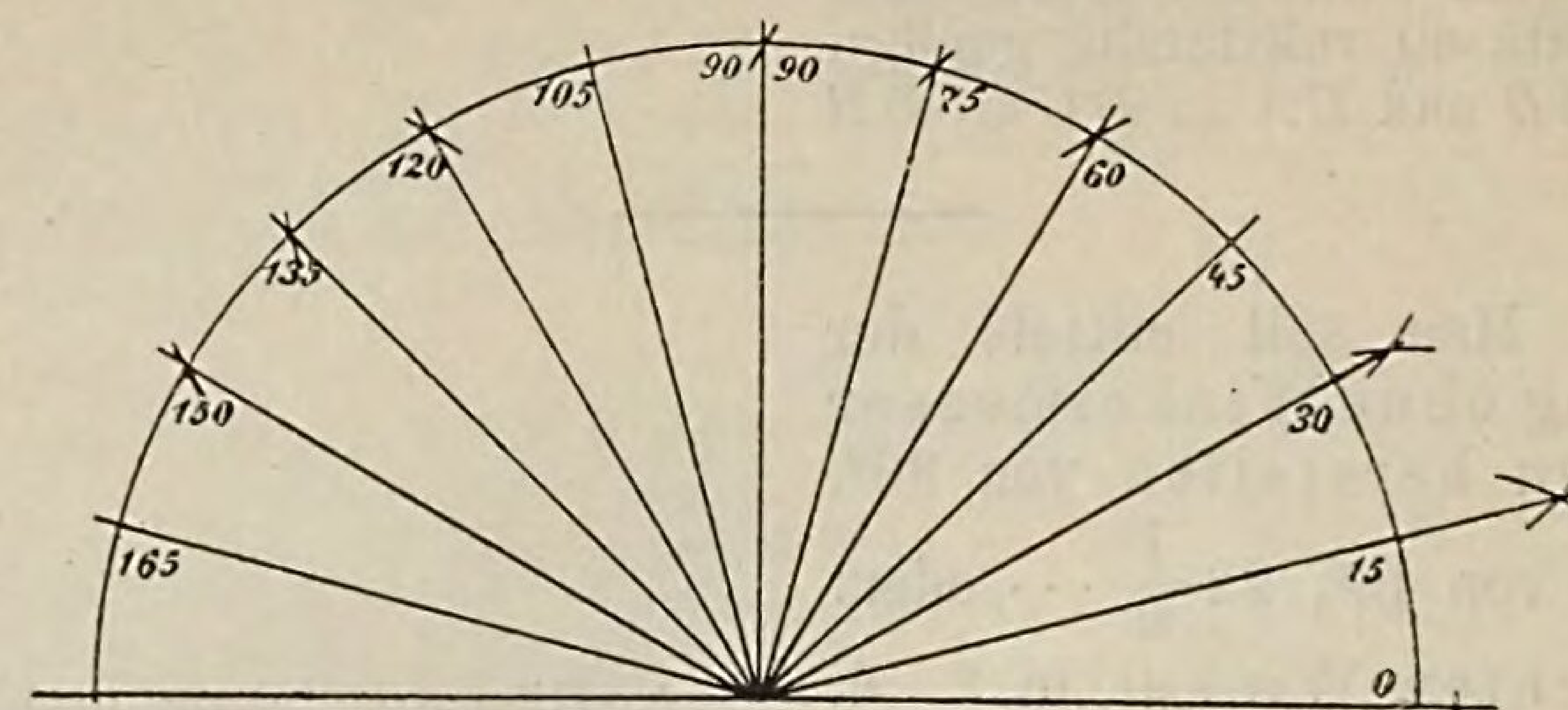


Erkl. 606. In Figur 260 ist aus den Kreisbögchen die praktische Ausführung der nebenstehenden Konstruktionen zu erkennen.

Aufgabe 175. Man soll eine Anzahl Winkelgrössen von ganzzahliger Anzahl von Graden angeben, welche auf Grund der Aufgaben 168 und 174 mit Winkel und Lineal konstruiert werden können.

Auflösung. Da man nach der Aufgabe 174 konstruieren kann die Winkel von $15^0 = \frac{R}{6}$, $30^0 = \frac{R}{3}$, $45^0 = \frac{R}{2}$, $60^0 = \frac{2R}{3}$, $90^0 = R$, und nach Aufgabe 168 je einen solchen an oder in einen der andern an- oder abtragen kann, so lassen sich auch die Summen und Differenzen je zweier derselben bilden. Dies führt aber teilweise wieder zu denselben

Figur 261.



Winkeln und liefert folgende neue (siehe Figur 261):

$$75^0 = \frac{5}{6}R = 15^0 + 60^0 \text{ oder } = 30^0 + 45^0$$
$$\text{oder } = 90^0 - 15^0,$$

$$105^0 = \frac{7}{6}R = 15^0 + 90^0 \text{ oder } = 30^0 + 75^0$$
$$= 45^0 + 60^0,$$

$$120^0 = \frac{4}{3}R = 15^0 + 105^0 = 30^0 + 90^0$$
$$= 60^0 + 60^0,$$

$$135^0 = \frac{3}{2}R = 15^0 + 120^0 = 30^0 + 105^0$$
$$= 45^0 + 90^0 = 60^0 + 75^0,$$

$$150^0 = \frac{5}{3}R = 15^0 + 135^0 = 30^0 + 120^0$$
$$= 45^0 + 105^0 = 60^0 + 90^0$$
$$= 75^0 + 75^0,$$

$$165^0 = \frac{11}{6}R = 15^0 + 150^0 = 30^0 + 135^0$$
$$= 45^0 + 120^0 = 60^0 + 105^0$$
$$= 75^0 + 90^0.$$

Ausser diesen Winkelgrössen sind keine von ganzzahligen Gradziffern mit Zirkel und Lineal mittels der in Aufgabe 175 genannten Konstruktionen herstellbar.

Erkl. 607. Zur Ausführung dieser Konstruktion kann man auch einen einzigen Winkel von 15^0 herstellen und auf demselben Kreisbogen, welcher dessen Schenkelstücke nach Aufgabe 169 abzuschneiden bestimmt war, immer weiter die dritte Seite antragen.

Erkl. 607a. Bei der Lehre von der Aehnlichkeit (siehe im VII. Teile dieses Lehrbuches) findet man noch eine weitere Möglichkeit zur Konstruktion von Winkeln mittels Zirkel und Lineal, nämlich für die Reihe der Winkel 36^0 abwärts zu 18^0, 9^0, $4\frac{1^0}{2}\cdots$ und aufwärts zu 72^0, 108^0, 144^0, also auch für weitere Zusammenstellungen unter sich und mit der vorigen.

Aufgabe 176. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind die Winkel α, $\beta = 90 - \alpha$, $\gamma = 90^0$ und ausserdem:

1) 2) $c \pm a$, 3) 4) $c \pm b$, 5) $c + a - b$,
6) $c - a + b$, 7) $a + b + c$.

Erkl. 608. Die vorliegende Aufgabe 176 lässt sich auch anschliessen an Aufgabe 161 über die Konstruktion eines gewöhnlichen (schiefwinklig-ungleichseitigen) Dreiecks aus einer Seitensumme, der andern Seite, und deren Gegenwinkel. Da jedoch beim rechtwinkligen Dreieck durch einen der spitzen Winkel gleich alle drei bestimmt sind, so fällt das Bestimmungsstück der dritten Seite fort.

Die oben allein noch fehlenden Zusammenstellungen, in welchen $b \pm a$ allein oder $a + b$

Auflösung. Man benütze als Ueberlegungsfigur die Figuren 83 bis 85, und berücksichtige, dass daselbst gleichschenklige Dreiecke entstehen:

1) BCE mit Seiten $BE = BC = a$,
also $AE = c + a$;

2) BCG mit Seiten $BG = BC = a$,
also $AG = c - a$;

3) ACD mit Seiten $AD = AC = b$,
also $BD = c + b$;

4) ACF mit Seiten $AF = AC = b$,
also $BF = c - b$;

mit c vorkommt, lassen sich nicht mittels derselben Figur 85, wohl aber durch Zurückführung auf Aufgabe 161 lösen.

sowie, dass folglich auch:

5) $EF = BE + BF = c + a - b$,

6) $DG = AD + AG = c - a + b$,

7) $DE = BE + BA + AD = a + b + c$.

Nach Antwort der Frage 109 kennt man aber auch alle Winkel der Figur, und kann also jedes dieser Teildreiecke konstruieren und daraus das ganze Dreieck erhalten.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 177. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind ein Winkel, die eine Schenkelseite, und deren zugehörige Höhe.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 159.

Aufgabe 178. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Mittellinie und die Teilwinkel des von ihr durchschnittenen Winkels.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Auflösung der Aufgabe 212.

Aufgabe 179. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind ein Winkel, seine Winkelhalbierende und einer seiner Schenkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 160.

Aufgabe 180. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Seite, die Differenz der beiden andern, und ein Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 161.

Aufgabe 181. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Seite, ein anliegender Winkel und die Differenz der beiden andern Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analag der Auflösung der Aufgabe 162.

Aufgabe 182. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Höhe, eine Winkelhalbierende vom gleichen Eckpunkt, und einer der durch letztere gebildeten Abschnitte auf der Gegenseite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 163.

Aufgabe 183. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Seite und die Höhe und Mittellinie zu einer andern.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 163.

Aufgabe 184. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren aus einem Winkel und der Höhe.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 159.

Aufgabe 185. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren aus einem Winkel und dem Umfang.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analag der Auflösung der Aufgaben 157 und 158.

Aufgabe 186. Man soll ein gleichseitiges Dreieck konstruieren aus Umfang oder aus Höhe.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der beiden vorigen Aufgaben.

Aufgabe 187. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, von welchem die Mittellinie und eine Kathete gegeben sind.

Andeutung. Man berücksichtige den Satz 60.

Aufgabe 188. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren aus Hypotenuse und Höhe.

Andeutung. Man verwende die Umkehrung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 189. Man soll ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck konstruieren aus Umfang oder Höhe.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 176.

Aufgabe 190. Man soll ein gleichseitiges Dreieck konstruieren, von welchem ein unterer oder ein oberer Höhenabschnitt gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Auflösung der Aufgaben 147 und 165.

Aufgabe 191. Man soll ohne Benützung von Winkelmesser oder Massstab durch einen gegebenen Punkt P eine Parallele ziehen zu der gegebenen Geraden g.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 168.

Aufgabe 192. Man soll eine Parallele zu einer gegebenen Geraden ziehen in gegebenem Abstand von dieser.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 170 bis 173.

Aufgabe 193. Man soll einen beliebig gegebenen Winkel verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen u. s. w.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 168.

Aufgabe 194. Man soll ohne Winkelscheit und Winkelmesser den Winkel zweier Geraden halbieren, deren Schnittpunkt unzugänglich ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 191 und 19.

Aufgabe 195. Es soll auf dem unteren Rande einer Tafel oder eines Blattes ein Punkt gesucht werden, welcher genau senkrecht unter einem gegebenen Punkte in dem Innern gelegen ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 171.

Aufgabe 196. Man soll auf einer Strecke in unmittelbarer Nähe des Blattrandes eine Senkrechte errichten an einer Stelle, wo das Aufzeichnen dieser Linie in unmittelbarer Nähe der andern durch irgend ein Hindernis unmöglich wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 173.

4) Aufgaben über die Kongruenz der Dreiecke.

(Zu Abschnitt C 1 e.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 197. Man soll die möglichen Beziehungen zweier Dreiecke aufstellen, bei welchen zur Herbeiführung der Kongruenz immer eine Gleichheit zweier Stücke fehlt.

Erkl. 609. Da der erste Kongruenzsatz nur drei Seiten enthält, so liefert er auch nur einen Fall in nebenstehender Zusammenstellung; jeder andere Kongruenzsatz aber enthält Seiten und Winkel, liefert also stets zwei Fälle, je nachdem man die Gleichheit zweier Seiten oder die zweier Winkel weglässt.

Erkl. 610. Von den im Nebenstehenden aufgezählten sieben Fällen sind der erste, zweite

Auflösung. Wenn bei den vier Kongruenzsätzen der Dreiecke immer eine Gleichheit weggelassen wird, so erhält man aus dem ersten Kongruenzsatze Dreiecke, in welchen

1) zwei Seiten gleich sind, die dritten aber ungleich;

aus dem zweiten Kongruenzsatze entstehen Dreiecke, in welchen

2) zwei Seiten gleich sind, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich;

und vierte die gleichen. Denn wenn neben zwei gleichen Seiten entweder die dritten Seiten oder die eingeschlossenen Winkel oder die der grösseren gegenüberliegenden Winkel ungleich sind, so können nicht zwei andere dieser Stücke einander gleich sein. Sonst müssten die beiden Dreiecke nach einem andern Kongruenzsatze kongruent sein, also müssten auch die als ungleich bekannten Stücke übereinstimmen.

Ebenso müssen die Fälle drei und sechs zusammenfallen, da die Ungleichheit der einen Stücke die Kongruenz beider Dreiecke, folglich auch die Gleichheit der anderen Stücke ausschliesst.

3) eine Seite und ein anliegender Winkel gleich sind, die andere den Winkel einschliessende Seite aber ungleich;

aus dem dritten Kongruenzsatze Dreiecke, in welchen

4) zwei Seiten gleich sind, die der grösseren gegenüberliegenden Winkel aber ungleich;

5) eine Seite und ihr Gegenwinkel gleich, die andern Seiten ungleich sind.

Und aus dem vierten Satze entstehen Dreiecke, in welchen

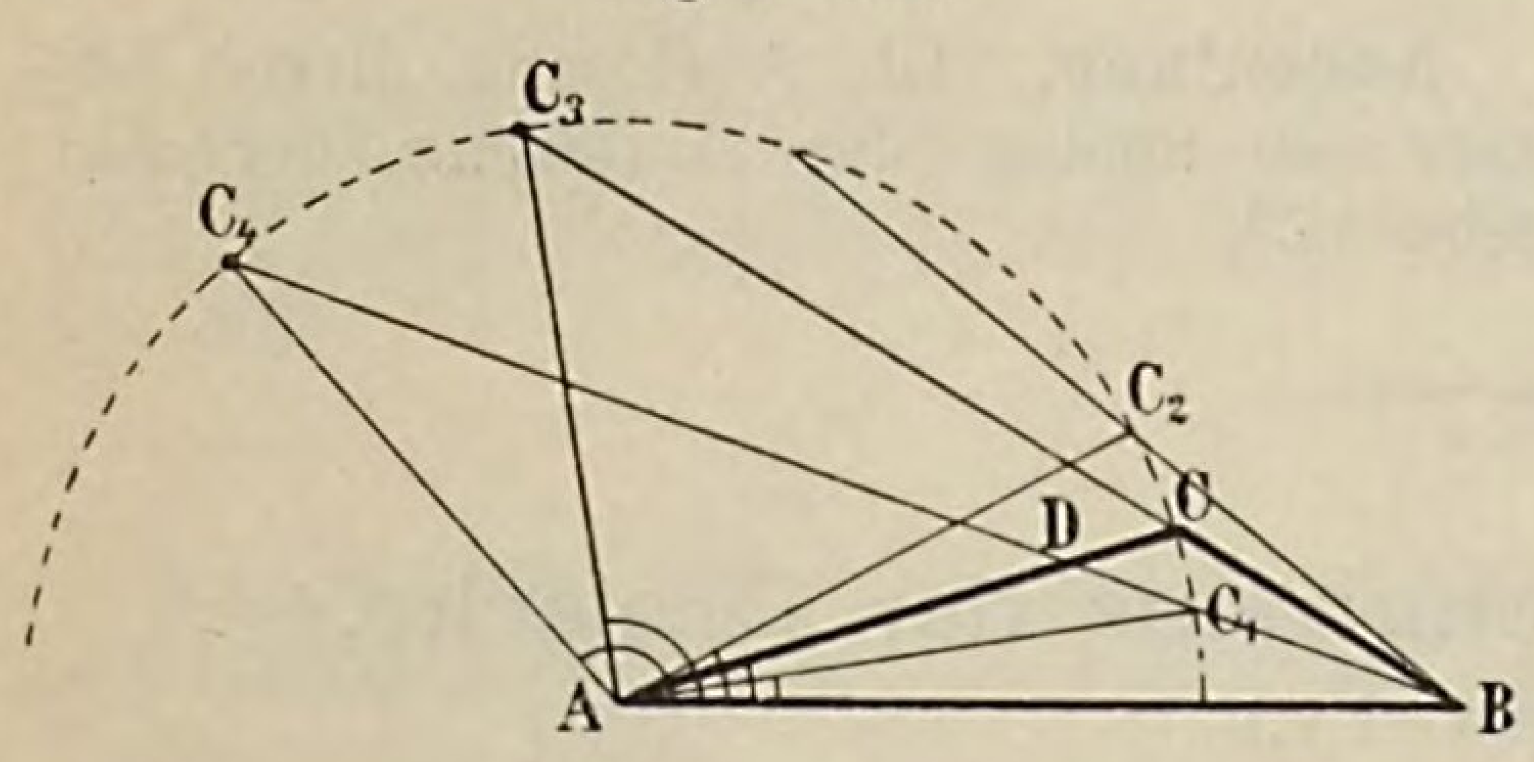
6) eine Seite und ein anliegender Winkel gleich, der andere anliegende Winkel ungleich ist;

7) zwei, also alle drei Winkel gleich sind, eine Seite aber ungleich.

Darunter sind im ganzen vier unabhängig verschiedene Fälle.

Aufgabe 198. Man untersuche die Seiten- und Winkelbeziehungen zweier Dreiecke, welche zwei bezüglich gleichgrosse Seiten haben.

Figur 262.



Erkl. 611. Satz 51 findet Anwendung auf die Punkte C_1 und C_2, weil C_1 ein Punkt im Innern des Dreiecks ABC, C_2 ein Punkt im Scheitelwinkelraum von ABC ist. Denn da sowohl die Linie AC_2 als BC_2 ausserhalb des Dreiecks ABC verlaufen, so muss bei Verlängerung der Dreieckseiten AC und BC erstere die Linie BC_2, letztere AC_2 schneiden, so dass Punkt C_2 im Winkel der Verlängerungen, also im Scheitelwinkel von ACB liegt.

Auflösung. Um zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ zu untersuchen, in welchen zwei Seiten $c = c'$ und $b = b'$ bezüglich gleich sind, verfahre man wie in den Antworten der Fragen 126 bis 129; man lege also die zwei Dreiecke so aufeinander, dass die entsprechenden Endpunkte der Seiten c und c' aufeinanderfallen. In dieser neuen Lage muss dann die Seite b' entweder in den Innenwinkel β oder in den Aussenwinkel von β fallen. Punkt b' aber muss mit b gleichen Abstand von B haben, liegt also mit C auf einem Kreise um B mit Radius $b = b'$, und hat deshalb eine der mit C_1, C_2, C_3, C_4 bezeichneten Lagen in Figur 262. Während nun wegen der Lage der Winkelschenkel AC_1 bis AC_4 unmittelbar klar ist, dass:

$$\sphericalangle BAC_1 < \sphericalangle BAC < BAC_2 < BAC_3 < BAC_4,$$

so ist für die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten nur bei der Lage C_3 unmittelbar klar, dass:

$$BC_3 > BC$$

ist. Jedoch findet man durch Anwendung der Sätze 49 und 51 ferner, dass:

$$AC_1 + BC_1 < AC + BC,$$

also wegen $AC_1 = AC$ auch $BC_1 < BC$; und

$$AC_2 + BC_2 > AC + BC,$$

also wegen $AC_2 = AC$ auch $BC_2 > BC$.

Endlich findet man für die Lage C_4 folgendes, indem man den Schnittpunkt von $C_1 C_4$ mit AC durch D bezeichnet:

$$BD > BC - CD \text{ und } DC_4 > AC_4 - AD,$$

also durch Addition:

$$BD + DC_4 = BC_4 > BC - CD + AC_4 - AD,$$

oder da:

$$AC_4 - CD - AD = AC_4 - AC = 0,$$

$$BC_4 > BC.$$

Demnach sind zusammengehörige Seiten- und Winkelpaare:

$$\sphericalangle BAC_1 < BAC < BAC_2 < BAC_3 < BAC_4$$

und

$$BC_1 < BC < BC_2 < BC_3 < BC_4.$$

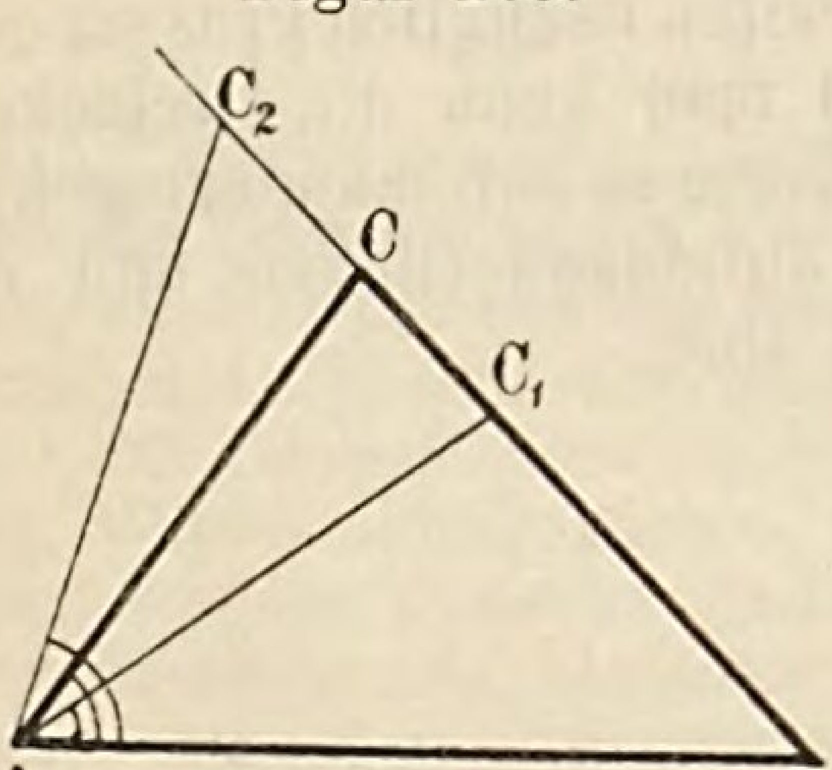
Man kann also zu den drei ersten Kongruenzsätzen den Zusatz machen:

Satz. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten bezüglich gleich haben, so hat dasjenige Dreieck die grössere dritte Seite, welches den grösseren eingeschlossenen Winkel hat, und umgekehrt dasjenige Dreieck den grösseren eingeschlossenen Winkel, welches die grössere dritte Seite hat.

Erkl. 612. Statt die Beweisführung durch Aufeinanderlegen der beiden Dreiecke $A'B'C'$ und ABC zu führen, kann man auch die Lagen ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4 aus der Lage ABC dadurch entstehen lassen, dass man die Seite AC unter Beibehaltung ihrer Länge sich um A drehen lässt. Dabei beschreibt Punkt C den Weg, welchen die Kreislinie in Figur 262 angibt, und die Seite BC nimmt ab und zu gleichzeitig mit Abnahme und Zunahme des Winkels bei A; und umgekehrt verändert sich die Grösse des Winkels bei A in gleicher Richtung, wie diejenige der Seite BC. — Anwendung dieser letzteren Anschauungsweise findet auch statt bei der Lehre vom Kreise (siehe den vierten Teil dieses Lehrbuches).

Aufgabe 199. Man untersuche die Seiten- und Winkelbeziehungen zweier Dreiecke, welche eine Seite und einen anliegenden Winkel bezüglich gleich haben.

Figur 263.



Auflösung. Um zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ zu untersuchen, in welchen eine Seite $c = c'$ und ein anliegender Winkel $\beta = \beta'$ bezüglich gleich sind, lege man wieder die beiden Dreiecke so aufeinander, dass die entsprechenden Eckpunkte der Seiten c und c' zusammenfallen. In dieser neuen Lage muss dann der Winkel β' genau auf Winkel β fallen, also Seite a' der Richtung nach auf a und Punkt C' auf die Seite b bezw. b' zu liegen kommen. Es ist also ohne alle weitere Ueberlegung klar, dass (siehe Figur 263) je grösser der Winkel α ist, desto weiter hinaus der Punkt C fällt, dass also grösserer Winkel α und grössere Seite a einander bedingen. Man erhält also zum zweiten und vierten Kongruenzsatz ebenfalls einen Zusatz, nämlich:

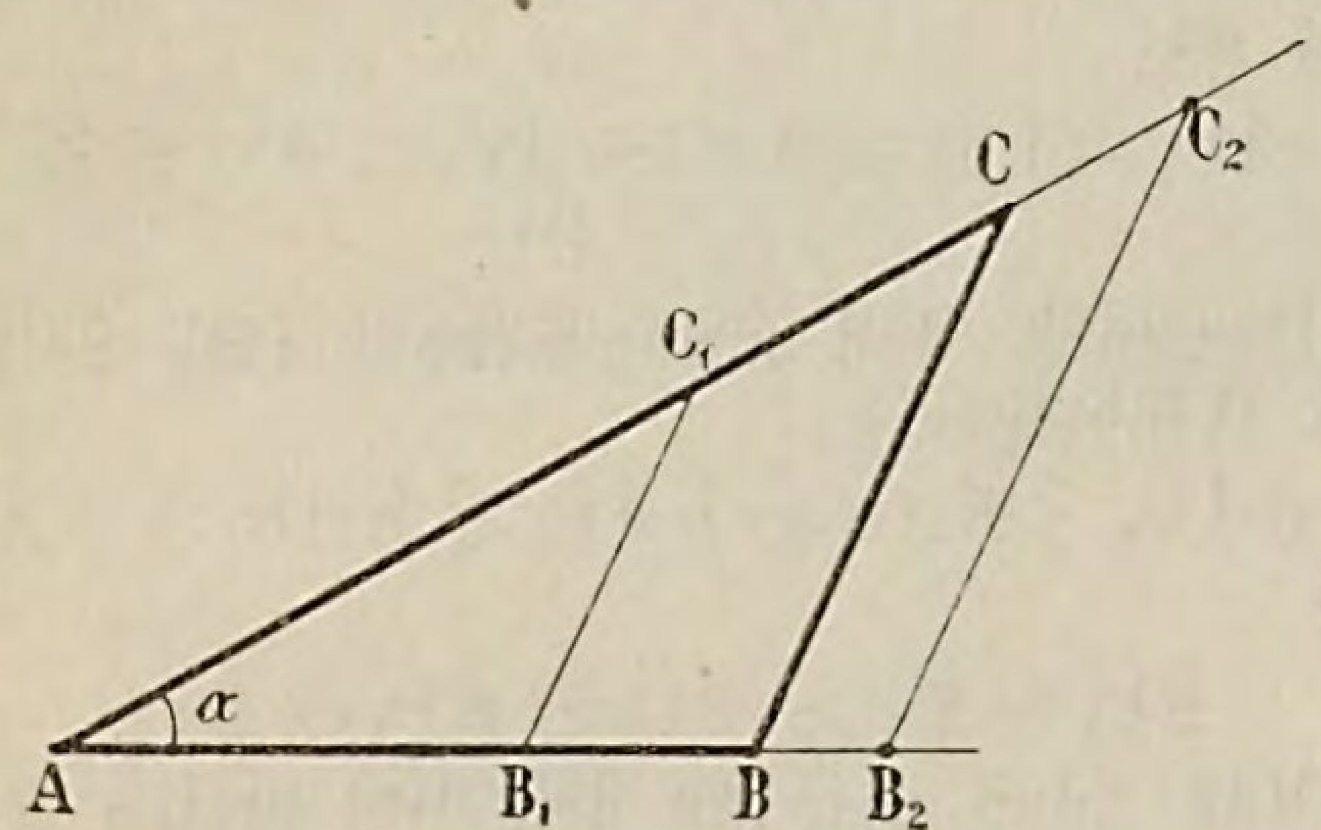
Satz. Wenn zwei Dreiecke eine Seite und einen anliegenden Winkel bezüglich gleich haben, so hat dasjenige Dreieck eine grössere zweite Seite an diesem Winkel, an welchem der andere anliegende Winkel der grössere ist, und umgekehrt dasjenige Dreieck den grösseren zweiten anliegenden Winkel, in welchem die Gegenseite dieses Winkels die grössere ist.

Erkl. 613. Für den besonderen Fall des rechtwinkligen Dreiecks ist der Gegenstand dieser Aufgabe bereits in Aufgabe 133 und 134 eingehend behandelt worden.

Erkl. 614. Der in Auflösung der Aufgabe 197 als fünfter angeführte Fall der Gleichheit einer Seite und ihres Gegenwinkels wird erst dann übersichtlich behandelt werden können, wenn bei der Lehre vom Kreise erkannt worden ist, welche Lagen in diesem Falle die Gegenecke dieser Seite einnehmen kann. Man sehe hierüber bei der Lehre von den „Peripheriewinkeln“ im vierten Teile dieses Lehrbuches. Im Zusammenhang damit steht die Auflösung der Aufgabe 161.

Aufgabe 200. Man untersuche die Beziehungen der Seiten zweier Dreiecke, welche zwei, also alle drei Winkel bezüglich gleich haben.

Figur 264.



Erkl. 615. Die der nebenstehenden Betrachtung zu Grunde liegende Lage zweier Dreiecke mit drei entsprechend gleichen Winkeln wird erweiterte Anwendung erfahren bei der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke im sechsten Teile dieses Lehrbuches. Man nennt nämlich zwei solche Dreiecke ähnlich, welche drei Winkel, nicht aber auch die drei Seiten gleich haben. Dreiecke, welche die drei Seiten, nicht aber auch die drei Winkel gleich haben, sind nach dem ersten Kongruenzsatze unmöglich, denn die Gleichheit der drei Seiten bedingt die Kongruenz des Dreiecks, also auch die Gleichheit der drei Winkel.

Erkl. 616. Der Schlussteil des nebenstehenden Satzes ist ebenfalls wichtig für die Lehre von der Aehnlichkeit von Vielecken. Wenn nämlich in zwei Vielecken die sämtlichen Winkel in gleicher Reihenfolge entsprechend gleich sind, so werden je zwei entsprechende Winkel korrespondierende, sowie man die entsprechenden Seiten eines gleichen Winkels beider Vielecke zur Deckung bringt. Dann sind also auch alle entsprechenden Seiten beider Vielecke parallel.

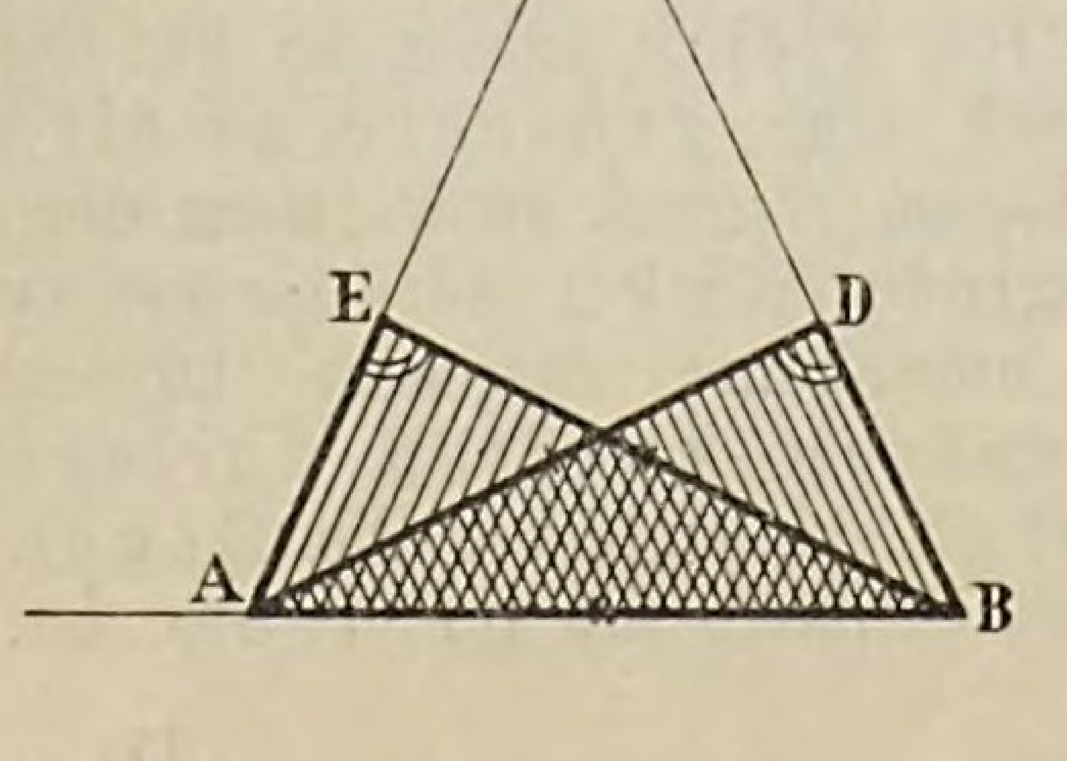
Auflösung. Um zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ zu untersuchen, in welchen die Winkel $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ bezüglich gleich sind, lege man die beiden Dreiecke so aufeinander (siehe Figur 264), dass die Punkte A und A', sowie die Richtungen der Schenkel AB und $A'B'$ aufeinanderfallen. Da dann $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$ ist, so muss auch die Richtung AC mit der Richtung $A'C'$ zusammenfallen, so dass sowohl die gleichen Winkel $\beta = \beta'$, als $\gamma = \gamma'$ die Lage korrespondierender Winkel annehmen. Daher muss $a \parallel a'$ werden, und wenn dabei b' grösser ist als b, so muss sowohl Punkt C' innerhalb der Strecke AC liegen, als auch B' innerhalb AB und umgekehrt, oder es muss $c' \gtreqless c$ sein, wenn $a' \gtreqless a$ ist.

Würde man die Dreiecke statt mit den Winkeln α' und α, mit den Winkeln $\beta' = \beta$ oder $\gamma' = \gamma$ aufeinanderlegen, so würde ebenso $b' \parallel b$ bezw. $c' \parallel c$, und es würde $c' \gtreqless c$ wenn $b' \gtreqless b$ ist. Also wird gleichzeitig $a' \gtreqless a$, $b' \gtreqless b$, $c' \gtreqless c$, und man kann zum vierten Kongruenzsatz den Zusatz machen:

Satz. Wenn zwei Dreiecke die drei Winkel bezüglich gleich haben, so hat dasjenige Dreieck alle drei entsprechenden Seiten bezüglich grösser oder kleiner, in welchem eine einzige dieser Seiten bezüglich grösser oder kleiner ist, und man kann die Dreiecke auf dreifache Weise so aufeinanderlegen, dass zwei Seiten aufeinanderliegen und die dritten parallel sind.

Aufgabe 201. Man soll mittels Kongruenz beweisen, dass ein Dreieck mit zwei gleichen Höhen gleichschenklig sein muss.

Figur 265.



Auflösung. Sind die beiden Ecken, von welchen die gleichen Höhen ausgehen, mit A und B bezeichnet, und die Fusspunkte dieser Höhen auf den Gegenseiten mit D und E, so entstehen zwei Dreiecke ABE und ABD. In diesen ist die Seite $AB = AB$, ferner nach Voraussetzung die Seite $AD = BE$, und auch der rechte Winkel $ADB = BEA$. Es haben also die beiden Dreiecke zwei Seiten und den der einen davon gegenüberliegenden rechten Winkel gleich, folglich müssen nach dem dritten Kongruenzsatze beide Dreiecke kongruent und die an der

Erkl. 617. Bei der Gleichheit zweier Mittellinien oder Winkelhalbierenden ist die Kongruenz der von diesen gebildeten Teildreiecke nicht sofort erkennbar, dagegen werden bei der Lehre von der Aehnlichkeit über die Mittellinien solche Eigenschaften aufgefunden werden, welche auch bei jenen die Kongruenz der Teildreiecke erschliessen lassen.

Aufgabe 202. Man soll aus den in den Auflösungen der Aufgaben 159 bis 163 enthaltenen Determinationen Kongruenzbedingungen aufstellen für Dreiecke, welche in denjenigen Stücken übereinstimmen, aus welchen jene Dreiecke konstruiert wurden.

Erkl. 618. Ebenso wie im Nebenstehenden aus den Aufgaben 159 bis 163 Kongruenzsätze abgeleitet werden, kann man aus jeder Konstruktionsaufgabe eines Dreiecks Kongruenzbedingungen herleiten für Dreiecke, welche in den gegebenen Bestimmungsstücken übereinstimmen.

Die wichtigsten Konstruktionen eines Dreiecks sind aber die aus dessen Seiten und Winkeln allein. Deshalb sind auch die aus jenen Aufgaben entspringenden Kongruenzsätze die vier ersten und wichtigsten, und als solche allen andern vorangestellt.

Erkl. 619. Die angezogenen Aufg. 159 bis 163, aus welchen die nebenstehenden Kongruenzsätze herstammen, sind selbst nur die Musterbeispiele für viele solcher Aufgaben, in welchen die Seiten und Winkel des Dreiecks zusammen mit Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierenden u. s. w. als Bestimmungsstücke des Dreiecks auftreten. Man wird daher ebensowohl, als man nach deren Beispiel neue Aufgaben zusammenstellen kann, auch neue Kongruenzbedingungen erhalten für Dreiecke, die in irgend welchen Stücken übereinstimmen.

Erkl. 620. Wenn eine Aufgabe überhaupt nur eine einzige Lösung gestattet, so müssen alle Dreiecke, welche an beliebigen Stellen der Zeichnungsebene mit den gleichen Bestimmungsstücken konstruiert werden, dieselben sein, oder alle Dreiecke sind kongruent, welche in jenen Stücken übereinstimmen.

Lässt eine Aufgabe zweierlei Lösungen zu, so sucht man deren Unterschiede auf, und findet, dass alle Dreiecke der einen Art unter sich

Seite AB liegenden Winkel $ABC = BAC$ sein, d. h. das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

Auflösung. 1) Nach Auflösung der Aufgabe 159 kann man aus einer Höhe nebst einem nicht zugehörigen Winkel und dessen Gegenseite noch zweierlei verschiedene Dreiecke konstruieren, welche sich dadurch unterscheiden, dass der zweite nicht zur Höhe gehörige Winkel entweder spitz oder stumpf werden kann. Wird also durch eine Zusatzbestimmung die Art dieses Winkels beschränkt, so erhält man die Kongruenzbedingung:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Höhe, einem nicht zugehörigen Winkel und dessen Gegenseite, falls der zweite nicht zur Höhe gehörige Winkel beidemale spitz, oder beidemale stumpf ist.

2) Nach Auflösung der Aufgabe 160 kann man aus zwei Seiten und der Mittellinie der einen davon nur ein einziges Dreieck konstruieren; daher müssen auch alle Dreiecke, welche aus solchen Stücken an verschiedenen Orten konstruiert werden, dieselben sein. Man erhält daher den Satz:

> Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und die zu einer davon gehörige Mittellinie im einen Dreieck so gross sind, als zwei Seiten und die zur entsprechenden Seite gehörige Mittellinie im andern Dreieck.

3) Nach Auflösung der Aufgabe 161 kann man aus einer Seite, ihrem Gegenwinkel und der Summe der diesen Winkel einschliessenden Seiten zwar zwei Dreiecke konstruieren, jedoch sind beide ungleichwendig kongruent. Daher kann man allgemein sagen:

> Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen eine Seite und deren Gegenwinkel, sowie die Summe der beiden andern Seiten bezüglich gleich sind.

4) Nach Auflösung der Aufgabe 162 kann man aus zwei Seiten und der Differenz ihrer

dieselben sind, und alle der anderen Art wieder unter sich dieselben. Also sind im Falle zweier Lösungen zwei Dreiecke kongruent, wenn sie in den gegebenen Stücken übereinstimmen und beide das eine oder beide das andere Unterscheidungsmerkmal der beiden verschiedenen Lösungsgruppen besitzen.

Ebenso wäre zu verfahren, wenn eine Aufgabe mehr als zwei Lösungen lieferte: Man erhält einen Kongruenzsatz mit dem beschränkenden Zusatze, dass von den Unterscheidungsmerkmalen jener drei Lösungen das erste oder das zweite oder das dritte allein bestehen muss.

Gegenwinkel nur ein einziges Dreieck konstruieren, also kann man auch ohne Beschränkung aussagen:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und die Differenz ihrer Gegenwinkel entsprechend gleich haben.

5) Nach Auflösung der Aufgabe 163 kann man aus einem Winkel und der zu einer Schenkelseite desselben gehörigen Höhe und Winkelhalbierenden manchmal zweierlei Dreiecke konstruieren, welche sich dadurch unterscheiden, dass der $\sphericalangle(w, h)$ entweder in positiver oder in negativer Drehungsrichtung durchmessen ist. Wenn also durch eine Zusatzbedingung der Drehungssinn dieses Winkels beschränkt wird, so gibt es auch in dem Falle allgemeiner doppelter Lösung nur noch einerlei Dreiecke, und man erhält den Satz:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn ein Winkel und die zu einer Schenkelseite desselben zugehörige Höhe und Winkelhalbierende in beiden gleich ist — falls der Winkel (w, h) beidemal im positiven oder beidemal im negativen Drehungssinne gemessen ist.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 203. Welche Beziehungen können zwischen zwei gleichschenkligen Dreiecken bestehen, bei denen zur Herbeiführung der Kongruenz noch eine Gleicheit fehlt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 197 und Antwort der Frage 121.

Aufgabe 204. Welche Beziehungen zwischen Schenkeln und Winkeln bestehen in zwei gleichschenkligen Dreiecken von gleicher Grundseite?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 199.

Aufgabe 205. Welche Beziehungen zwischen Grundseiten und Winkeln bestehen in zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gleichen Schenkeln?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 198.

Aufgabe 206. Welche Beziehungen können zwischen zwei rechtwinkligen Dreiecken bestehen, welchen zur Herbeiführung der Kongruenz noch eine Gleichheit fehlt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 197 und Antwort der Frage 122.

Aufgabe 207. Welche Beziehungen bestehen zwischen Seiten und Winkeln zweier rechtwinkligen Dreiecke, welche 1) eine gleiche Kathete, 2) eine gleiche Hypotenuse, 3) gleiche Winkel haben?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 198 bis 200 und 133 und 134.

Aufgabe 208. Man soll Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln gleichschenkliger Dreiecke aufstellen, welche gleiche Höhe haben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 207.

C. Aufgaben über das Viereck.

1) Aufgaben über das allgemeine Trapezoid und Trapez.

(Zu Abschnitt C 2 a und b α.)

a) Gelöste Aufgaben.

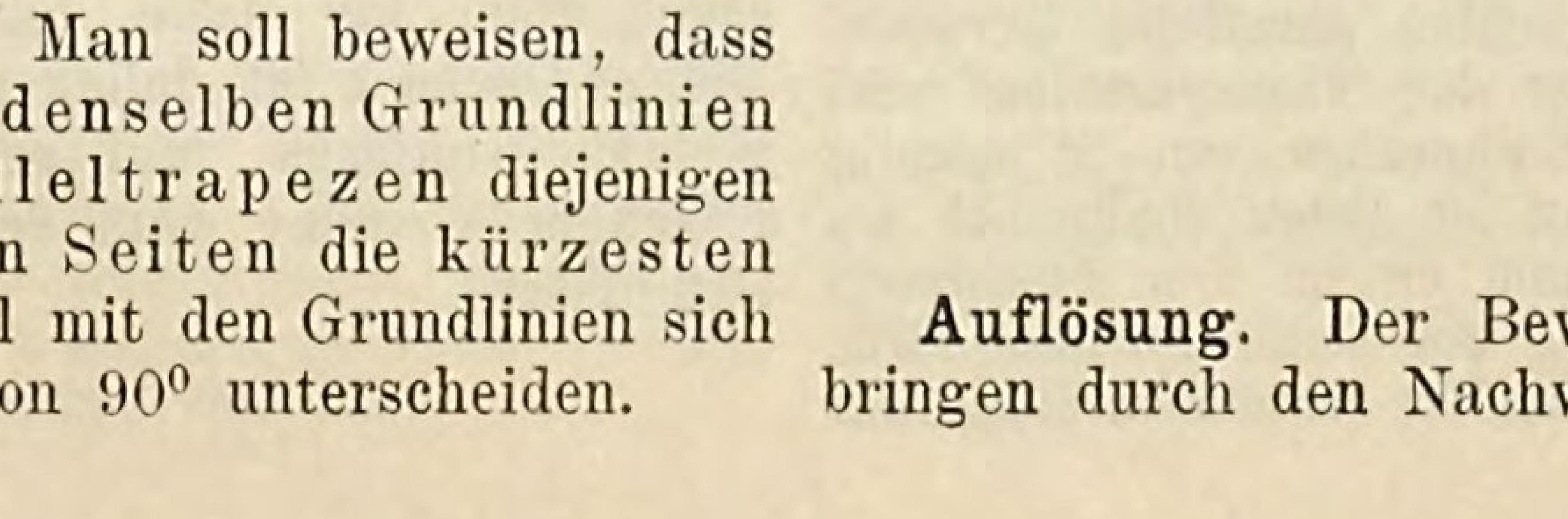
Aufgabe 209. Man soll die Grenzen angeben, zwischen welchen die vierte Seite eines Vierecks liegen muss, dessen erste drei Seiten sind:

a) 2, 3, 17, b) 12, 19, 36, c) 19, 20, 21, d) 148, 160, 200, e) o, n, m, wie $o < n < m$.

Erkl. 621. Je näher beisammen die Grössen der drei ersten Seiten liegen, desto grösser ist der Spielraum für die vierte. Und je weiter umgekehrt die Abstände unter den drei ersten sind, desto geringerer Spielraum bleibt für die letzte. Die vierte Seite kann bis an Null herankommen, wenn aus den drei ersten ein Dreieck möglich ist.

Auflösung. Nach Satz 67 muss die vierte Seite eines Vierecks liegen zwischen der Summe der drei andern — und der Differenz aus der grössten und der Summe der beiden kleineren von den übrigen drei Seiten, nämlich über dieser Differenz und unter jener Summe. Also muss in nebenstehenden Fällen die vierte Seite liegen:
a) zwischen 12 und 22, b) zwischen 5 und 67, c) zwischen 0 und 60, d) zwischen 0 und 508, e) zwischen $m-(o+n)$ und $m+n+o$.

Figur 266.



Aufgabe 210. Man soll beweisen, dass bei allen zwischen denselben Grundlinien errichteten Paralleltrapezen diejenigen nicht parallelen Seiten die kürzesten sind, deren Winkel mit den Grundlinien sich am wenigsten von 90° unterscheiden.

Auflösung. Der Beweis lässt sich erbringen durch den Nachweis, dass von den

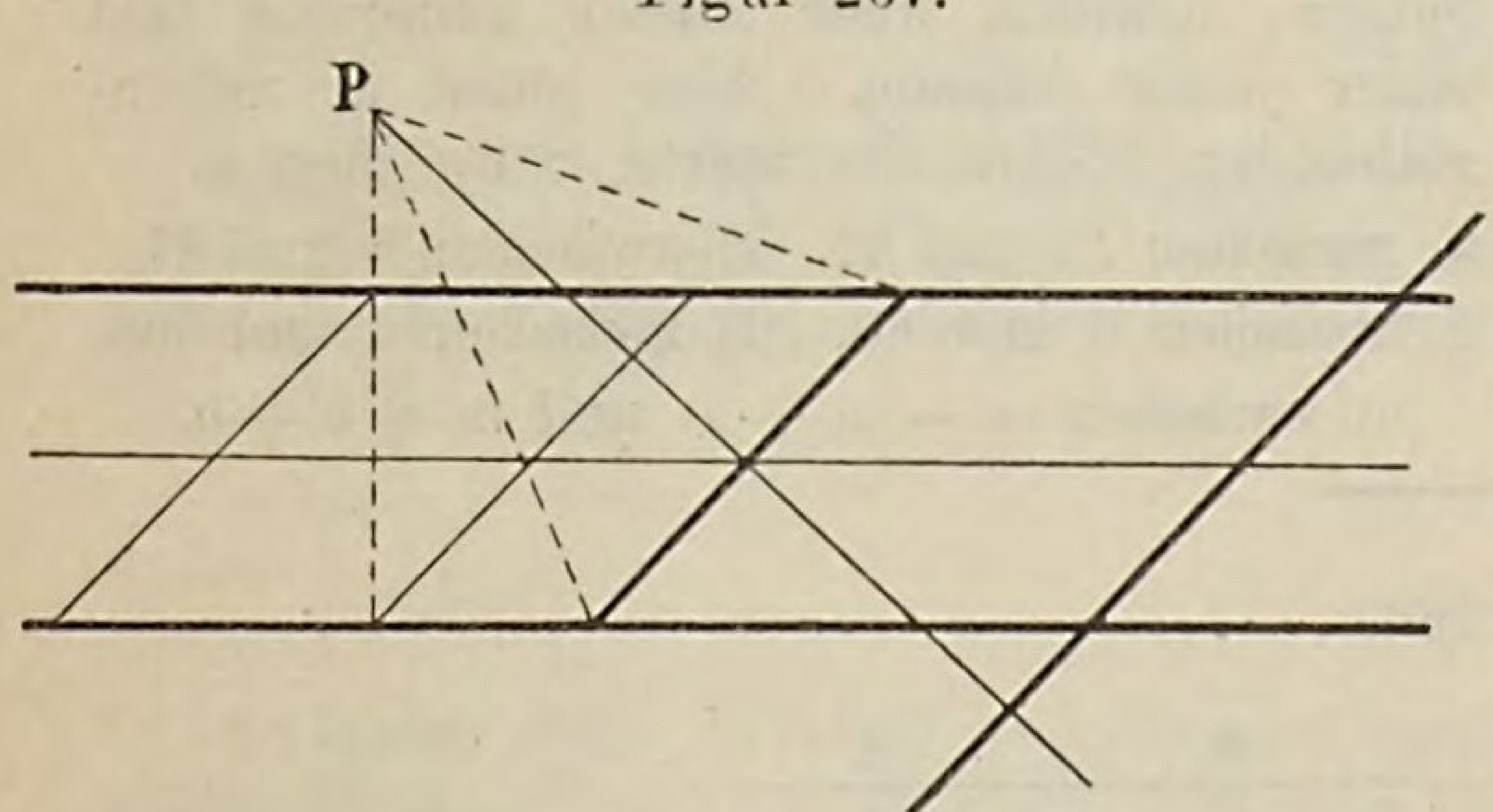
Erkl. 622. An Stelle des Punktes P könnte auch irgend einer der Punkte B gewählt werden oder einer der Punkte A oder ein beliebiger Punkt auf der Parallelen AC.

Erkl. 623. Jede Transversale bildet mit jeder Parallelen zwei Winkel, einen stumpfen und einen spitzen. Als innere Wechselwinkel sind aber die beiden spitzen gleich und die beiden stumpfen gleich. Da ferner beide Supplementwinkel sind, so ist der eine ebenso viel unter 90°, als der andere über 90°; und daher unterscheiden sich beide um gleichviel vom rechten Winkel, der eine um einen positiven, der andere um einen negativen Betrag. Wird aber einer von beiden Winkeln selbst 90°, so wird jeder von allen vier Winkeln ein Rechter, die Transversale ist senkrecht auf beiden Linien und ist die kürzeste Strecke, welche zwischen beiden Parallelen eingetragen werden kann.

Transversalen zweier Parallelen diejenigen am kürzesten sind, deren Winkel mit beiden Parallelen dem Rechten am nächsten ist. Um nämlich die Transversalen A_1B_1 bis A_4B_4 in Figur 266 auf ihre Länge zu untersuchen, ziehe man zu allen vier Transversalen parallele Linien durch einen und denselben Punkt P auf einer der Parallelen, so dass $PC_1 \parallel B_1A_1$, $PC_2 \parallel A_2B_2$ u. s. w. Dann sind nach Satz 32 auch die Strecken $PC_1 = B_1A_1$, $PC_2 = A_2B_2$ u. s. w. und die Winkel der Strecken P_1C_1 u. s. w. mit PB und AC sind auch als korrespondierende Winkel gleich den Winkeln der Strecken B_1A_1 u. s. w. mit denselben Parallelen. Nun sind aber nach Satz 53 diejenigen unter den Geraden PC die längeren, deren Winkel mit AC der kleinere, oder deren Winkel mit der Senkrechten von P auf AC der grössere ist. Folglich ist auch unter den Strecken AB jede solche kürzer, als die übrigen, welche mit dieser Senkrechten einen kleineren Winkel bildet, und diejenige die kürzeste, deren Winkel mit der Senkrechten am kleinsten ist, also deren Winkel mit den Parallelen dem Rechten am nächsten kommen.

Aufgabe 211. Man soll eine Transversale zwischen zwei Parallelen in eine solche Lage verschieben, dass ihre beiden Endpunkte von einem gegebenen Punkte P den gleichen Abstand haben.

Figur 267.



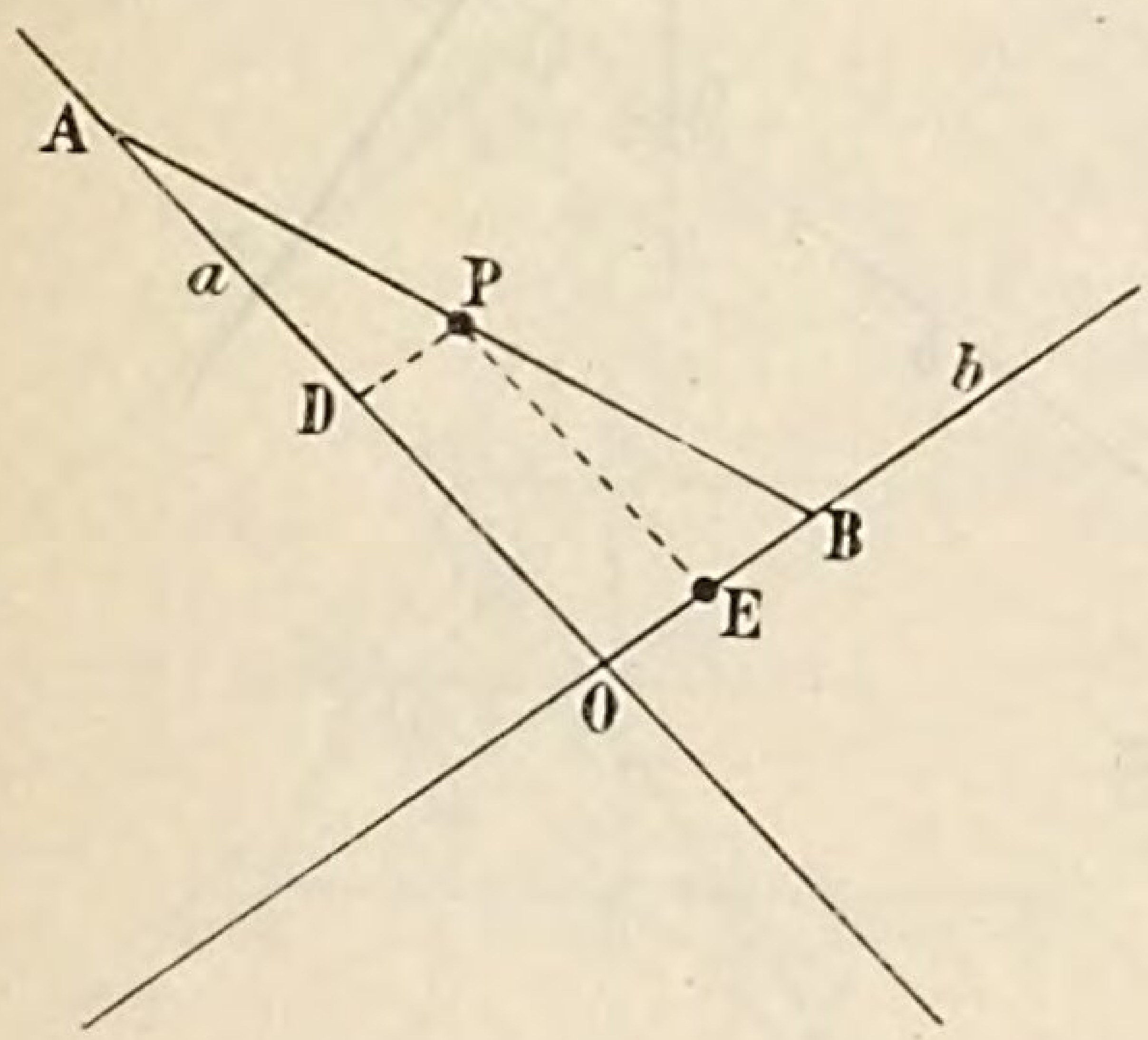
Erkl. 624. Wird eine Transversale zwischen zwei Parallelen so verschoben, dass eine der Parallelen als Leitlinie dient, so wandert der andere Endpunkt wegen Satz 32a stets auf der andern Parallelen, und der Mittelpunkt der Transversalen bleibt wegen Satz 31 stets auf der Mittelparallelen der beiden parallelen Geraden. Bei der Verschiebung der Transversalen wird der Abstand ihrer Endpunkte von P ständig verändert, und zwar ist jeder Endpunkt am nächsten bei P, wenn er in den Fusspunkt der Senkrechten von P auf seine Leitlinie fällt. In der im Nebenstehenden erreichten Lage der

Auflösung. Wenn die Transversale die verlangte Lage erreicht hat, so muss sie mit dem Punkte P ein gleichschenkliges Dreieck bilden, also muss die Senkrechte von P auf die Transversale deren Mittelpunkt treffen. Da aber die Senkrechte von P auf die gewünschte Lage der Transversalen auch senkrecht sein muss auf die vorher gegebene parallele Lage derselben, und da ferner der Mittelpunkt der Transversalen stets auf der Mittelparallelen bleiben muss: so muss der Schnittpunkt einer von P auf die vorgegebene Lage der Transversalen errichteten Senkrechten die Mittelparallele in demjenigen Punkte treffen, welcher der Mittelpunkt der verlangten Lage der Transversalen ist. Zieht man also durch diesen Schnittpunkt eine Parallele zur gegebenen Transversalen, so hat diese parallele Transversale mit der gegebenen nach Satz 32 gleiche Länge und bildet mit P ein Dreieck, dessen Spitze senkrecht über der Mitte der Grundseite liegt. Dieses Dreieck ist daher nach Erkl. 179 ein gleichschenkliges, und seine Spitze P hat gleichen Abstand von den Endpunkten der Grundseite.

Figur 267 sind beide gleichweit von P, in den Lagen nach rechts und links von jener aus ist stets der obere, bezw. der untere Endpunkt weiter weg von P, als der andere.

Aufgabe 212. Es seien zwei gerade Linien und ein Punkt gegeben. Man soll durch P eine Transversale so legen, dass auf ihr durch P und die beiden Geraden gleiche Strecken gebildet werden.

Figur 268.



Erkl. 625. Die gleichen Strecken können entweder zwischen P und den Richtungen OA und OB liegen, oder die eine zwischen P und OA, die andere zwischen OA und der Verlängerung von OB, oder die eine zwischen P und OB, die andere zwischen OB und der Verlängerung von OA. Die erste Lage liefert den ersten Fall der Auflösung (siehe Figur 268), die beiden andern den zweiten und dritten (s. Figur 269).

Erkl. 626. Es ist der Vereinfachung wegen für Analysis und Ausführung nicht je eine besondere Figur gezeichnet worden. Der Lernende mag daher zur Ausführung eine besondere Figur zeichnen, welche mit Figur 268 bis auf die Reihenfolge der Konstruktion übereinstimmt.

Erkl. 627. Wird die Gerade AB gedreht in positivem Umdrehungssinne, so wird Strecke PB immer grösser, PA zunächst kleiner bis zur Senkrechten, dann grösser bis zum Betrage PO. Schon bei paralleler Lage zu b aber erscheint Punkt B auf der Verlängerung der Linie OE über O hinaus. Bei umgekehrter Drehung würde OA stets grösser, und bis PB als Linie PE mit a parallel geworden, erscheint A auf der Verlängerung von OD.

Auflösung. Man hat dreierlei Fälle zu unterscheiden, je nachdem zwei Richtungen der beiden Geraden von ihrem Schnittpunkte aus durchschnitten werden.

Erster Fall.

Analysis. Angenommen, APB in Fig. 268 sei die gesuchte Transversale, also $PA = PB$. Dann ist OAB ein Dreieck, dessen Seite AB in P halbiert wird. Wenn daher durch P eine Parallele zu a oder b gelegt wird, so trifft diese auch die Strecke OB bezw. OA im Mittelpunkt; und man erhält den Punkt A oder B durch Verdoppelung dieser Strecken OD oder OB.

Ausführung. Man ziehe durch P eine Parallele $PD \parallel b$ oder $PE \parallel a$, trage OD bezw. OE in gleicher Richtung von O aus nochmals ab als DA oder EB, und verbinde A bezw. B mit P.

Beweis. Im Dreieck $OAPB$ ist D bezw. E Seitenmitte, DP bezw. EP sind Parallelen zur Seite OB bezw. OA, folglich treffen sie auch die andere Seite AB im Mittelpunkte P; also ist $PA = PB$.

Determination. Immer möglich mit einziger Lösung.

Zweiter und dritter Fall.

Analysis. Angenommen, PFG (Fig. 269) sei die gesuchte Transversale, also $PF = FG$. Dann erhält man durch die Gerade $PH \parallel a$ ein Dreieck PGH, in welchem O und F Seitenmitten sind, weil FO durch die Mitte von PG zu PH parallel geht. Also erhält man diesmal Punkt G durch Verdoppelung von OH.

Ausführung. Man ziehe (Figur 269) durch P zu einer der Geraden a oder b die Parallelstrecke $PH \parallel a$ oder $PL \parallel b$, verlängere OH bezw. OL über O hinaus um sich selbst bis $OG = OH$ oder $ON = OL$, und verbinde P mit G, bezw. mit N.

Beweis. Im Dreieck PGH bezw. PLN ist O jeweils Seitenmitte, und OF bezw. OM parallel zur Grundseite PH bezw. PL, folglich trifft diese Parallele die andere Seite

Erkl. 628. Man kann auch PG mittels der Parallelen $PL \parallel b$ und PN mittels der Parallelen $PH \parallel a$ erzeugen. Denn da F die Mitte von PG sein soll, so ist Punkt G zentrisch-symmetrisch zu P, GO der Richtung nach mit PL, also werden durch die Zentrale OFL wieder zentrisch-symmetrische Punkte O und L ausgeschnitten.

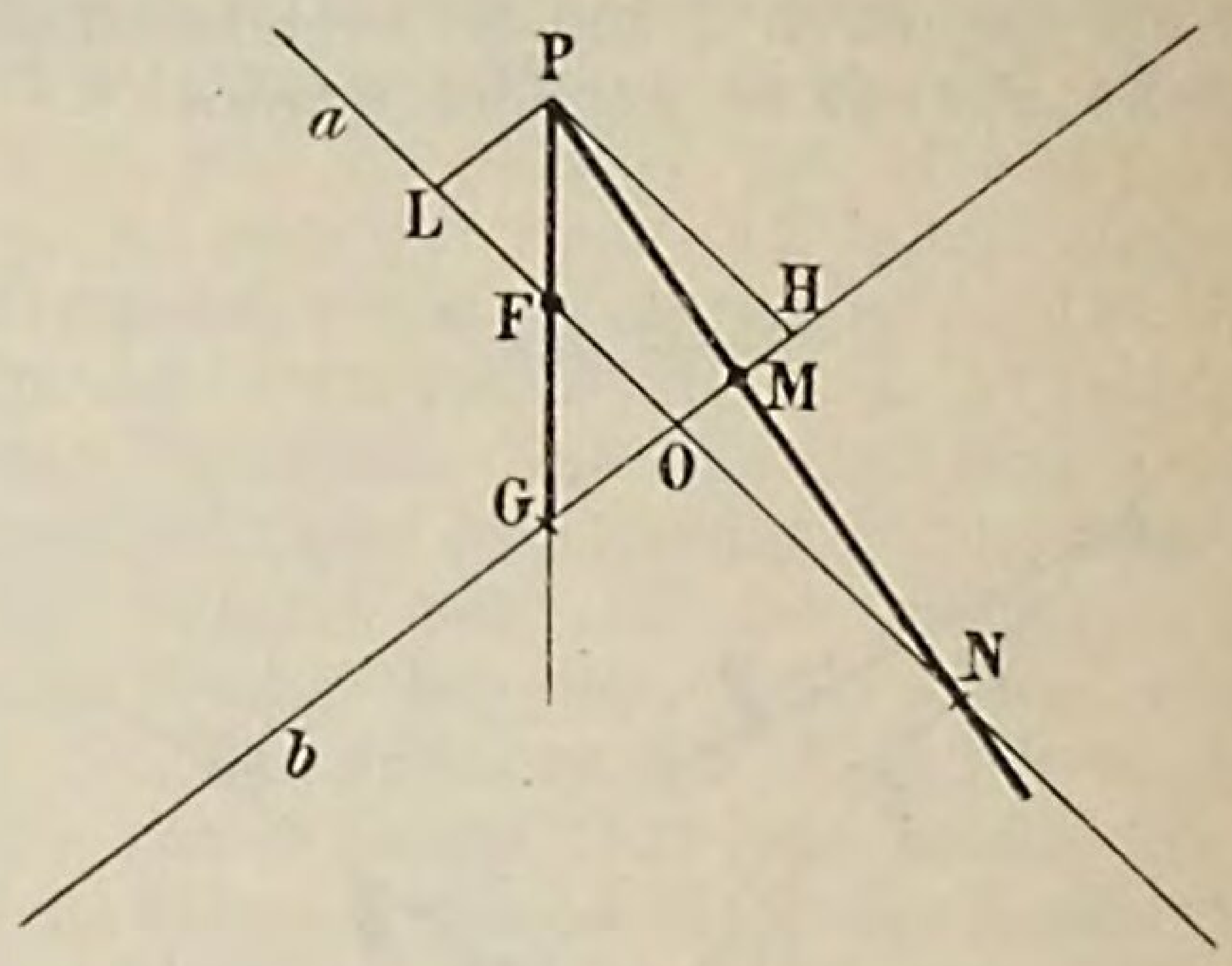
Zieht man also $PL \parallel b$, bezw. $PH \parallel a$, und halbiert die erhaltene Strecke OL bezw. OH in F oder M, so ist PF bezw. PM die Gerade, auf welcher auch P und G, bezw. P und N, zentrisch-symmetrische Punkte sind zum Mittelpunkte F bezw. M, also $PF = FG$, $PM = MN$.

Erkl. 629. Wird die Gerade PN gedreht im positiven Umdrehungssinne, so wird MN immer grösser, PM erst etwas kleiner bis zur Senkrechten, dann wieder grösser bis zur Parallelstrecke PH, aber nicht mehr gleich PN. Bei Drehung von PN im negativen Sinne aber werden sowohl PN als MN immer kleiner, bis für die Lage PO die Strecke $MN =$ Null, $PM = PN$ ist. Von da an wächst PM bis PG und PN nimmt wieder ab bis PF, MN aber wächst, bis es als GF wieder gleich PF wird.

PG bezw. PN im Mittelpunkt F oder M, also ist $PF = FG$ und $PM = MN$.

Determination. Man erhält zwei Lösungen, indem die gleichen Strecken in beiden Scheitelwinkeln der beiden gegebenen Geraden liegen können.

Figur 269.



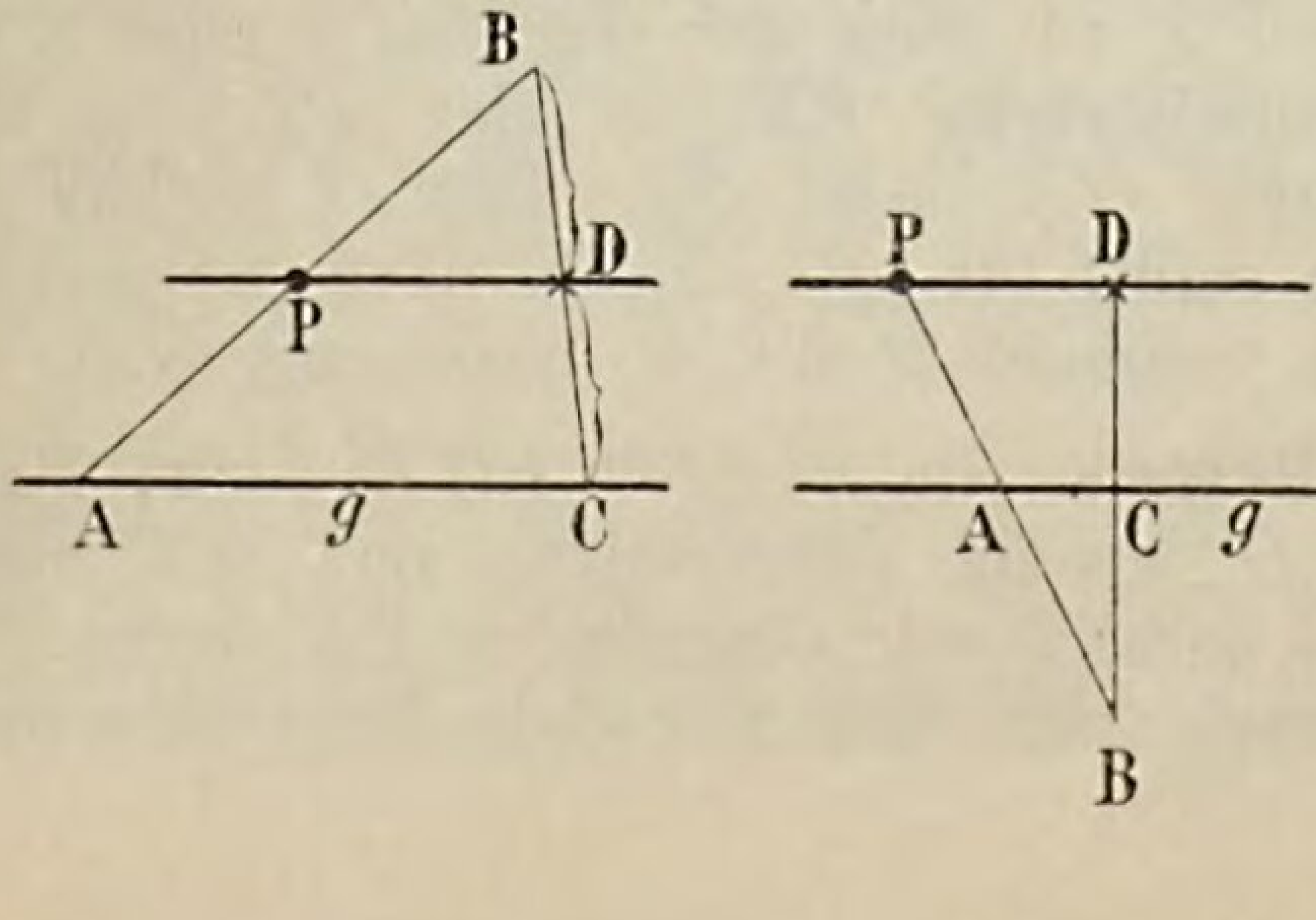
Aufgabe 213. Man soll durch eine vorgeschriebene Anzahl von n Parallelen einen gegebenen Parallelstreifen in n gleiche Teile teilen.

Erkl. 630. Nach Antwort der Frage 146 kann auch die Teilung der Transversalen selbst statt mit Massstab, mittels desselben Grundsatzes ausgeführt werden. Dieser Grundsatz, dass jede schiefe Transversale in ebensoviele gleiche Teile geteilt wird mittels der Parallelen durch die Teilpunkte einer einzigen derselben, bildet insbesondere die Grundlage für die Konstruktion der sogenannten Teilmaschinen. Auch bei diesen wird mittels einer einzigen, möglichst genau geteilten Strecke eine beliebige andere in ebensoviele gleiche Teile geteilt.

Auflösung. Um einen Parallelstreifen in n gleichgrosse Teilstreifen zu zerteilen, ziehe man beliebig entweder eine senkrechte oder eine schiefe Transversale durch den Streifen, messe auf dieser eine Teilung in n gleiche Strecken ab, und ziehe durch die Teilpunkte Parallelen zu den gegebenen Geraden. Sowohl bei senkrechter als bei schiefer Transversale kommt dann ein Teilstreifen je mit dem benachbarten zur Deckung, wenn man um den Betrag einer Teilstrecke auf der Transversalen verschiebt. Also sind sämtliche Teilstreifen kongruent und gleich (vergl. Figur 116).

Aufgabe 214. Man soll mittels Umkehrung der vorigen Aufgabe durch einen Punkt P eine Parallele zu einer gegebenen Geraden g konstruieren.

Figur 270, I, II.

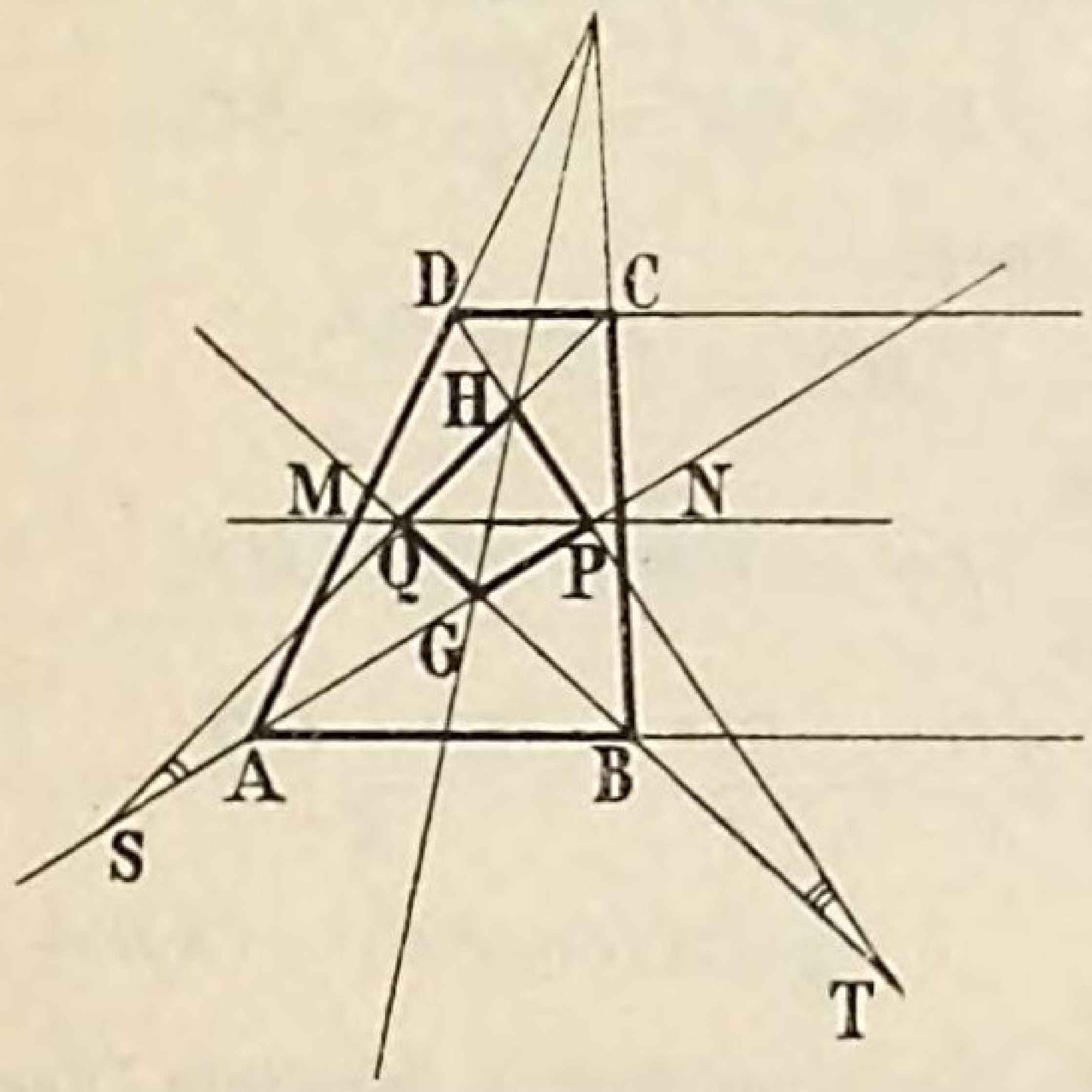


Auflösung. Um durch Punkt P eine Parallele zu g zu konstruieren, betrachte man P als Punkt der Mittelparallelen von g und einer zweiten Parallelen, lege daher durch P eine Transversale PA (Figur 270, I) gegen g und mache auf ihr P zum Mittelpunkt von AB, also $PA = PB$. Dann ziehe man durch B eine zweite Transversale BC gegen g und verbinde P mit dem Mittelpunkte derselben. Dann sind BA und BC die Seiten eines Dreiecks ABC, P und D dessen Seitenmitten, also $PD \parallel AC$.

Erkl. 631. Statt das Dreieck ABC zu benutzen, kann man je nach den Raumverhältnissen der Zeichnung auch die Strecke PA über A hinaus verlängern (Fig. 270, II) und so $AB = AP$ machen, durch B die Transversale BC legen, und auf dieser über C hinaus $CD = CB$ machen. Dann sind im Dreieck PBD die Punkte A und C Seitenmitten, also ihre Verbindungslinie AC parallel zur Grundseite PD, und umgekehrt $PD \| AC$.

Aufgabe 215. Unter welchem Winkel schneiden sich die Halbierungslinien zweier Gegenwinkel im Paralleltrapez?

Figur 271.



Erkl. 632. Da im Trapez:

$$\alpha = 180 - \delta$$

und

$$\gamma = 180 - \beta,$$

so entsteht durch Subtraktion:

$$\gamma - \alpha = \delta - \beta,$$

also ist der Winkel bei S gleich dem Winkel T. Und der Nebenwinkel ist jeweils:

$$180 - \frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{180 - \gamma}{2} + \frac{180 + \alpha}{2} =$$

$$90^0 + \frac{\alpha + \beta}{2} = 270^0 - \frac{\gamma + \delta}{2}.$$

Diese Grösse des Nebenwinkels ist auch daraus erkennbar, dass derselbe als Aussenwinkel des Dreiecks GQS bezw. GPT gleich sein muss $\sphericalangle SQG + \sphericalangle SGQ = 90^0 + (180^0 - \sphericalangle PGQ) = 270 - \frac{\gamma + \delta}{2} = 90 + \frac{\alpha + \beta}{2}$. Man beachte, dass in Figur 119 und nachher 272 Punkt G oben, H unten, dagegen in Figur 271 Punkt G unten, H oben ist.

Auflösung. Bezeichnet man mit S und T die Schnittpunkte und die spitzen Winkel der Linien AG und CH bezw. BG und DH in Figur 119, so erhält man nach Satz 77 im rechtwinkligen Dreieck PSH (s. Fig. 271) $\sphericalangle S = 90^0 - \sphericalangle SHP =$

$$90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180 - \beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

Und ebenso ist im rechtwinkligen Dreieck TQH der $\sphericalangle T = 90^0 - \sphericalangle THQ =$

$$90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180 - \alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\delta - \beta}{2}.$$

Daher kann man die folgende Aussage machen:

Satz: Je zwei Halbierungslinien zweier Gegenwinkel des Trapezes schneiden einander unter denselben Winkeln, gleich der halben Differenz je zweier Gegenwinkel des Trapezes.

Aufgabe 216. Welche Winkel und Strecken bilden die Winkelhalbierenden des Trapezes mit der Mittelparallelen derselben?

Auflösung. Da im Dreieck APM (siehe Figur 271) der:

$$\sphericalangle A = \frac{\alpha}{2} \text{ und } \sphericalangle M = \delta$$

Erkl. 633. Dass $\sphericalangle MPD = \frac{\delta}{2}$ ist, lässt sich erstens direkt erschliessen aus:

$$180 - \sphericalangle PMD - PDM = 180 - \alpha - \frac{\delta}{2} = \delta - \frac{\delta}{2},$$

zweitens aus:

$$\sphericalangle DPA - MPA = 90 - \frac{\alpha}{2} = \frac{180 - \alpha}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

Dass $MD = MP = MA$ sein muss, liesse sich ebenfalls schon aus der Rechtwinkligkeit der Linien AP und DP folgern. Denn da APD ein rechtwinkliges Dreieck ist und M Hypotenusenmitte, so muss nach Satz 60 $MP = \frac{AD}{2}$ sein. Auch daraus folgt dann wieder:

$$\sphericalangle MPD = \sphericalangle MDP = \frac{\delta}{2}.$$

Figur 271 unterscheidet sich von den Figuren 272 und 119 dadurch, dass hier die Schenkel eine grössereSumme bilden, als die Grundseiten, umgekehrt wie in jenen beiden Figuren. Daher ist auch in den Figuren 272 und 119 nicht $PQ = PM + QN - MN$, sondern $= MN - PM - QN$; und in den Differenzen stehen für Figur 271 die Schenkelseiten voran, für die Figuren 272 und 119 dagegen die Grundseiten.

Erkl. 634. Unter arithmetischem Mittel zweier Grössen versteht man die in der Mitte beider liegende Grösse. Und diese ist eben ihre halbe Summe. Denn von a bis $\frac{a+b}{2}$ ist gleichweit, wie von $\frac{a+b}{2}$ bis b, nämlich:

$$\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} = b - \frac{a+b}{2}$$

(S. Kleyers Lehrbücher der Arithmetik.)

ist, so muss:

$$\sphericalangle P = 180 - \delta - \frac{\alpha}{2} = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

sein, also ist:

$$\sphericalangle MAP = \sphericalangle MPA,$$

MAP ist ein gleichschenkliges Dreieck, und

$$PM = MA = \frac{AD}{2} = MD.$$

Ebenso ist daher (vergl. Erkl. 633):

$$\sphericalangle MPD = \frac{\delta}{2}$$

und andererseits:

$\sphericalangle BQN = \frac{\beta}{2}$, $CQN = \frac{\gamma}{2}$, BQN und CQN gleichschenklige Dreiecke,

$$QN = NB = \frac{BC}{2} = NC.$$

Da aber:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

ist, und

$$PQ = PM + QN - MN,$$

so wird:

$$PQ = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} - \frac{AB + CD}{2} = \frac{1}{2}[(AD + BC) - (AB + CD)];$$

d. h. die den Grundseiten parallele Diagonale des Vierecks der Winkelhalbierenden im Trapez ist gleich der halben Differenz aus den Summen der parallelen und der nicht parallelen Seiten. Da man obige Formel auch schreiben kann:

$$\frac{1}{2}[(AD - AB) + (CB - CD)] = \frac{1}{2}[(BC - AB) + (DA - DC)],$$

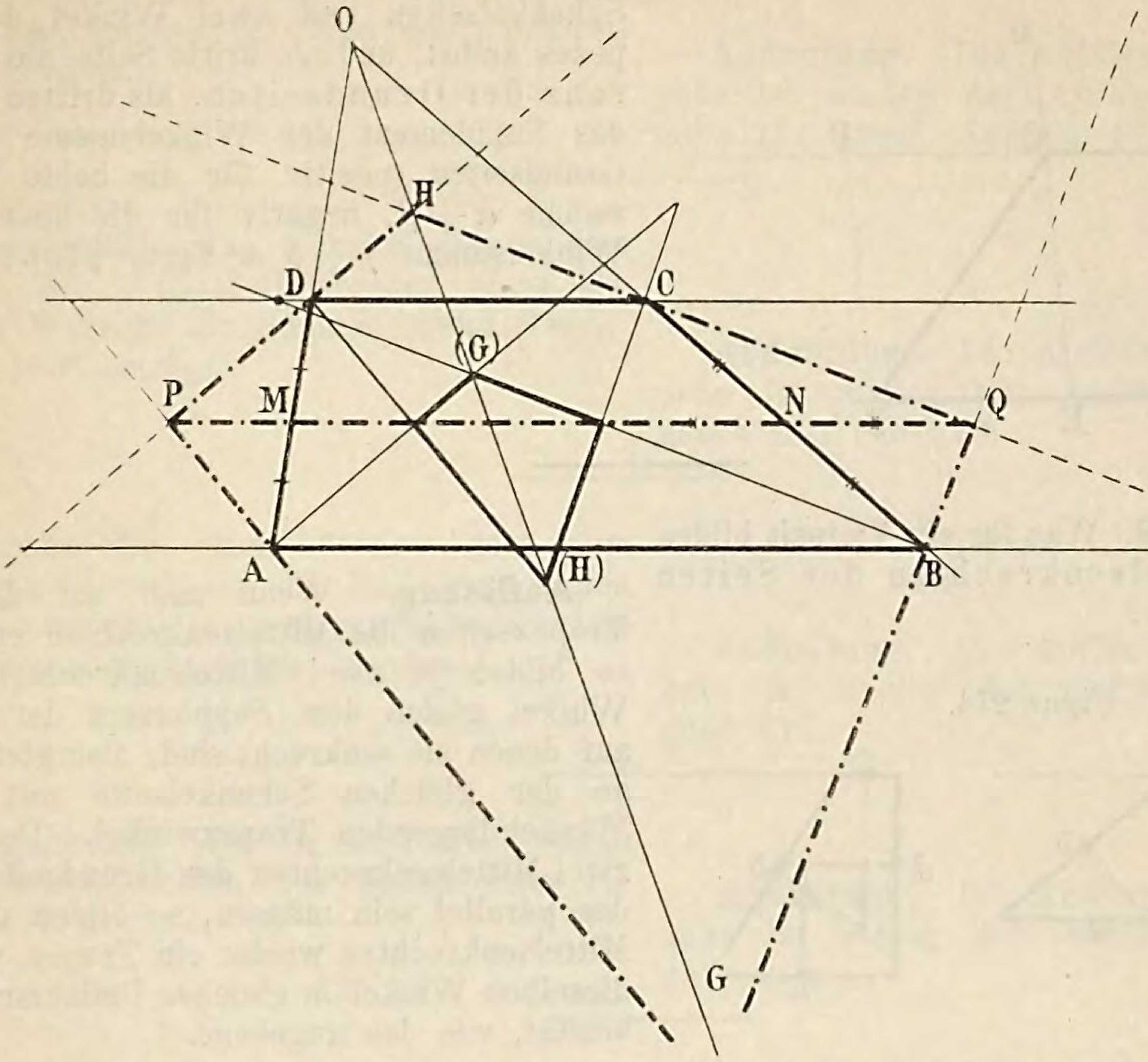
so kann man jene Diagonale auch nennen das arithmetische Mittel zwischen den Differenzen je einer Grundseite mit einem anstossenden Schenkel.

Aufgabe 217. Welche Folgerungen ergeben sich aus dem Bisherigen für das Viereck der Halbierungslinien der Aussenwinkel eines Trapezes?

Erkl. 635. Die Begründung der nebenstehenden Aussagen wird mit genau denselben Beweismitteln und fast denselben Buchstaben durchgeführt, wie dies in Antwort der Fragen 147 und 148 sowie in den vorigen Aufgaben geschehen ist. Zu Grunde gelegt wird der Satz, dass Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln supplementär sind, und die Halbierungslinien von korrespondierenden Winkeln parallel sind.

Auflösung. Da die Halbierungslinien der Aussenwinkel (s. Figur 272) auf den Halbierungslinien der Innenwinkel senkrecht stehen, so überträgt sich eine ganze Reihe von Eigenschaften des Vierseits der Innenwinkelhalbierenden fast ohne Aenderung auf das Vierseit der Aussenwinkelhalbierenden. Von den zwischen den Parallelen liegenden Strecken der Halbierungslinien an einer Schenkelseite ist jede die Mittelsenkrechte der benachbarten, der Schnittpunkt liegt auf der Mittelparallelen. Der Schnittwinkel der

Figur 272.



Erkl. 636. Dass die zweite Diagonale beider Vierecke mit der Winkelhalbierenden der nicht parallelen Seiten zusammenfällt, folgt aus der erst im nächsten Teile zu beweisenden Thatsache, dass durch dieselben Punkte G und H die drei Winkelhalbierenden der Dreiecke ABO und DCO hindurchgehen müssen.

Halbierungslinien an einer Grundseite ist die halbe Summe der Winkel an derselben Grundseite. Die den Seiten parallele Diagonale ist gleich dem halben Umfang des ganzen Trapezes. Denn die Stücke PM und QN erscheinen in gleicher Grösse, nur auswärts statt einwärts, also addiert statt subtrahiert.

Je eine Seite des neuen Vierseits ist parallel einer Seite des vorigen, die Halbierungslinien an Gegenecken des Trapezes schneiden einander unter gleichgrossen Winkeln gleich der halben Differenz der Gegenwinkel.

Die zweite Diagonale beider Vierecke fällt in eine und dieselbe Gerade, nämlich die Winkelhalbierende der nicht parallelen Seiten.

Aufgabe 218. Was für Winkel und Seiten hat ein Dreieck, welches gebildet wird von einer Schenkelseite des Trapezes mit einer Parallelen zur andern?

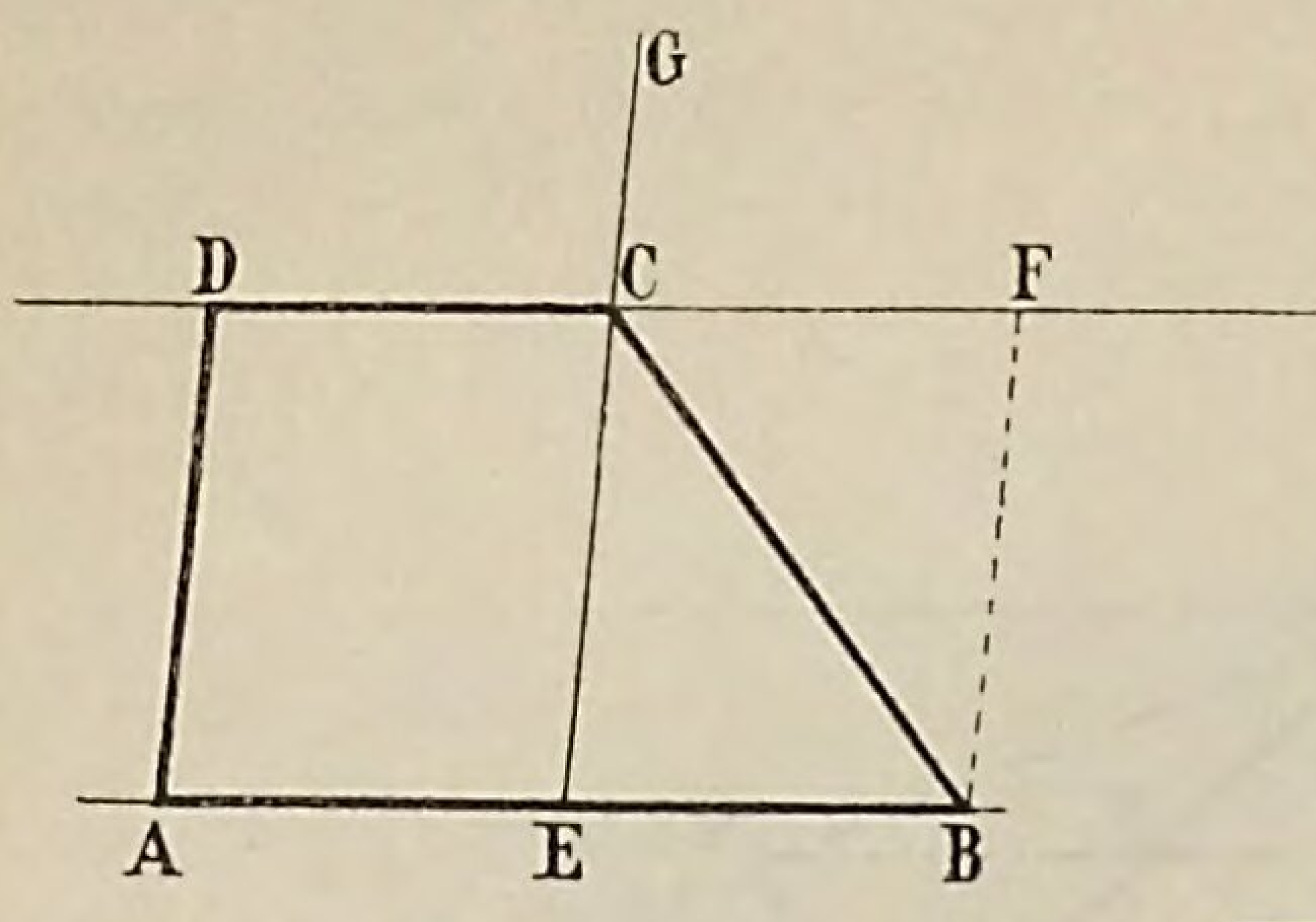
Erkl. 637. Dass $\sphericalangle BCE = \gamma + \delta - 180^0$ ist, lässt sich auch direkt beweisen, wenn man die Verlängerung von EC mit CG bezeichnet. Dann ist $\delta = ADF = ECF = GCD$, $\gamma = DCB$, also $\gamma + \delta$ gleich dem überstumpfen $\sphericalangle BCG$; wird davon $GCE = 180^0$ abgezogen, so bleibt $GCB - GCE = BCE = \gamma + \delta - 180^0$.

Auflösung. Zieht man die Linie CE (oder BF) (s. Figur 273) parallel AD, so ist im Dreieck BCE bei $E \sphericalangle \alpha$, bei $B \sphericalangle \beta$, bei $C \sphericalangle 180 - (\alpha + \beta) = \gamma + \delta - 180^0$, und Seite $BC = b$, $CE = d$ nach Satz 32, und $BE = a - c$, denn es ist:

$$BE = AB - AE = AB - CD,$$

da $AE = CD$ nach Satz 32.

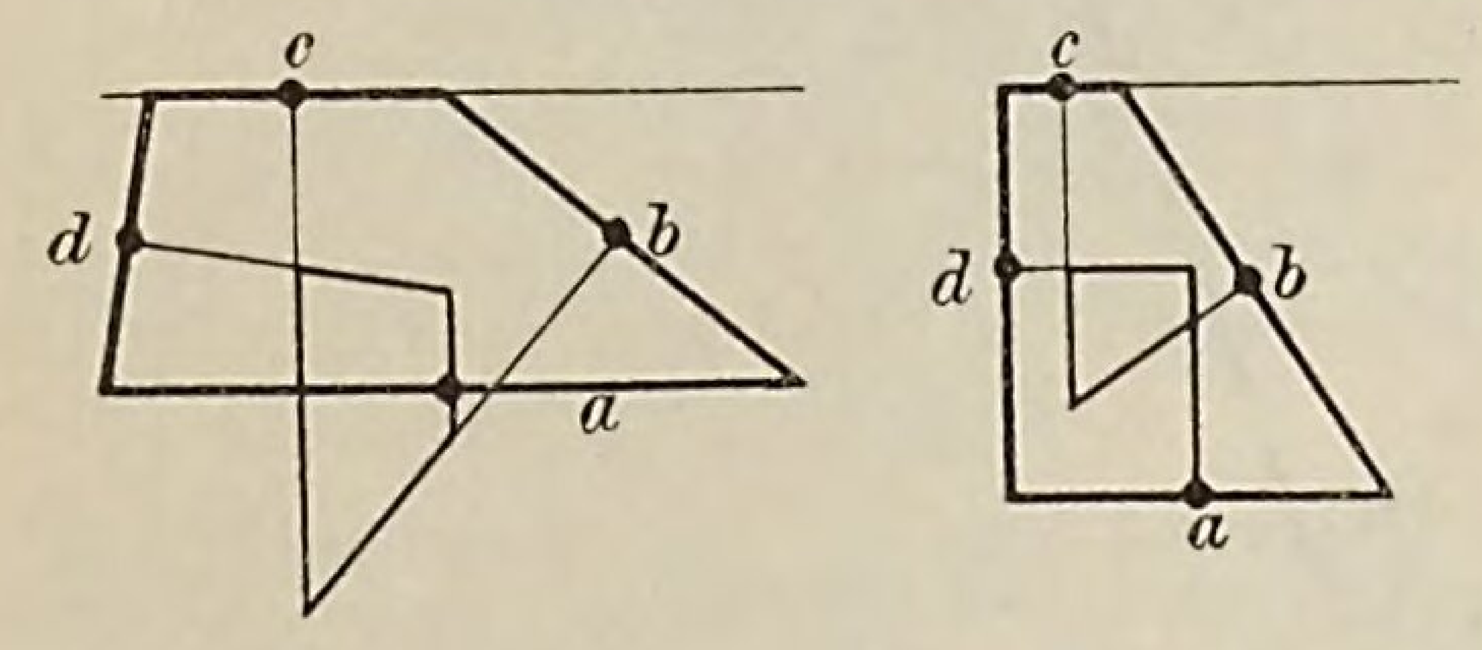
Figur 273.



Also besitzt das Dreieck BCE zwei Schenkelseiten und zwei Winkel des Trapezes selbst, und als dritte Seite die Differenz der Grundseiten, als dritten Winkel das Supplement der Winkelsumme an den Grundseiten (positiv für die hohle Winkelsumme $\alpha + \beta$, negativ für die überstumpfe Winkelsumme $\gamma + \delta$ in Figur 273).

Aufgabe 219. Was für ein Vierseit bilden die vier Mittelsenkrechten der Seiten des Trapezes?

Figur 274.



Erkl. 638. Bezeichnet man mit n_a, n_b, n_c, n_d die vier Mittelsenkrechten, so ist für die Innenwinkel des neuen Trapezes $\sphericalangle (n_a n_b) = \sphericalangle (c, b)$, $\sphericalangle (n_b n_c) = \sphericalangle (b, a)$, $\sphericalangle (n_c n_d) = \sphericalangle (a, d)$ und endlich $\sphericalangle (n_d n_a) = \sphericalangle (d, c)$.

Auflösung. Wenn man auf die vier Trapezseiten die Mittelsenkrechten errichtet, so bilden je zwei Mittelsenkrechten einen Winkel gleich dem Supplement der Seiten, auf denen sie senkrecht sind, also gleich dem an der gleichen Schenkelseite mit jenem Winkel liegenden Trapezwinkel. Da ferner zwei Mittelsenkrechten der Grundseiten wieder parallel sein müssen, so bilden die vier Mittelsenkrechten wieder ein Trapez, welches dieselben Winkel in gleicher Umlaufsrichtung besitzt, wie das gegebene.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 220. Zwischen welchen Grenzen muss die vierte Seite eines Vierecks liegen, dessen erste drei Seiten sind:

a) 2, 3, 4, b) 9, 30, 31,
c) 11, 12, 100, d) 1, 2, 90?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 209.

Aufgabe 221. Die drei grössten Seiten eines Vierecks seien 11, 40, 60. Wie gross kann die vierte Seite sein?

Andeutung. Wie bei der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 222. Die kleinste Seite eines Vierecks sei 10, die beiden grössten 50 und 90. Wie gross kann die dazwischen fehlende vierte Seite sein?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 209 mit entsprechender Einschränkung.

Aufgabe 223. Von einem Dreieck kennt man die Lage zweier Seiten, aber nur den Mittelpunkt der dritten. Man soll das Dreieck auszeichnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 212 (vergl. Aufgabe 178).

Aufgabe 224. Man beweise, dass in dem Vierseit der Winkelhalbierenden eines beliebigen Vierecks die Summe zweier Gegenwinkel 180° beträgt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 215 und 216.

Aufgabe 225. Man beweise, dass beim beliebigen Viereck von den Halbierungslinien der Aussenwinkel je zwei gegenüberliegende Supplementwinkel gebildet werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 217.

Aufgabe 226. Was für ein Viereck bilden die Mittelsenkrechten der Seiten eines beliebigen Vierecks?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 219.

Aufgabe 227. Was für ein Viereck entsteht, wenn man durch die Ecken eines gegebenen Vierecks Linien zieht, welche je mit der nächsten Seite desselben gleichgrosse Winkel bilden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 219.

Aufgabe 228. Auf einer Strecke werden Teilstrecken abgemessen, jede folgende doppelt so gross, als die vorhergehende, und in jedem Teilpunkte wird unter dem gleichen Winkel eine Strecke angetragen, wieder jede folgende doppelt so gross, als die vorhergehende. Wo liegen die Endpunkte dieser Strecken?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf den Sätzen 73 und 76.

Aufgabe 229. Man hat eine Anzahl Stäbe; jeder folgende ist doppelt so lang, als der vorherige. Dieselben sollen so aufgestellt werden, dass durch ihre Endpunkte wieder ein gerader Stab gelegt werden kann.

Andeutung. Wie bei der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 230. Auf einer Dreieckseite läuft ein Körper von der Ecke an auswärts. Auf der Mittelparallelen soll ein zweiter so bewegt werden, dass er immer auf der von der Gegenecke zu jenem gezogenen Geraden verbleibt. Wie muss dieser laufen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht durch Anwendung des Satzes 76.

Aufgabe 231. Man soll auf einer gegebenen Geraden einen Punkt suchen, welcher von einer andern Geraden einen gegebenen Abstand hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf Satz 70b.

Aufgabe 232. Ein Mäher geht in gerader Linie durch die Wiese und mäht mit jeder Halbkreisbewegung $1^1/_2$ Meter rechts und links seiner Standlinie. Was für eine Fläche hat er nach einem Gang abgemäht?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Satz 72.

Aufgabe 233. Zu einer Dreiecksgrundseite sind je in gleichen Abständen wie die zugehörige Höhe mehrere Parallelen gezogen. Welche Strecken überstreicht auf diesen eine andere Seite des Dreiecks (bezw. deren Verlängerung), wenn sie sich um den Scheitel des Winkels an der Spitze dreht?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf Antwort der Frage 145.

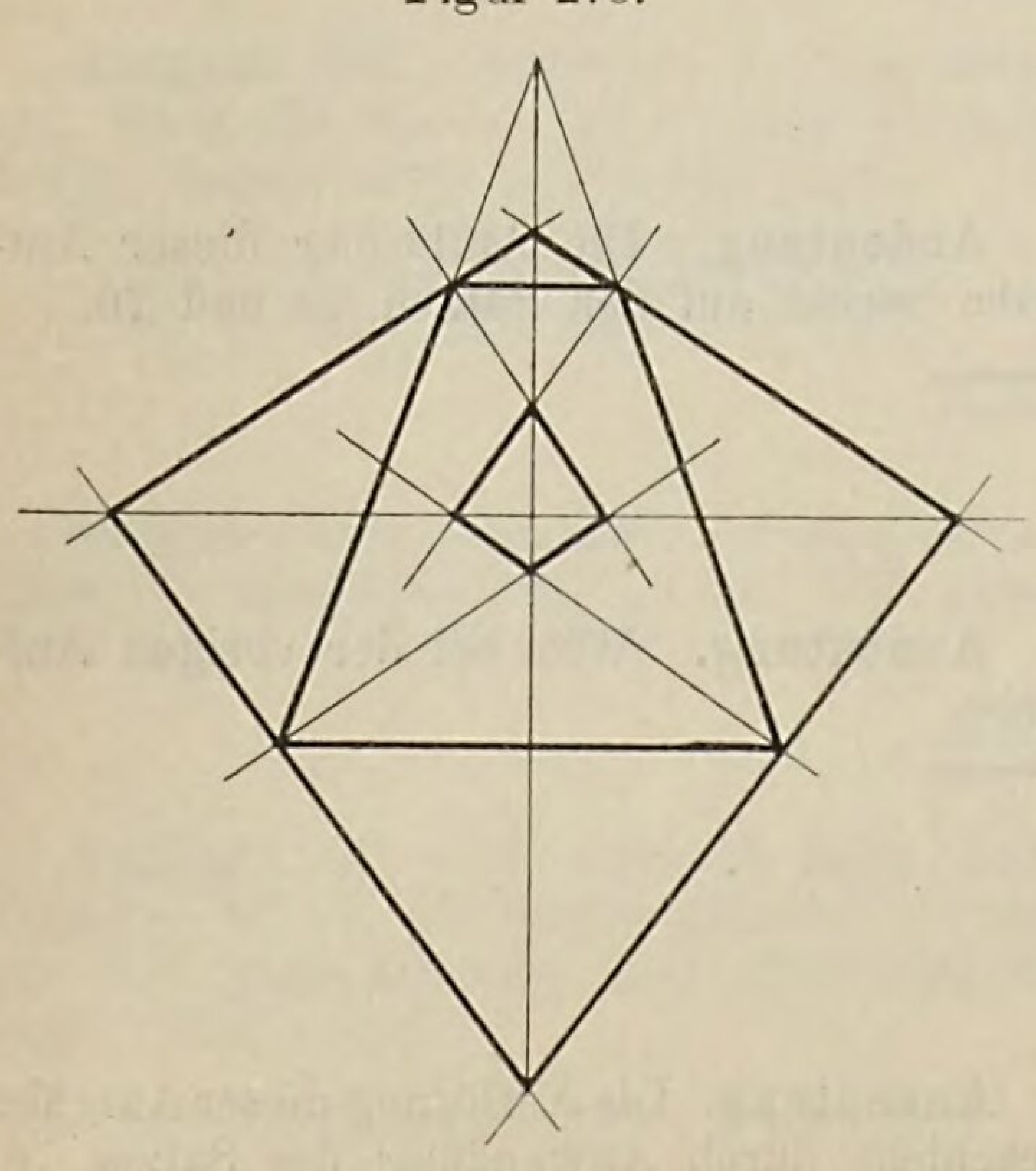
2) Aufgaben über das achsig-symmetrische und das zentrisch-symmetrische Viereck: Antiparallelogramm, Deltoid, Parallelogramm.

(Zu Abschnitt C 2 b, β und γ)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 234. Was wird aus den Ergebnissen der Aufgaben 215 bis 217 für das Antiparallelogramm?

Figur 275.



Auflösung. Für das Antiparallelogramm bleibt der Satz in Auflösung der Aufgabe 215 unverändert bestehen, und ebenso der die Winkel betreffende Teil der Auflösung der Aufgabe 216. Die Diagonale des Vierseits der Winkelhalbierenden aber erhält wegen $b = d$ ausser den dort angegebenen Werten auch den Wert der Differenz aus der mittelparallelen Strecke des Antiparallelogramms und einer einzelnen seiner Schenkelseiten. Das Vierseit der Winkelhalbierenden der Aussenwinkel wird ebenfalls ein Deltoid mit den in Auflösung der Aufgabe 217 angegebenen Eigenschaften. Die zu den Parallelen senkrechte Diagonale fällt zusammen mit der Winkelhalbierenden der nicht parallelen Seiten und mit der Symmetrieachse.

Erkl. 639. Nach Auflösung der Aufgabe 216 ist:

$$PQ = \frac{1}{2}(a + c - b - d),$$

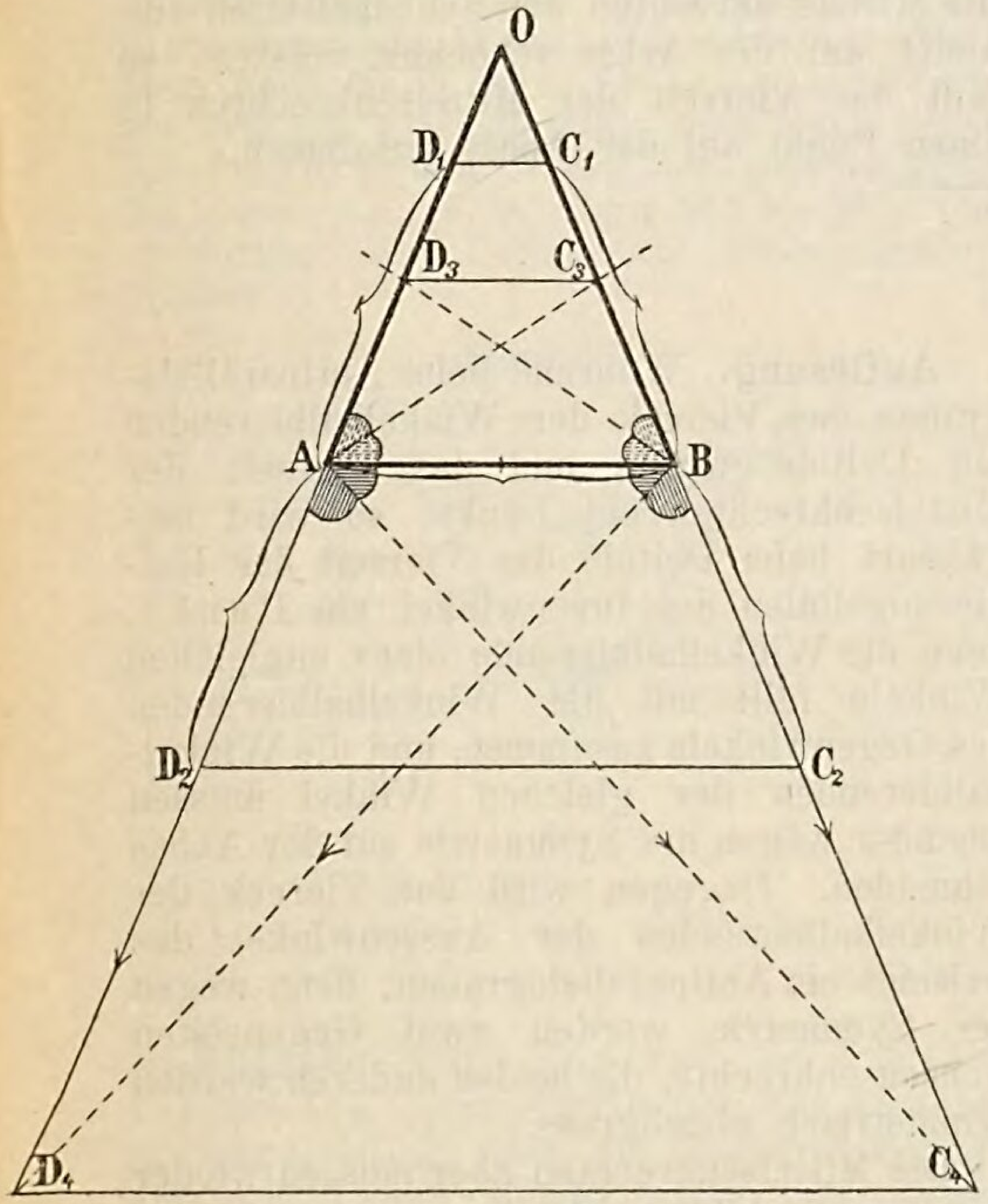
hier gleich:

$$\frac{1}{2}(a + c - b - b) = \frac{a + c}{2} - b = m - b.$$

Denn die Stücke PM und QN werden beiderseits einander gleich und gleich $\frac{b}{2}$.

Aufgabe 235. Man soll an einem gleichschenkligen Dreieck ein Antiparallelogramm abschneiden oder ansetzen, das drei gleiche Seiten hat.

Figur 276.



Auflösung. Wird die Grundseite des Dreiecks zu einer der drei gleichen Seiten, so trägt man auf den beiden Schenkeln oder deren Verlängerungen die Länge der Grundseite von deren Eckpunkten aus ab, und erhält das Antiparallelogramm ABC_1D_1 oder ABC_2D_2.

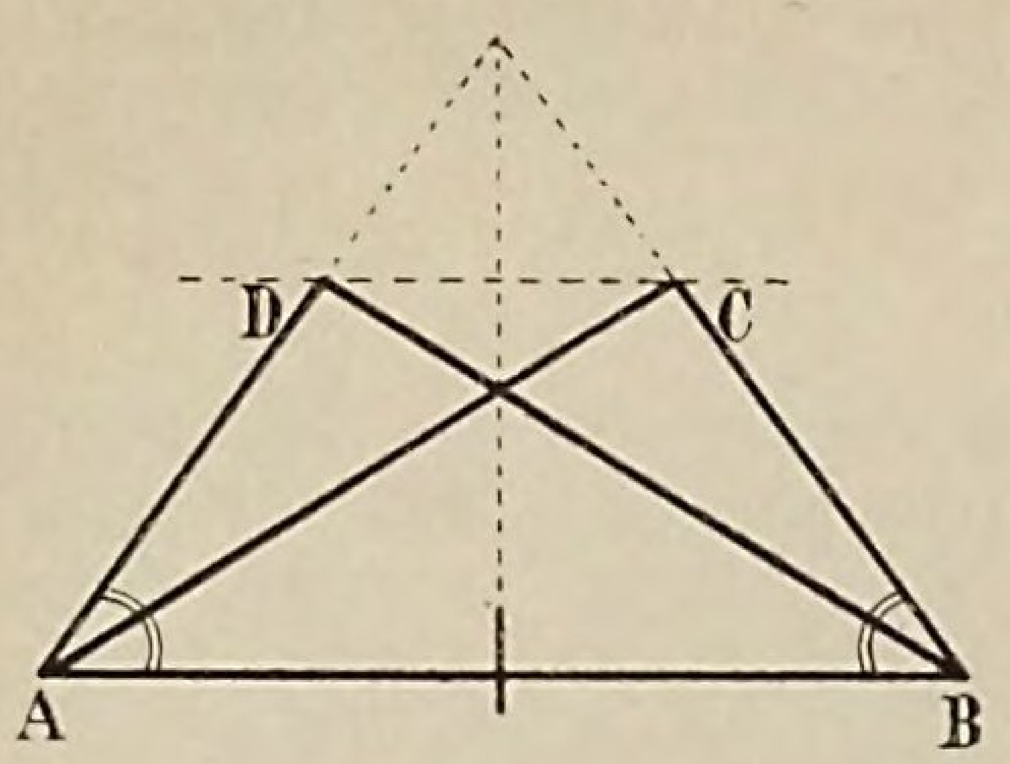
Im andern Falle ist zu berücksichtigen, dass nach Antwort der Frage 154 im verlangten Antiparallelogramm die Winkelhalbierenden an der ungleichen Seite zu Diagonalen werden. Man betrachte also die Grundseite AB als die vierte ungleiche Seite und halbiere die Innen- oder Aussenwinkel des Dreiecks. Diese Halbierungslinien schneiden sodann auf den Schenkeln des Winkels an der Spitze die andern beiden Eckpunkte eines Antiparallelogramms von der verlangten Eigenschaft aus, wobei die Grundseite des Dreiecks erst als längste, dann als kürzeste ungleiche Seite auftritt, ersteres im Antiparallelogramm ABC_3D_3, letzteres im Antiparallelogramm ABC_4D_4. Der Beweis für das erste ist schon enthalten in Aufgabe 121, der letztere ist demselben vollständig analog.

Erkl. 640. In Figur 276 ist im Antiparallelogramm ABC_1D_1 und ABC_2D_2 jeweils $AB = BC = AD$. Ferner ist $\sphericalangle D_4AC_4 = BAC_4 = \frac{BAD_4}{2} = \frac{ABC_4}{2} = ABD_4 = C_4BD_4$, und als innere Wechselwinkel sind dieselben $= AC_4D_4 = BD_4C_4$. Folglich ist Dreieck AD_4C_4 und BD_4C_4 gleichschenklig, also im ersteren $AD_4 = D_4C_4$, im letzteren $BC_4 = D_4C_4$, also zusammen $AD = DC = BC$.

Aufgabe 236. Man soll beweisen, dass ein Viereck ein Antiparallelogramm ist, wenn seine Diagonalen und ein Paar Gegenseiten gleichlang sind.

Auflösung. Zum Beweise betrachte man eine der ungleichen Seiten. Von ihren beiden

Figur 277.



Eckpunkten aus gehen die Diagonalen und die gleichen Gegenseiten aus, bilden also zwei Dreiecke ABC und ABD, welche drei gleiche Seiten haben. Folglich ist Dreieck $ABC \cong BAD$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$. Wird also umgeklappt um die Mittelsenkrechte von AB, so fällt Punkt B auf A, $\sphericalangle B$ auf $\sphericalangle A$, BC auf AD nach Richtung und Grösse, C auf D, CD wird Achsensenkrechte wie AB, die Figur ist ein Antiparallelogramm.

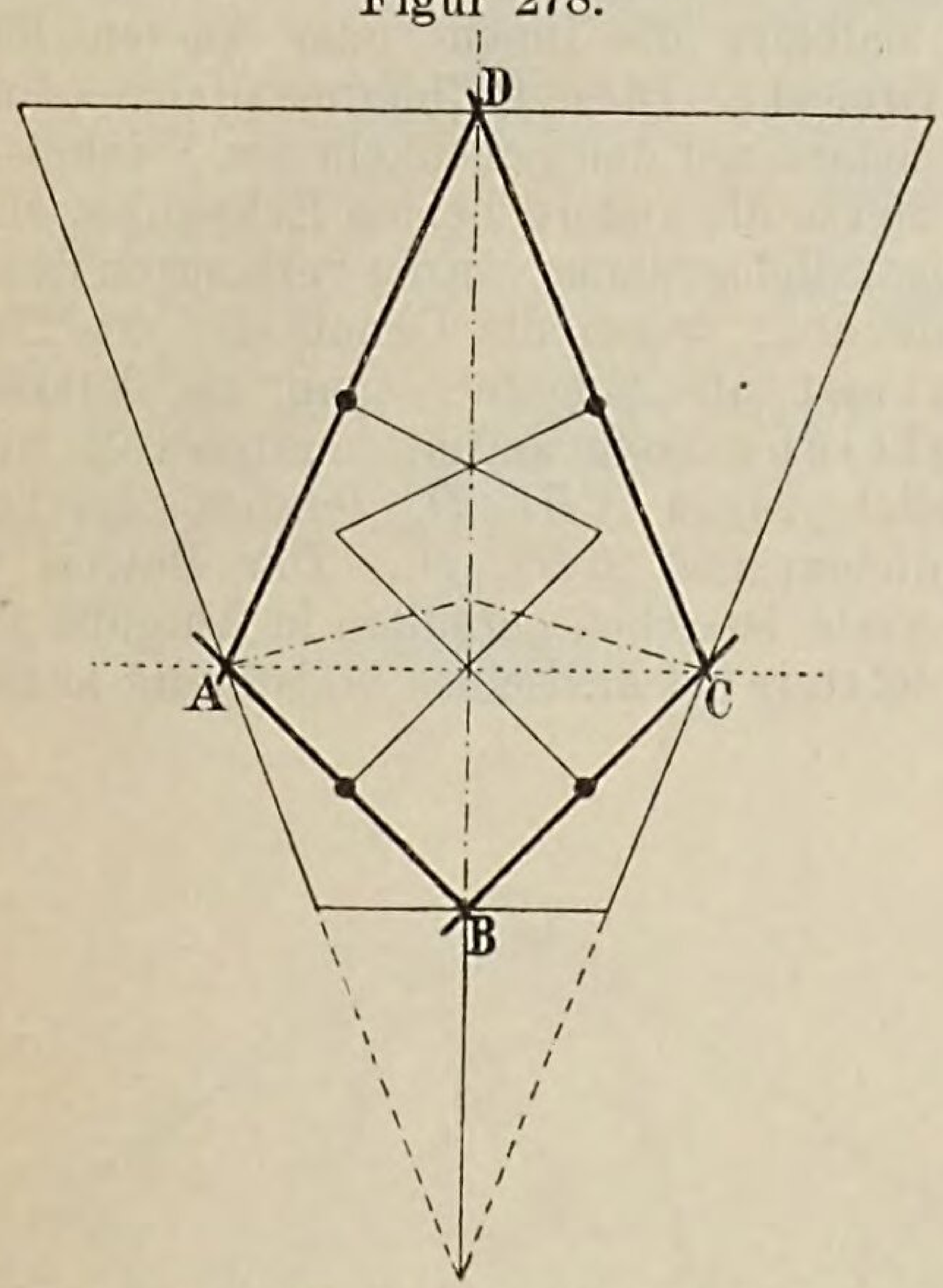
Aufgabe 237. Was wird beim Antiparallelogramm aus dem Vierseit der Mittelsenkrechten der vier Seiten?

Erkl. 641. Die vier Mittelsenkrechten des Antiparallelogramms sind also vier solcher eigentümlichen Geraden, welche durch denselben Punkt gehen (vergl. Erkl. 111 und 259).

Auflösung. Da beim Antiparallelogramm die Mittelsenkrechte einer Grundseite mit der Mittelsenkrechten der anderen Grundseite zusammenfällt, und wegen der Symmetrie die Mittelsenkrechten der Schenkelseiten einander auf der Achse schneiden müssen, so fällt das Vierseit der Mittelsenkrechten in einen Punkt auf der Achse zusammen.

Aufgabe 238. Was wird beim Deltoid aus dem Vierseit der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechten?

Figur 278.



Erkl. 642. Stellt man die dreierlei Vierecke für Antiparallelogramm und Deltoid zusammen, so findet man

als	beim Antiparallelogramm	beim Deltoid
Vierseit der Halbierungslinien der Innenwinkel	Deltoid	Punkt
Vierseit der Halbierungslinien der Aussenwinkel	Deltoid	Antiparallelogramm
Vierseit der Mittelsenkrechten	Punkt	Deltoid.

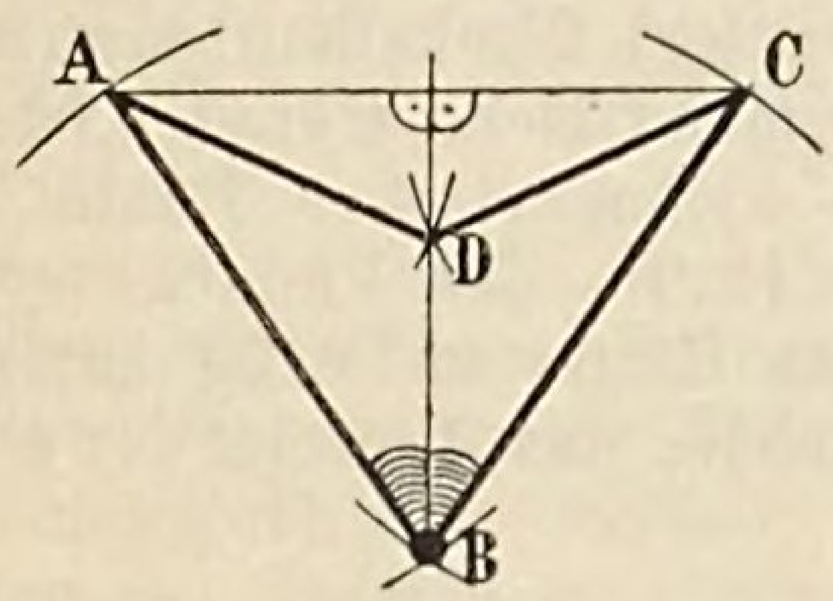
Auflösung. Während beim Antiparallelogramm das Vierseit der Winkelhalbierenden ein Deltoid wurde und das Vierseit der Mittelsenkrechten ein Punkt, so wird umgekehrt beim Deltoid das Vierseit der Halbierungslinien der Innenwinkel ein Punkt, denn die Winkelhalbierende eines ungleichen Winkels fällt mit der Winkelhalbierenden des Gegenwinkels zusammen, und die Winkelhalbierenden der gleichen Winkel müssen einander wegen der Symmetrie auf der Achse schneiden. Dagegen wird das Viereck der Winkelhalbierenden der Aussenwinkel des Deltoids ein Antiparallelogramm; denn wegen der Symmetrie werden zwei Gegenseiten Achsensenkrechte, die beiden anderen werden symmetrisch gleichgross.

Die Mittelsenkrechten aber müssen wieder ein Viereck bilden mit den supplementären Winkeln zu denen des ursprünglichen Deltoids, da je zwei derselben senkrecht stehen auf den Schenkeln eines Deltoidwinkels. Wegen der Symmetrie ist also das Viereck der Mittelsenkrechten wieder ein Deltoid.

Aufgabe 239. Man soll in Anwendung des Deltoids die Konstruktion von Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten in den Aufgaben 169 bis 171 wiederholen.

Erkl. 643. In den Figuren 254 bis 257 ist nach Nebenstehendem jeweils AB die eine, CD die andere Diagonale des Deltoids. Ist Raum genügend vorhanden, so wird man in der Regel die Radien $AC = CB$ und $AD = BD$ alle vier gleichlang wählen. In diesem Falle erhält man aber kein Deltoid, sondern ein Rhombus, in welchem jede der beiden Diagonalen die andere senkrecht halbiert und zwei Winkel halbiert. Ist aber irgend welcher Hinderungsgrund vorhanden, dass es nicht wohl angeht, die Radien AC und AD gleich zu wählen, dann wird die Konstruktion nicht mittels Rhombus, sondern mittels Deltoid ausgeführt, und zwar in nebenstehender Weise. Insbesondere geschieht dies, wenn die in Figur 279 angegebene Form des Deltoids gewählt wird, denn dann liegen die Punkte C und D auf der gleichen Seite der Linie AB (siehe Figur 254 bis 257) und es entsteht das Deltoid mit einspringendem Winkel.

Figur 279.



Auflösung. In Anwendung des Deltoids kann man diejenigen Fälle der Aufgaben über Konstruktion von Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten ausführen, bei welchen wegen Raummangels oder sonst nicht die gleiche Zirkelöffnung beibehalten wird.

Um nämlich einen Winkel β (s. Figur 279) zu halbieren, schneidet man auf dessen Schenkeln zwei Punkte aus in gleichem Abstand $AB = CB$ als zweiten und dritten Eckpunkt des Deltoids und zeichnet von da aus den Punkt D durch zwei sich schneidende Kreisbogen über oder unter AC als vierten Punkt des Deltoids. Dann ist BD Diagonale und Symmetrieachse des Deltoids, also Winkelhalbierende bei B.

Um die Mittelsenkrechte einer Strecke AC (siehe Figur 279) zu konstruieren, betrachtet man AC als Diagonale im Deltoid, beschreibt mit Radien $AB = CB$ und $AD = CD$ Kreisbögen, welche die Punkte B und D liefern als dritten und vierten Punkt des Deltoids, also BD als zweite Diagonale und Mittelsenkrechte der ersten.

Um endlich die Senkrechte von einem Punkte B (s. Figur 279) auf eine gegebene Linie zu fällen, betrachte man B als Spitze des Deltoids, schneide durch einen Kreisbogen mit Radius $AB = CB$ die Punkte A und B auf jener Geraden aus als Eckpunkte der Diagonalen, und findet durch Kreisbogen um A und C mit Radius $AD = CD$ den Punkt D über oder unter AC als zweite Spitze. Dann ist wieder BD zweite Diagonale und Mittelsenkrechte der ersten.

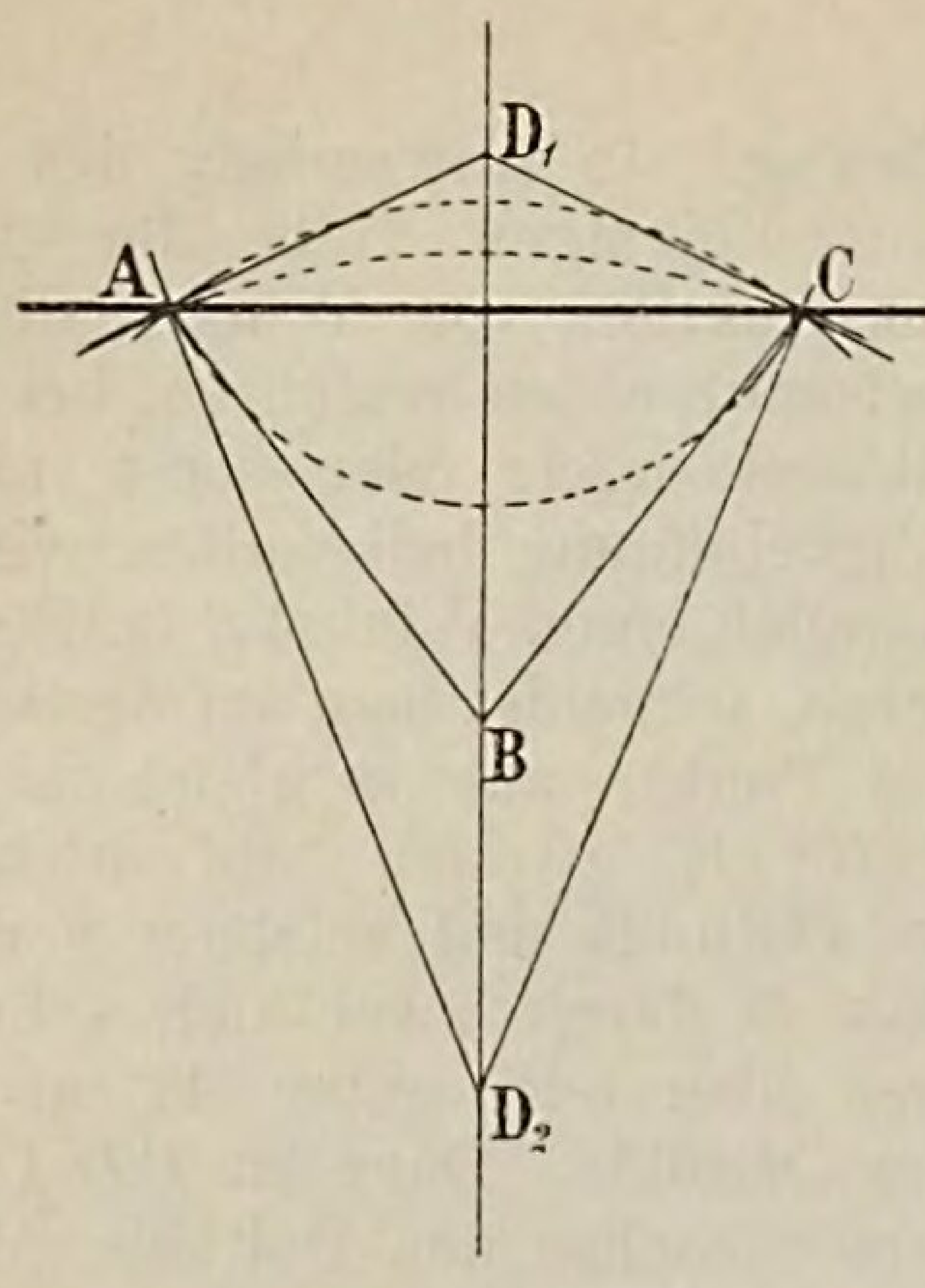
Aufgabe 240. Man soll die Aufgaben 171 und 173 unter Anwendung des Deltoids so umgestalten, dass die gesuchte Gerade die zur Achse senkrechte Diagonale wird.

Erkl. 644. Die Konstruktion nach der Figur $ABCD_2$ in Figur 280 wird besonders dann einzutreten haben, wenn z. B. auf eine Linie, die senkrecht zum Rande des Zeichnungsblattes ist, eine Senkrechte gefällt werden soll von einem Punkte, der selbst in unmittelbarer Nähe jenes Randes liegt. Die Bögen von A nach C würden dann gerade nur auf so lange Strecken zur Ausführung gelangen, wie von ihnen in Figur 280 als ausgezogene Linien angegeben sind.

Auflösung. Um von Punkt A Figur 280 auf die Linie BD die Senkrechte zu fällen, betrachte man BAD als die eine Hälfte eines Deltoids und zeichne anderseits BD die symmetrische Hälfte dazu, ziehe also um B und D Kreisbogen, die beide durch A gehen. Ihr zweiter Schnittpunkt C ist der vierte Eckpunkt des Deltoids, AC seine Diagonale und $AC \perp BD$.

Soll von der Linie BD das Stück, welches von B aus jenseits des Schnittpunktes mit AC liegt, gar nicht benutzt werden, so wähle man die Punkte B und D gleicherseits der Linie AC, beschreibe also wieder Kreisbogen, welche beide durch A gehen, aber nicht über

Figur 280.



AC hinausragen. Es entsteht Punkt C als vierter Punkt eines Deltoids mit einspringendem Winkel.

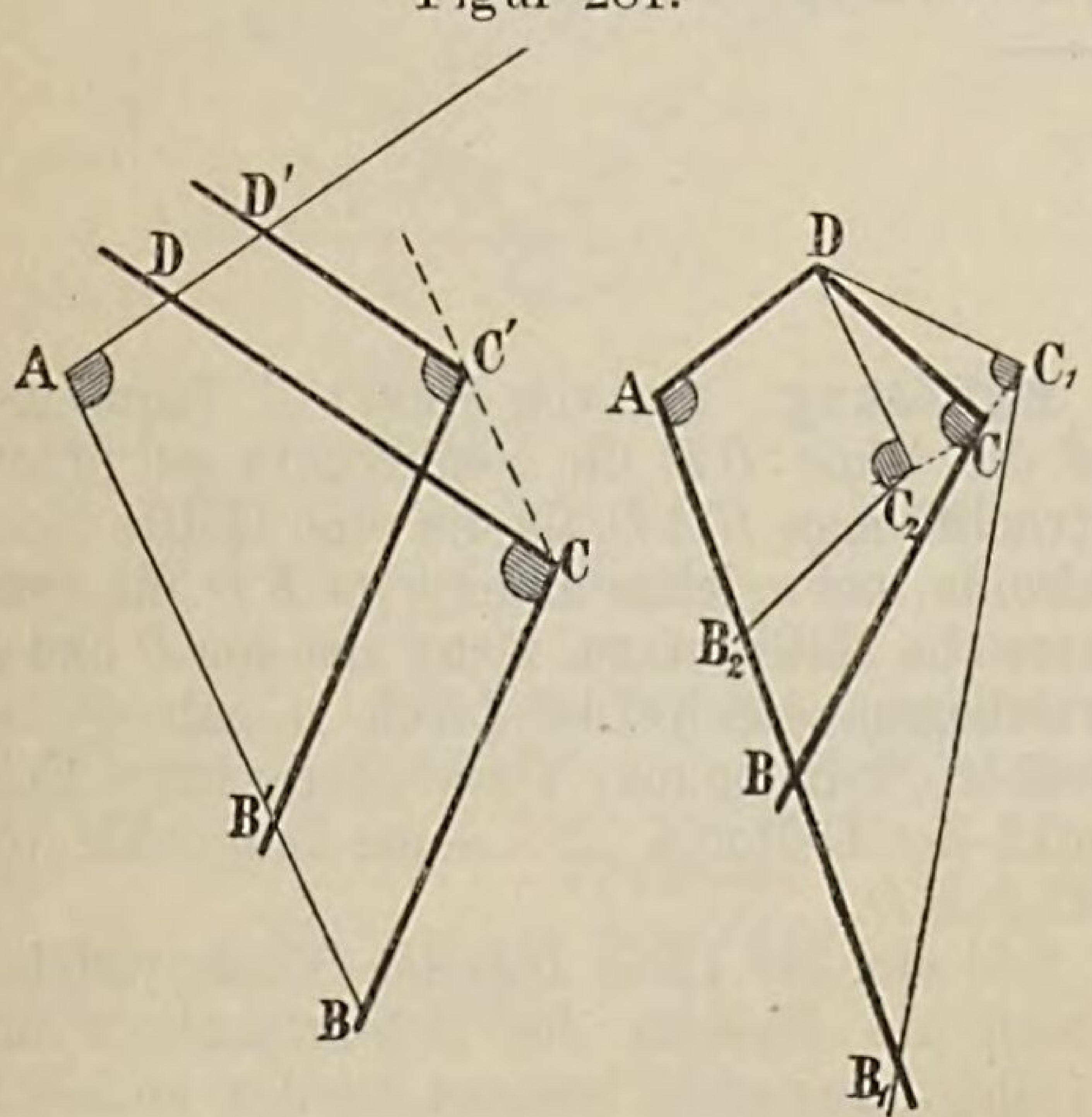
Aufgabe 241. Man soll beweisen, dass ein Viereck ein Deltoid ist, wenn die Verbindungslinie zweier Gegenecken ihre beiden Winkel halbiert.

Erkl. 645. Der nebenstehende Beweis enthält den zweiten der in Antwort 160 aufgeführten Fälle. Der erste derselben ist nur eine andere Ausdrucksweise desselben Falles, der vierte bis sechste ist in Erkl. 314 und 315 bewiesen, im dritten Falle wird um diejenige Diagonale umgeklappt, welche die andere senkrecht halbiert.

Auflösung. Klappt man um dieselbe Diagonale um, so kommen zur Deckung an jeder Ecke die beiden Winkelhälften, also auch deren Schenkel. Daher sind die Schenkel der beiderseitigen Winkelhälften an beiden Eckpunkten symmetrische Geraden, der Schnittpunkt ein symmetrischer Punkt, also die ganze eine Hälfte des Vierecks symmetrisch zur anderen Hälfte in Bezug auf die Diagonale als Achse; das Viereck ist ein Deltoid.

Aufgabe 242. Bilden die Schenkel je zweier gleichen Winkel ein Deltoid?

Figur 281.



Erkl. 646. Es ist ein bemerkenswertes Gegenstück zum nebenstehenden Verschieb-

Auflösung. Sind B und D in Figur 281 die Schnittpunkte der Schenkel zweier gleichgrossen Winkel $BAD = BCD$, so bildet die Figur $ABCD$ nur dann ein Deltoid, wenn zufällig auch $AB = CB$ ist. Wenn aber dies nicht der Fall ist, so kann man aus den Schenkeln dieser gleichen Winkel ein Deltoid erzeugen, wenn man den einen Winkel, etwa BCD, als ganzen längs AB als Schnittlinie so weit verschiebt, bis der Abstand des Punktes B von A gleich der Schenkelstrecke BC geworden ist. Dann ist in Figur 281: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B'AD' = \sphericalangle B'C'D'$ und ausserdem $AB' = B'C'$, folglich das Viereck $AB'C'D'$ ein Deltoid, also auch $AD' = C'D'$.

ungsvorgang, dass ein Deltoid stets ein Deltoid bleibt, wenn man einen der gleichen Winkel, etwa den Winkel DCB als ganzen um Punkt D oder B beliebig herumdreht. Denn immer bleibt die Figur ein Viereck mit zwei gleichen Gegenwinkeln und zwei gleichen anstossenden Seiten, also ein Deltoid. Daher nimmt der Schenkel CB bei der Drehung zu oder ab um die gleiche Strecke, wie auch AB.

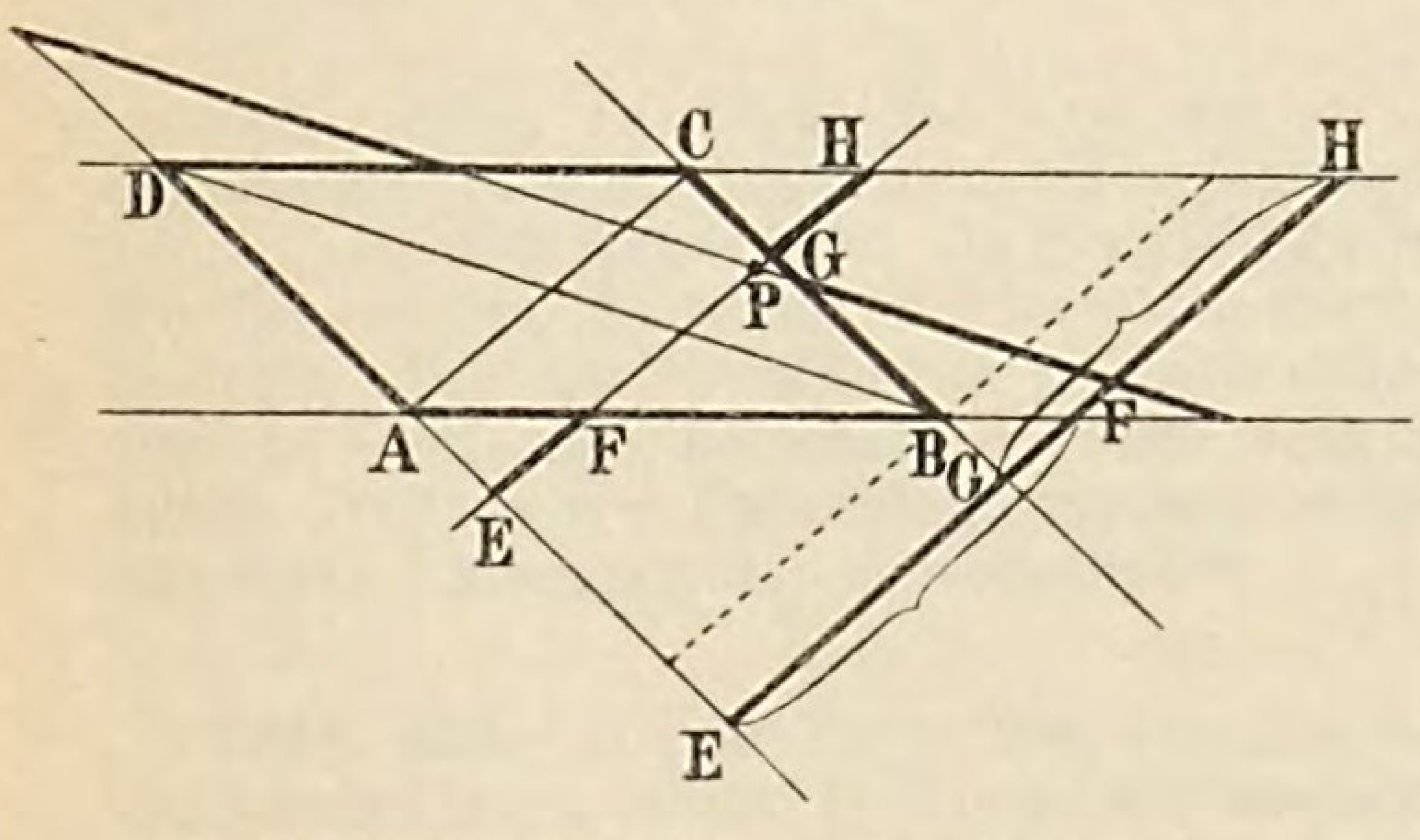
Aufgabe 243. Die Aufgaben 50 und 51 sollen mittels Anwendung des Parallelogramms wiederholt werden.

Erkl. 647. Ebenso wie die nebenstehende Aufgabe lassen sich eine Reihe der Aufgaben, welche mittels der halben Umdrehung oder der Verschiebung zu bewerkstelligen waren, auch durch Anwendung des Parallelogramms durchführen. Denn in dieser Figur sind eben die aus der halben Umdrehung hervorgehenden Sätze mit denen über die Verschiebung vereinigt.

Auflösung. Um den Mittelpunkt einer Strecke zu finden, oder von einem gegebenen Punkte eine Linie durch denselben zu ziehen, betrachtet man diese Strecke PQ (siehe Figur 193 bei den genannten Aufgaben) als Diagonale eines Parallelogramms, zieht willkürlich oder nach dem gegebenen Punkte S die Seite QS, zu ihr parallel und gleichlang PT und verbindet S und T. Oder man zieht ebenso QS und dazu parallel mit beliebiger Länge PT; dann noch durch P und Q zwei weitere Parallelen $PS \parallel QT$, und verbindet S und T.

Aufgabe 244. Man soll beweisen, dass auf jeder Parallelen zu einer Diagonale des Parallelogramms durch jedes der beiden Parallelenpaare und auch durch zwei in diesen Diagonalenendpunkten zusammenstossende Seiten und deren Gegenseiten gleichgrosse Strecken ausgeschnitten werden, und zwar erstere gleich der Diagonale selbst.

Figur 282.



Erkl. 648. Es ist zu beachten, dass wenn EH zwei Seiten selbst trifft, dann eine Strecke FG entsteht, welche keiner Strecke $EF = GH$ angehört; dass wenn aber EH keine Seite selbst, sondern alle in Verlängerung trifft, dann die Strecke FG beiden Strecken EF und GH gemeinsam ist. Geht EH durch eine Parallelogrammecke B oder D selbst, so fällt FG in Punkt B zusammen und bleibt $EB = HB$.

Erkl. 649. Soll also durch einen beliebig gegebenen Punkt P eine Linie so gelegt werden,

Auflösung. Ist $ABCD$ in Figur 282 das Parallelogramm, und in demselben etwa $EFGH \parallel AC$, so gelangt durch Verschiebung um die Strecke AC als Leitlinie die Strecke AE mit der Parallelen CG, AF mit CH zur Deckung, also auch Strecke EF mit GH, es ist $EF = GH$, und zwar in den beiden in der Figur so bezeichneten Lagen. Durch Addition oder Subtraktion der gemeinschaftlichen Strecke FG findet man ferner, dass $EG = FH$ ebenfalls in beiden Fällen.

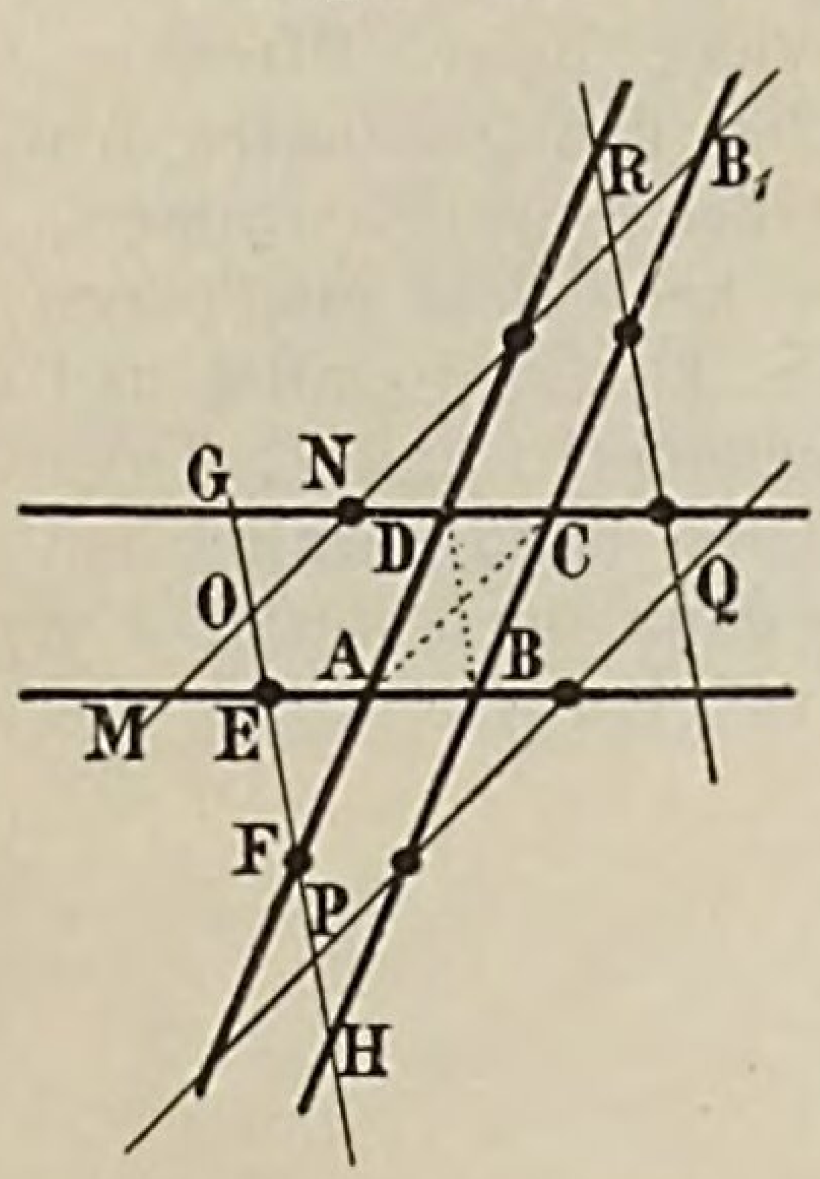
Es schneiden also auf der Geraden $EFGH$:
die Seiten AB und DC das Stück $FH = EG = AC$ aus, wie AD und CB, und
die Seiten AB und AD das Stück $FE = GH$ aus, wie CD und CB.

Dagegen schneiden die in den anderen Eckpunkten zusammenstossenden Seiten AB und BC das Stück FG, aber ihre Gegenseiten AD und DC das Stück EH aus, wobei stets $EH > FG$.

dass zwei Paare gegebener Parallelen auf ihr gleiche Strecken ausschneiden, so kann dies in zweifacher Weise geschehen. Denn jede Parallele zu einer Diagonale des von den beiden Parallelenpaaren gebildeten Parallelogramms hat die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 245. Man soll über zwei gegebene Parallelenpaare eine Linie so legen, dass auf ihr drei benachbarte gleichgrosse Stücke durch jene vier Linien ausgeschnitten werden.

Figur 283.



Erkl. 650. Zwischen je zweien der Parallelen findet sich zweimal ein Schnittpunkt der beiden Geraden MN und EG. Da dabei $AE = AB$ und $DN = DC$ ist, so kommt die Figur der beiden Diagonalen AC und BD durch Verschiebung um die doppelte Seitenlänge des Parallelogramms $ABCD$ jeweils mit der Figur der Strecken MN und EG zur Deckung. Daher ist der Schnittpunkt O dieser beiden Strecken gleichzeitig für beide Mittelpunkt, liegt auf der Mittelparallelen und liefert:

$$OE = OG = \frac{EG}{2} = \frac{BD}{2}$$

und

$$OM = ON = \frac{MN}{2} = \frac{AC}{2}.$$

Daher ist das von den vier Geraden GH gebildete Viereck $OPQR$ wieder ein Parallelogramm und zwar mit Seiten, die den Diagonalen der ursprünglichen parallel sind und doppelt so gross. Denn es ist:

$$OP = OE + EF + FP = \frac{EG}{2} + EF + \frac{FH}{2}$$

$$= \frac{BD}{2} + BD + \frac{BD}{2} = 2 \cdot BD$$

und ebenso:

$$PQ = 2 \cdot AC,\ QR = 2 \cdot BD,\ OR = 2 \cdot AC.$$

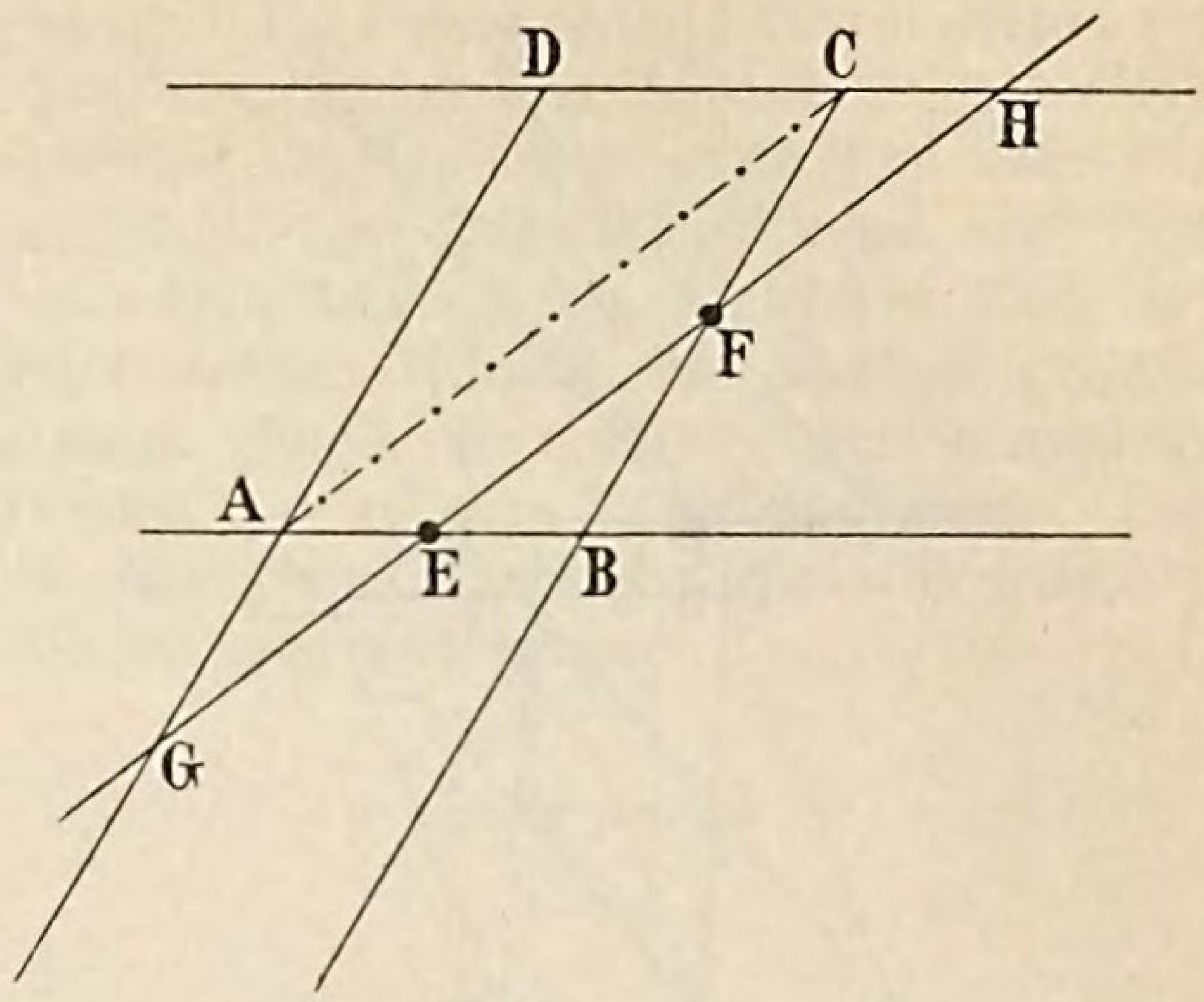
Erkl. 650a. Eine zweite, von der vorigen Aufgabe unabhängige Lösung derselben Auf-

Auflösung. Sind $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$ (Figur 283) die gegebenen Parallelen, so verlängere man zwei zusammenstossende der vier Strecken auswärts um sich selbst, und verbinde deren Endpunkte. Dadurch erhält man vier verschiedene Geraden, auf deren jeder die gleichgrossen Strecken ausgeschnitten werden.

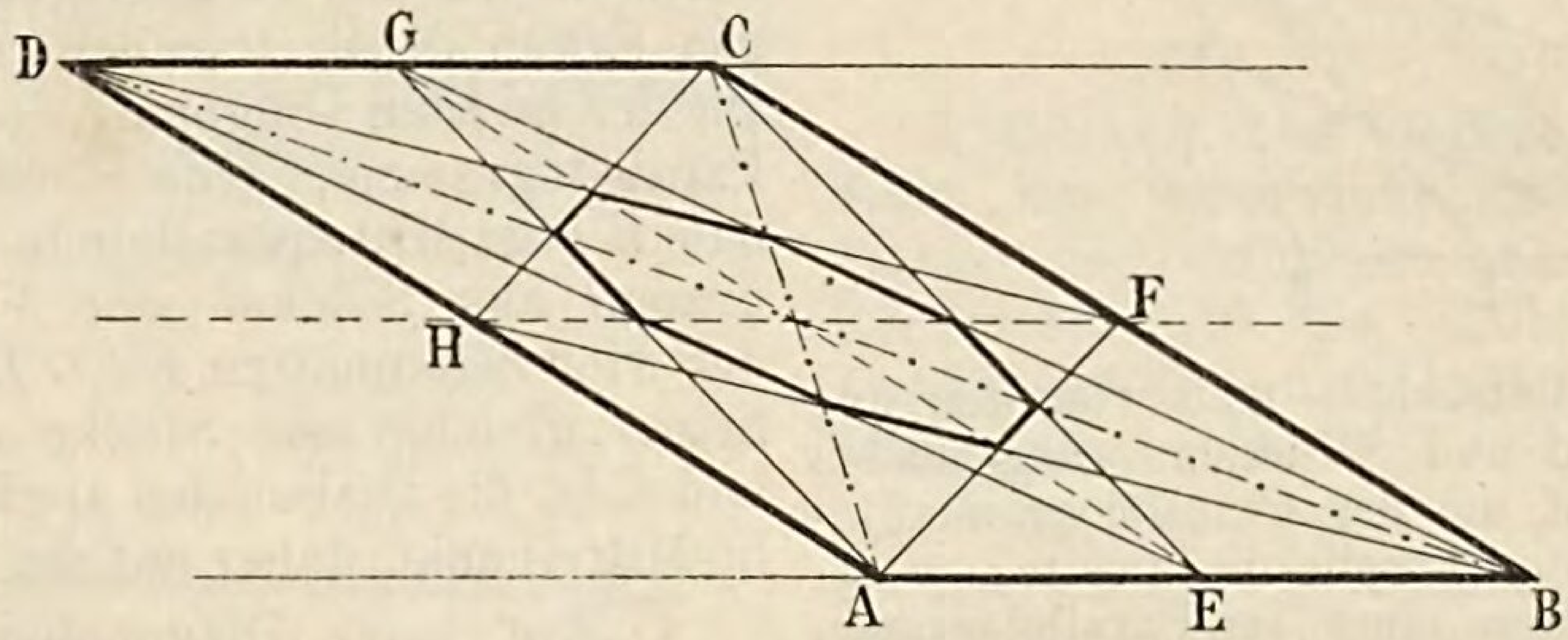
Wurde z. B. $AE = AB$ und $AF = AD$ gemacht, so bilden die vier Punkte $BDEF$ ein Viereck, dessen Diagonalen BE und DF einander in A halbieren, also ein Parallelogramm. Folglich ist die Seite EF dieses Parallelogramms parallel und gleich ihrer Gegenseite BD, der Diagonale des Parallelogramms $ABCD$. Derselben Diagonale BD sind aber als parallele Strecken zwischen Parallelen nach Satz 32 auch die Strecken EG und FH gleich. Also ist $EG = BD = FH = EF$. Und dasselbe Beweisverfahren gilt für die andern drei ähnlich entstandenen Geraden, indem je zwei derselben zu derselben Diagonale parallel sind und deren dreifache Länge enthalten.

gabe erhält man durch die Verbindungslinie irgend zweier benachbarten Seitenmitten des Parallelogramms. Diese ist nach Satz 84 ebenfalls zur Diagonale parallel, und es ist in Figur 283a in Bezug auf die Seitenmitte E das Dreieck EBF zentrisch-symmetrisch zum Dreieck EAG, also $EF = EG$, und ebenso ist in Bezug auf die Seitenmitte F dasselbe Dreieck EBF zentrisch-symmetrisch zum Dreieck HCF, also dieselbe Seite EF auch $= HF$. Auch auf diese Weise erhält man vier verschiedene Geraden, welche der Aufgabe genügen, und die auf ihnen ausgeschnittenen Strecken sind gleich der Hälfte der parallelen Diagonale, da im Dreieck ABC die Strecke EF zwei Seitenmitten verbindet, also gleich der Hälfte der dritten Seite sein muss.

Figur 283 a.



Figur 284.



Aufgabe 246. Man verbinde in einem Parallelogramm die Endpunkte jeder Seite mit dem Mittelpunkte der Gegenseite und untersuche die entstehenden Figuren.

Erkl. 651. In Figur 284 sind die zu besprechenden Verbindungslinien als ausgezogene Linien, die Mittelparallelen als gestrichelte und die Diagonalen als strichpunktierte Linien dargestellt. Um das Verständnis zu unterstützen, sind in Figur 285 nochmals die drei verschiedenen Gruppen von Parallelogrammen je einzeln mit ihrer Liniengattung hervorgehoben.

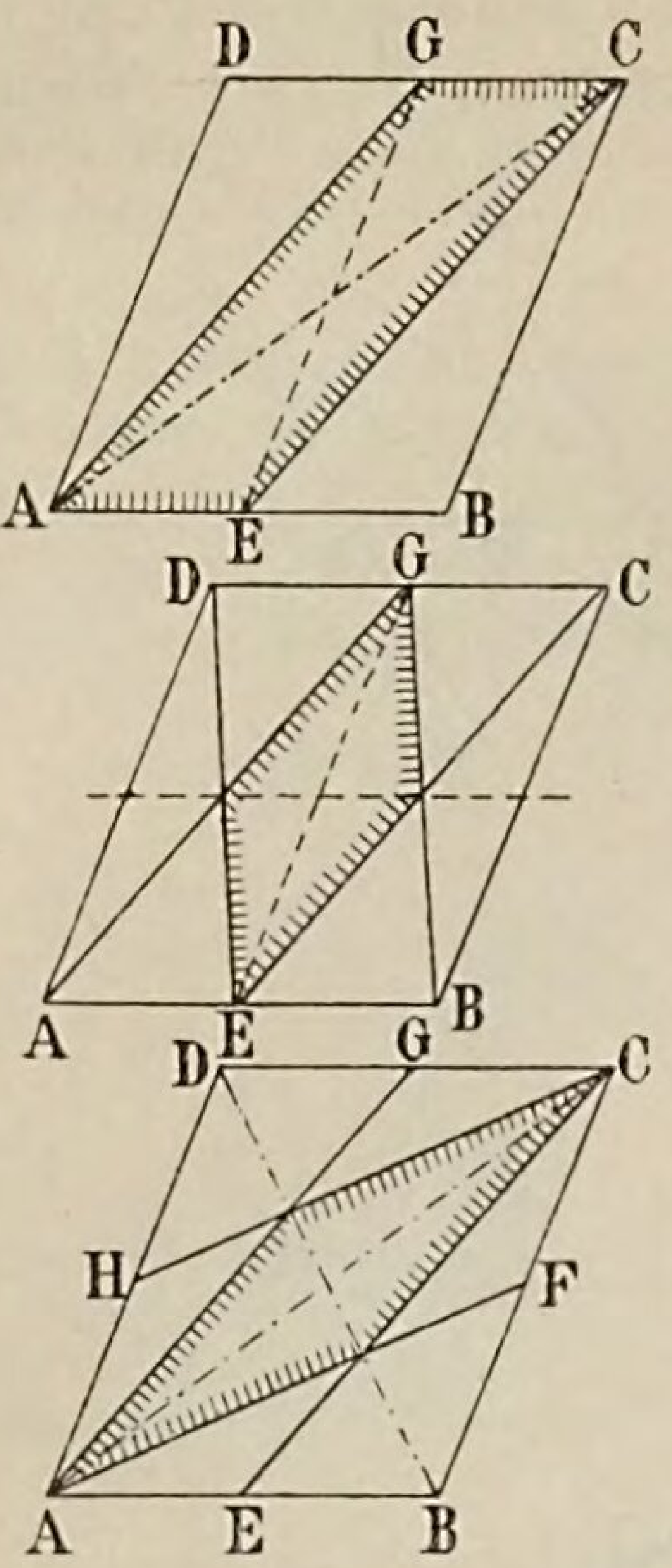
Erkl. 652. Die in Figur 284 wirklich vorhandenen Linien bilden 1) das ganze ursprüngliche Parallelogramm, 2) vier halb so grosse Parallelogramme, 3) vier viertels so grosse Parallelogramme, 4) die vier Parallelogramme der nebenstehend als erster Art verzeichneten, 5) die zwei der zweiten Art, 6) die zwei der dritten Art; also im ganzen schon 17 verschiedene Parallelogramme. Dazu kommen noch eine Reihe weiterer, welche von vorhandenen ausgezeichneten Punkten (z. B. den Seitenmitten) gebildet werden, deren Seiten aber nicht eingezeichnet vorliegen.

Auflösung. Bezeichnet man die Mittelpunkte der Seiten a, b, c, d des Parallelogramms $ABCD$ Figur 284 und 285 der Reihe nach mit E, F, G, H, und verbindet jeden dieser Mittelpunkte mit den Endpunkten der Gegenseiten, so entstehen dreierlei Gruppen von Parallelogrammen:

1) Da die Seitenhälfte $AE \#$ (parallel und gleich) CG ist, so ist $AECG$ ein Parallelogramm, also auch $AG \# CE$. Und von derselben Art entstehen die Parallelogramme $EBGD$ mit $EB \# DG$ und $ED \# BG$; $\#$gr $BFDH$ mit $BF \# DH$ und $BH \# FD$; sowie $\#$gr $FCHA$ mit $FC \# HA$ und $CH \# FA$. Zu Diagonalen haben diese Parallelogramme je eine Diagonale des ursprünglichen selbst und als zweite eine Mittelparallele desselben.

2) Nach der eben gemachten Aufzählung sind auch zu je zwei solchen von einer Seitenmitte ausgehenden Verbindungslinien diejenigen beiden parallel, welche von der Mitte der Gegenseite ausgehen. Daher bilden auch wieder Parallelogramme die Schenkel der einander gegenüberliegenden Winkel AGB und CED, sowie

Figur 285.



Erkl. 653. Betrachtet man von den aus den Seitenmitten und Winkeln ausgehenden Linien im Umlauf um das Parallelogramm jeweils die erste oder jeweils die zweite, so erhält man die Seiten eines im Parallelogramm darinliegenden Achtecks. In diesem sind je zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleichgross; von seinen Diagonalen liegen vier gezeichnet vor und werden gebildet abwechselnd durch die Diagonalen des Parallelogramms und durch seine Mittelparallelen. Auf diesen Diagonalen schneiden die Parallelogrammseiten mit den Ecken des Achtecks und dem Mittelpunkte der ganzen Figur zentrisch-symmetrische Strecken aus. Und zwar sind die Mittelparallelen des Parallelogramms durch je eine Parallelogrammseitenmitte, Achtecksecke, Mittelpunkt, Achtecksecke, Parallelogrammseitenmitte, in vier gleichgrosse Stücke von je viertels Parallelogrammseitenlänge geteilt. Dagegen werden auf jeder Diagonalen des || grs durch je eine Parallelogrammecke, Achtecksecke, Achtecksecke, Parallelogrammecke drei gleichgrosse Stücke ausgeschnitten, durch den Mittelpunkt jedes halbiert, so dass das Stück zwischen dem Mittelpunkt der Figur und einer Achtecksecke ein Sechstel der Diagonalenlänge beträgt.

Wie das ganze Parallelogramm, so ist auch das ganze Achteck in Bezug auf den Mittelpunkt zentrisch-symmetrisch.

von $\sphericalangle AFD$ und CHB. Die nicht auf den Seitenmitten liegenden Eckpunkte dieser beiden Parallelogramme liegen je auf einer der Mittelparallelen des Parallelogramms, denn je zwei solche Strecken z. B. AG und DE sind Diagonalen eines Parallelogramms $AEGD$, treffen also einander im Mittelpunkte und daher auf der Mittelparallelen. Diese beiden Parallelogramme haben als gemeinschaftliche Diagonalen die Mittelparallelen des ursprünglichen.

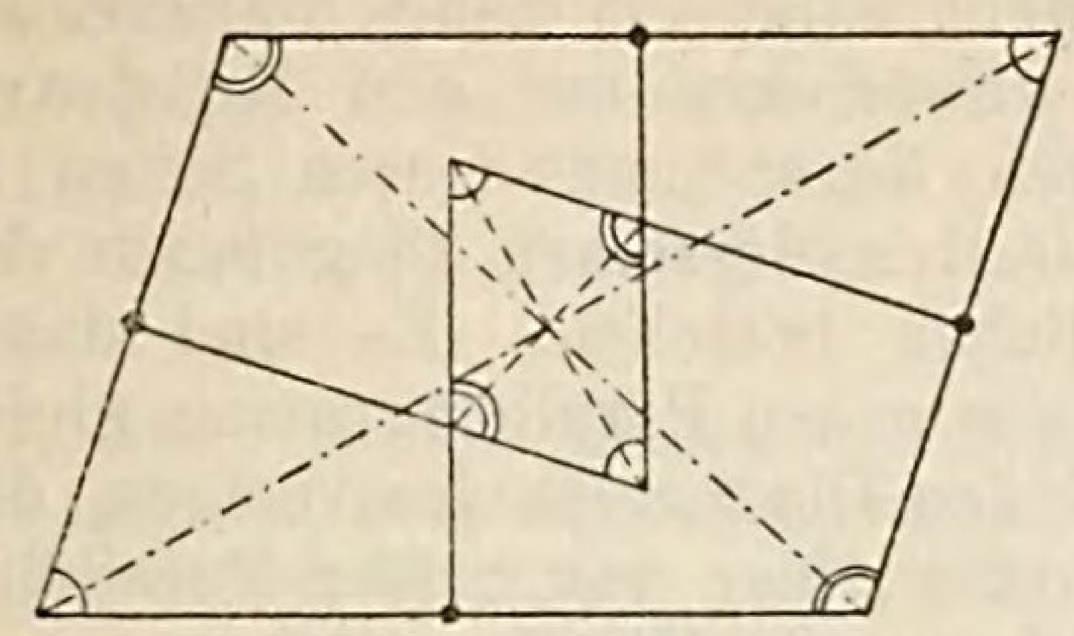
3) Auch zu den in je einer Ecke zusammentreffenden Verbindungslinien sind diejenigen beiden parallel, welche in der Gegenecke derselben Ecke zusammentreffen. Daher bilden auch wieder Parallelogramme die Schenkel der gegenüberliegenden Winkel GAF und ECH, sowie von EDF und GBH. Die nicht auf den Parallelogrammecken liegenden Ecken dieser Parallelogramme liegen je auf der zweiten Diagonale des ursprünglichen Parallelogramms, denn diese zweite Diagonale BD ist Mittelparallele in einem Parallelogramm aus Stücken der Verbindungslinien der vier Seitenmitten $EFGH$, und in diesem liegen gleichgrosse Stücke der Linien AG und CH, die Diagonalen treffen einander also im Mittelpunkt, daher auf der Mittelparallelen.

4) Auf jeder Diagonalen des ursprünglichen Parallelogramms liegen ausser dem Mittelpunkte auch zwei Schnittpunkte der betrachteten Verbindungslinien. Durch diese wird die Diagonale in drei gleichgrosse Stücke geteilt. Denn da z. B. die Parallelen AF und HC auf Seite BC die gleichen Stücke $BF = FC$ ausschneiden und dieselben Parallelen auf Seite AD die gleichen Stücke $AH = HD$, so müssen auch nach Satz 74 die auf BD ausgeschnittenen Stücke gleich gross sein zwischen AF und HC und einerseits bis B, anderseits bis D.

Aufgabe 247. Man untersuche das Vierseit der Mittelsenkrechten der Seiten des Parallelogramms.

Auflösung. Von den vier Mittelsenkrechten des Parallelogramms sind je zwei auf gegenüberliegenden Seiten errichtete

Figur 286.

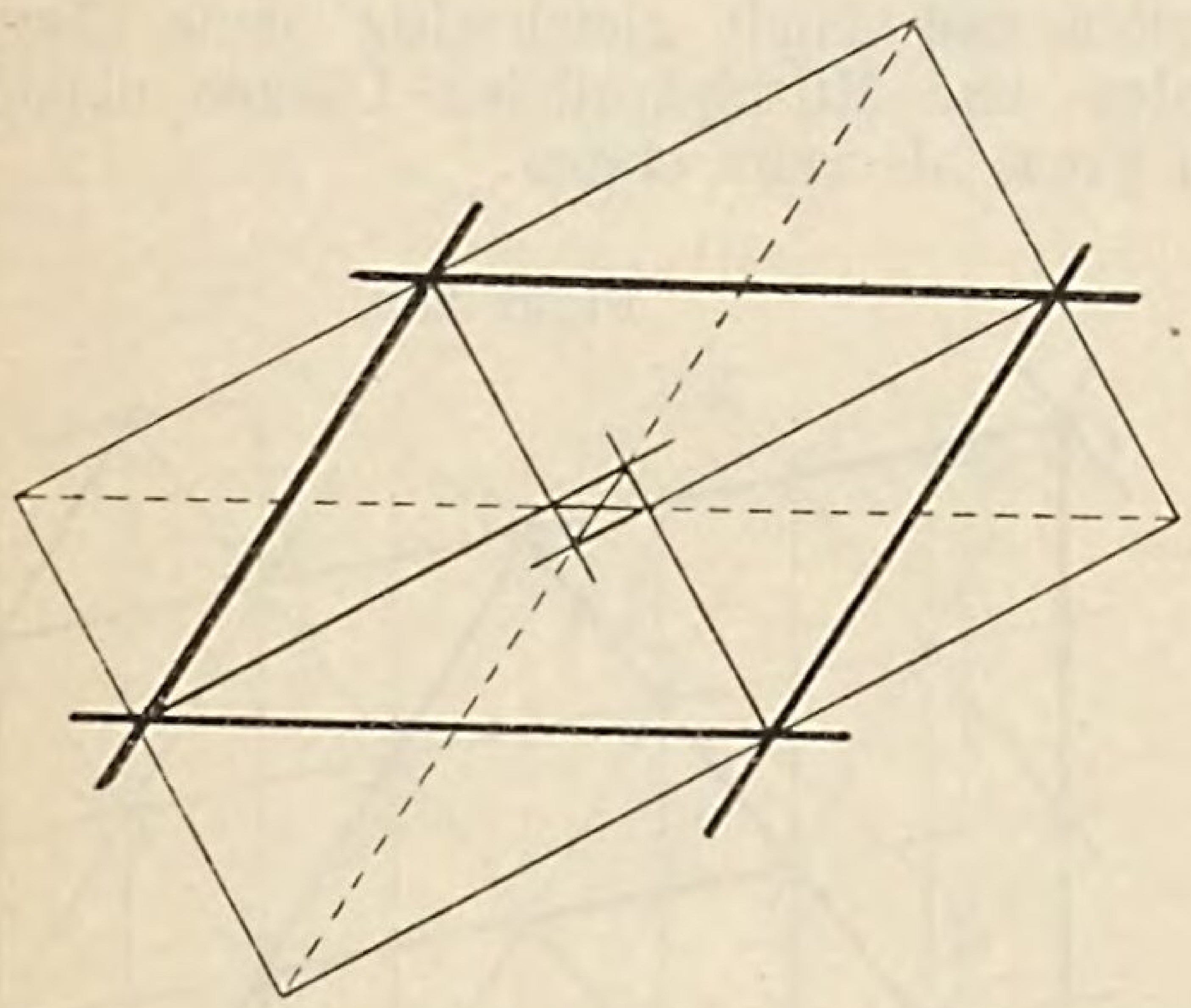


Erkl. 654. Die Diagonalen dieses inneren Parallelogramms fallen nicht zusammen mit den Diagonalen des grossen, sondern sie haben nur einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt wegen der zentrischen Symmetrie der ganzen Figur. Vielmehr ist jede Diagonale des kleinen Parallelogramms Mittelsenkrechte einer Diagonale des grossen.

parallel, also bilden alle vier ein Parallelogramm. Da ferner jeder Winkel dieses neuen Parallelogramms wegen senkrechter Winkelschenkel supplementär ist zu dem Winkel des ursprünglichen Parallelogramms, auf dessen Schenkeln seine Seiten senkrecht sind, so ist jeder solche Winkel im inneren Parallelogramm gleich einem der jenem benachbarten Winkel des grossen Parallelogramms. Daher hat das kleine Parallelogramm dieselben vier Winkel wie das grosse.

Aufgabe 248. Man soll das Vierseit der Halbierungslinien der Innen- und Aussenwinkel des Parallelogramms konstruieren und untersuchen.

Figur 287.



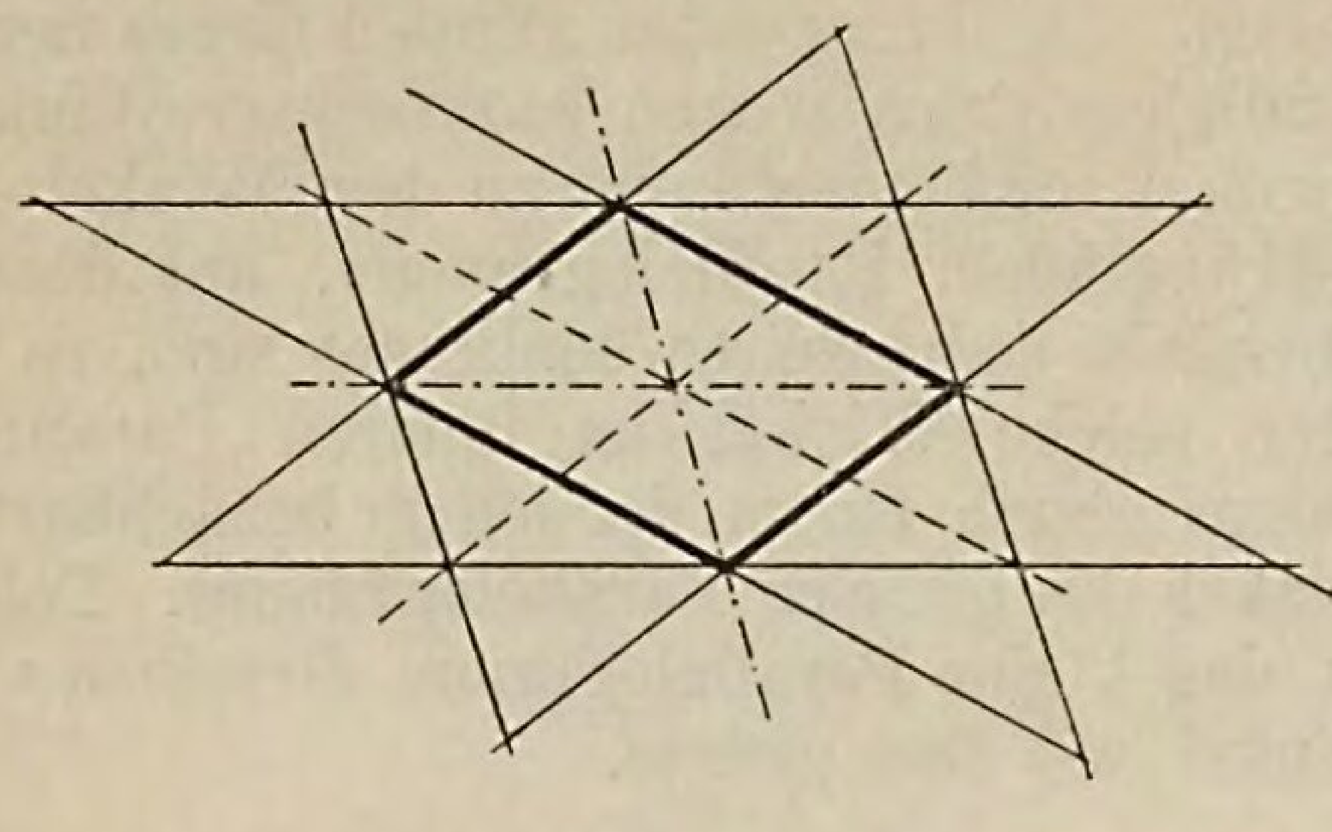
Erkl. 655. Durch die Halbierungslinien der Innenwinkel werden aus dem grossen Rechteck vier kleine Rechtecke ausgeschnitten, zwei grosse und zwei kleine, mit je einer Parallelogrammseite als Diagonale. Den beiden grösseren gehört das innere Rechteck als gemeinsames Flächenstück an.

Auflösung. Das Vierseit der Halbierungslinien der Innenwinkel ist beim Parallelogramm nach Antwort der Frage 189 ein Rechteck. Da die Halbierungslinien der Aussenwinkel je auf den Seiten dieses Rechtecks senkrecht stehen, so bilden diese ebenfalls ein Rechteck. Nach Auflösung der Aufgabe 216 ist jede Diagonale beim inneren gleich der halben Differenz, beim äusseren gleich der halben Summe zweier anstossenden Seiten des Parallelogramms.

Aufgabe 249. Welche Figur entsteht, wenn durch die Ecken eines Parallelogramms Parallelen zu der Diagonalen gezogen werden?

Auflösung. Werden durch die Ecken eines Parallelogramms zu seinen Diagonalen Parallele gezogen, so kommt dies gleich: einer Verschiebung der von den Diagonalen gebildeten Figur zwischen den beiden Parallelenpaaren je um die Seitenlänge des Parallelogramms nach beiden Richtungen. Daher sind die zwischen je zwei Parallelen gelegenen Stücke der Parallelen den Diagonalen gleich, treffen einander wie diese im Mittel-

Figur 288.



Erkl. 656. Die Beziehungen zwischen dem zweiten Parallelogramm und dem ersten sind dieselben, wie diejenigen zwischen einem Paralellogramm und jenem seiner Seitenmitten, und ähnlich wie die Beziehung zwischen einem Dreieck und dem Dreieck seiner Seitenmitten bezw. umgekehrt wie die Beziehung zwischen einem Dreieck und demjenigen der Parallelen durch seine Eckpunkte (siehe Figur 114).

Erkl. 657. Wird die Konstruktion dieser Parallelogramme fortlaufend wiederholt, so entsteht eine Reihe von Parallelogrammen 1, 2, 3, 4, 5, 6, worin 3 die doppelten Längen von 1, 5 die doppelten Längen von 3, also die vierfachen von 1 hat, also vierfache Seiten, Diagonalen, Mittelparallelen. Dagegen hat 2 die Diagonalen von 1 zu Seiten, seine doppelten Seiten zu Diagonalen, und dann 4 die doppelten, 6 die vierfachen Längen von 2. Bezeichnet man daher mit a und b die Seiten, mit e und f die Diagonalen von 1, so erhält man:

	Seiten	Mittelparallelen	Diagonalen
1) . . .	a, b	a, b	e, f
2) . . .	e, f	e, f	$2a, 2b$
3) . . .	$2a, 2b$	$2a, 2b$	$2e, 2f$
4) . . .	$2e, 2f$	$2e, 2f$	$4a, 4b$
5) . . .	$4a, 4b$	$4a, 4b$	$4e, 4f$
6) . . .	$4e, 4f$	$4e, 4f$	$8a, 8b$
7) . . .	$8a, 8b$	$8a, 8b$	$8e, 8f$
8) . . .	$8e, 8f$	$8e, 8f$	$16a, 16b$

Zugleich wird die ganze Ebene in zweierlei Gruppen lauter kongruenter Dreiecke zerteilt, und zwar in der ersten Gruppe mit den Seiten:

$$\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{e}{2},$$

in der zweiten Gruppe:

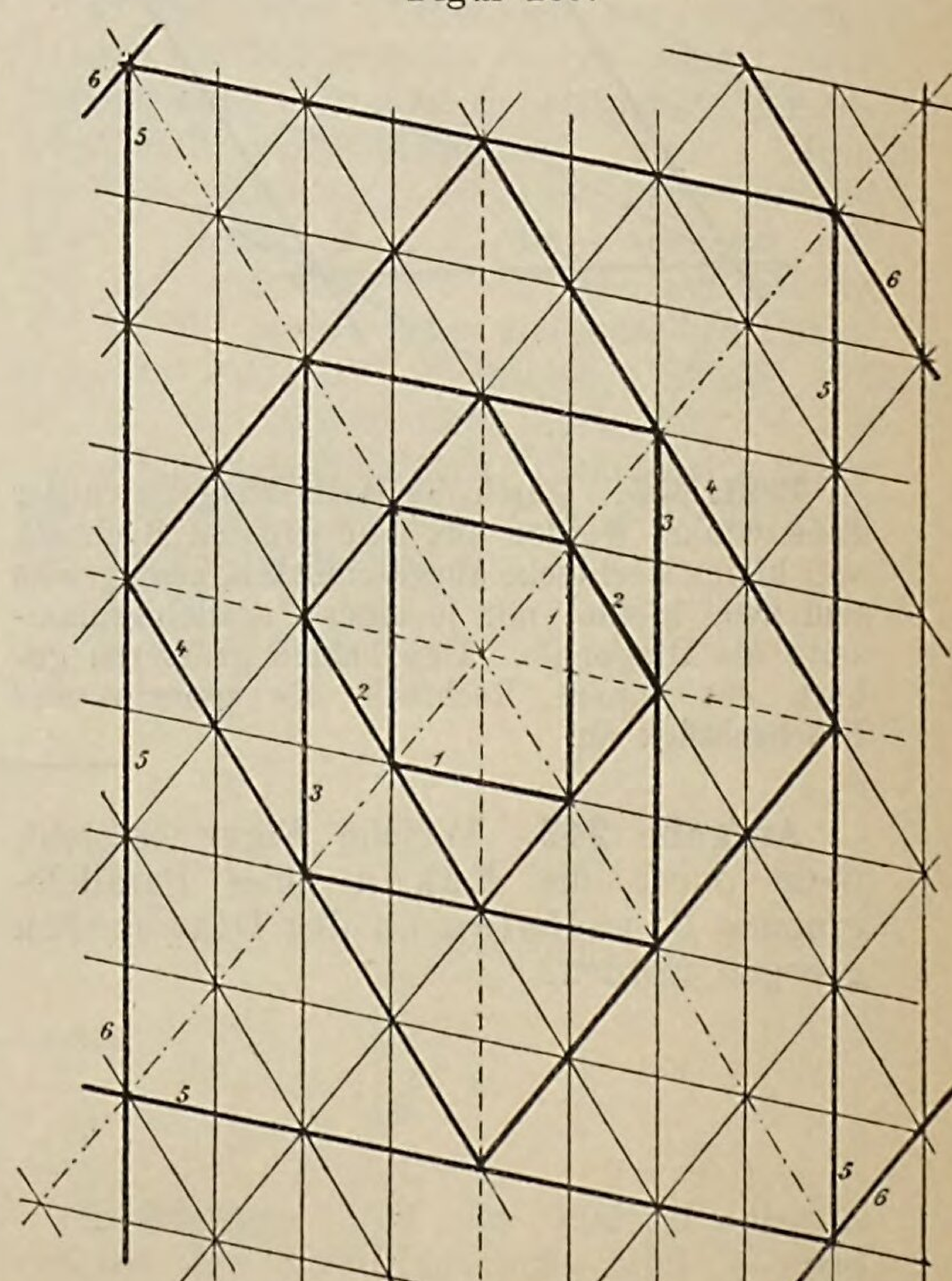
$$\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{f}{2},$$

von denen je zwei mit einer entsprechend gleichen Seite aneinander stossen.

punkt, und zwar auf der Mittelparallelen, und es entsteht dabei ein neues Parallelogramm, dessen vier Ecken auf den Mittelparallelen des alten liegen und dessen Seiten aus je zwei Hälften derselben Diagonalen des ursprünglichen bestehen. Es sind daher die Seiten des neuen Parallelogramms gleich und parallel den Diagonalen des vorigen, die Diagonalen des einen von beiden Parallelogrammen sind jeweils Mittelparallelen des andern und umgekehrt.

Auf einer Diagonalen des neuen als Mittelparallelen des alten Parallelogramms sind aber auch vier gleichlange Stücke entstanden, deren jedes gleich der halben parallelen Parallelogrammseite ist, also sind die Diagonalen des neuen Parallelogramms je gleich einer doppelten Seitenlänge des ursprünglichen. Wiederholt sich daher dieser Vorgang der Konstruktion eines dritten Parallelogramms durch die Ecken dieses zweiten und parallel seinen Diagonalen, so hat dieses dieselben Diagonalen- und Mittelparallelen-Richtungen, wie das erste, es sind aber seine Seiten und damit gleichzeitig seine Diagonalen- und Mittelparallelen-Längen doppelt so gross als beim ersten.

Figur 289.



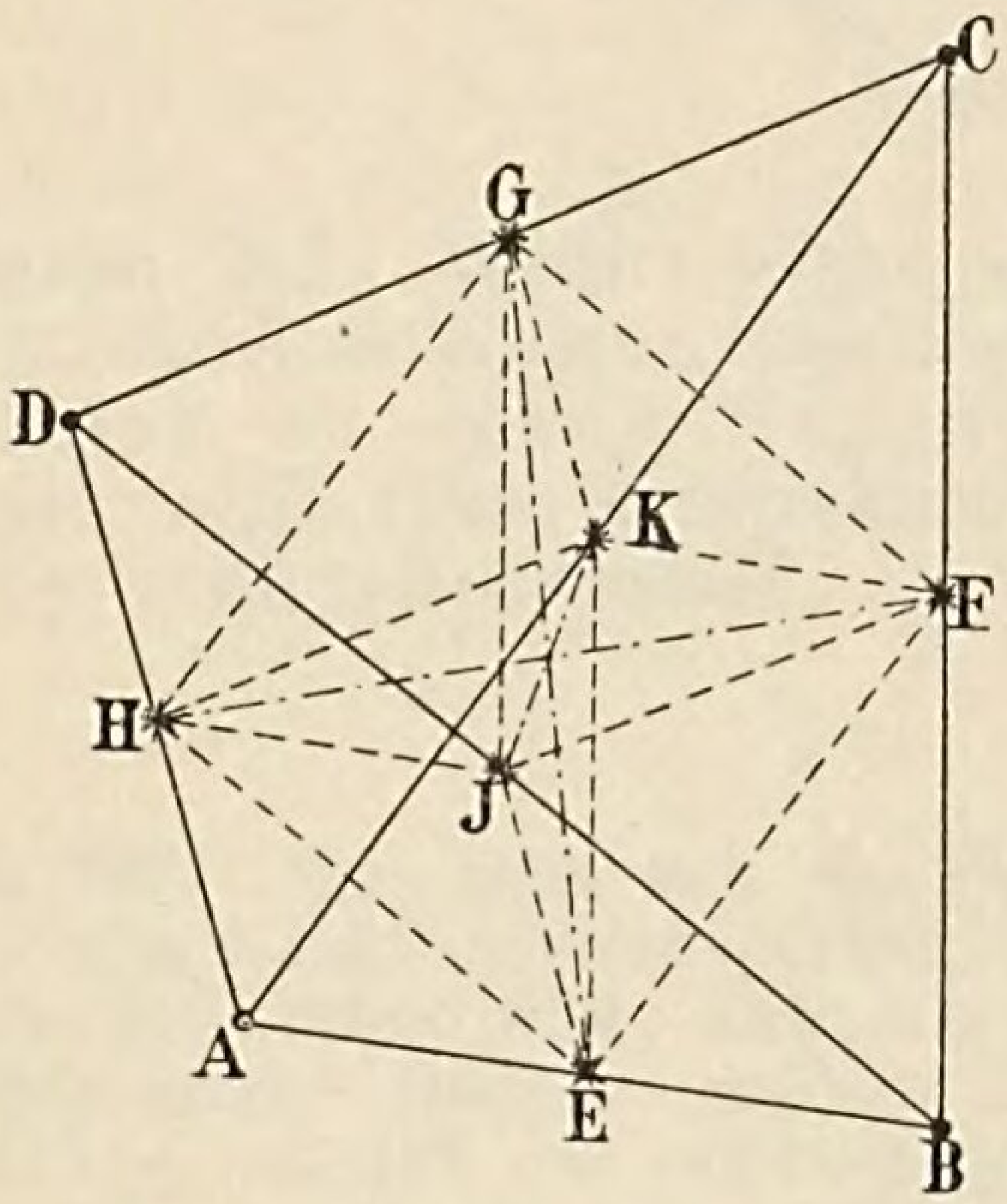
Aufgabe 250. Man soll beweisen, dass nicht nur die Seitenmitten des beliebigen Vierecks unter sich, sondern auch mit den Mittelpunkten der Diagonalen je ein Parallelogramm bilden.

Erkl. 658. Da Diagonalen und Seiten des Vierecks in Hinsicht der in nebenstehender Aufgabe betrachteten Umstände vollständig gleichwertig sind, so kann man diese sechs Strecken ansehen als die sechs Seiten des von den vier Punkten $ABCD$ bestimmten vollständigen Vierecks und kann dann den Satz 84 dahin aussprechen:

Die Mittelpunkte je zweier Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks bilden ein Parallelogramm, dessen Seiten je gleich der Hälfte der beiden andern Gegenseiten sind.

Aus diesem Grunde sind auch in der folgenden Figur 290 alle sechs Seiten mit gleicher Liniengattung gezeichnet und nicht, wie in Figur 130, zwei davon als Diagonalen unterschieden.

Figur 290.



Erkl. 659. Unter Gegenseiten eines vollständigen Vierecks versteht man je zwei solche seiner sechs Seiten, welche nicht durch einen gemeinsamen Eckpunkt gehen.

Auf Grund des Schlusses nebenstehender Auflösung kann man nun für ein vollständiges Viereck auch noch den weiteren Satz aussprechen:

Satz: Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten eines vollständigen Vierecks (oder die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte zweier Gegenseiten und der Diagonalen eines einfachen Vierecks) gehen durch denselben Punkt und halbieren einander daselbst.

Auflösung. Wie aus Antwort der Frage 165 und Figur 130 hervorging, bilden die Seitenmitten nicht nur des gewöhnlichen Vierecks $ABCD$, sondern auch des überschlagenen Vierecks $ABDC$ ein Parallelogramm. Nun kann man aber die Seiten AC und BD des überschlagenen Vierecks $ABDC$ auch ansehen als die Diagonalen des gewöhnlichen Vierecks $ABCD$; dann ist in Antwort der Frage 165 bereits bewiesen, dass auch die Mittelpunkte F und H der Diagonalen AD und BC ein Parallelogramm bilden mit den Seitenmitten E und G. Dass dasselbe auch stattfindet mit den Mittelpunkten von AC und BD geht ebenfalls aus Satz 84 hervor, indem man AC und BD mit BC und AD ansieht als Seiten des überschlagenen Vierecks $ADBCA$ (s. Figur 130). Man erhält also im ganzen drei Parallelogramme, nämlich (Figur 290):

1) Das Parallelogramm $EFGH$ mit Seiten:

$$EF = GH = \frac{AC}{2},\; FG = HE = \frac{BD}{2},$$

und mit Diagonalen EG und FH, also Mittelpunkt des Parallelogramms im Schnittpunkt und Mittelpunkt der beiden Linien EG und FH.

2) Das Parallelogramm $EJGK$ mit Seiten:

$$EJ = GK = \frac{AD}{2},\; EK = JG = \frac{BC}{2},$$

und mit Diagonalen EG und JK, also Mittelpunkt des Parallelogramms im Schnittpunkt und Mittelpunkt der Strecken JK und EG.

3) Das Parallelogramm $FJHK$ mit Seiten:

$$FJ = HK = \frac{CD}{2} \text{ und } JH = FK = \frac{AB}{2},$$

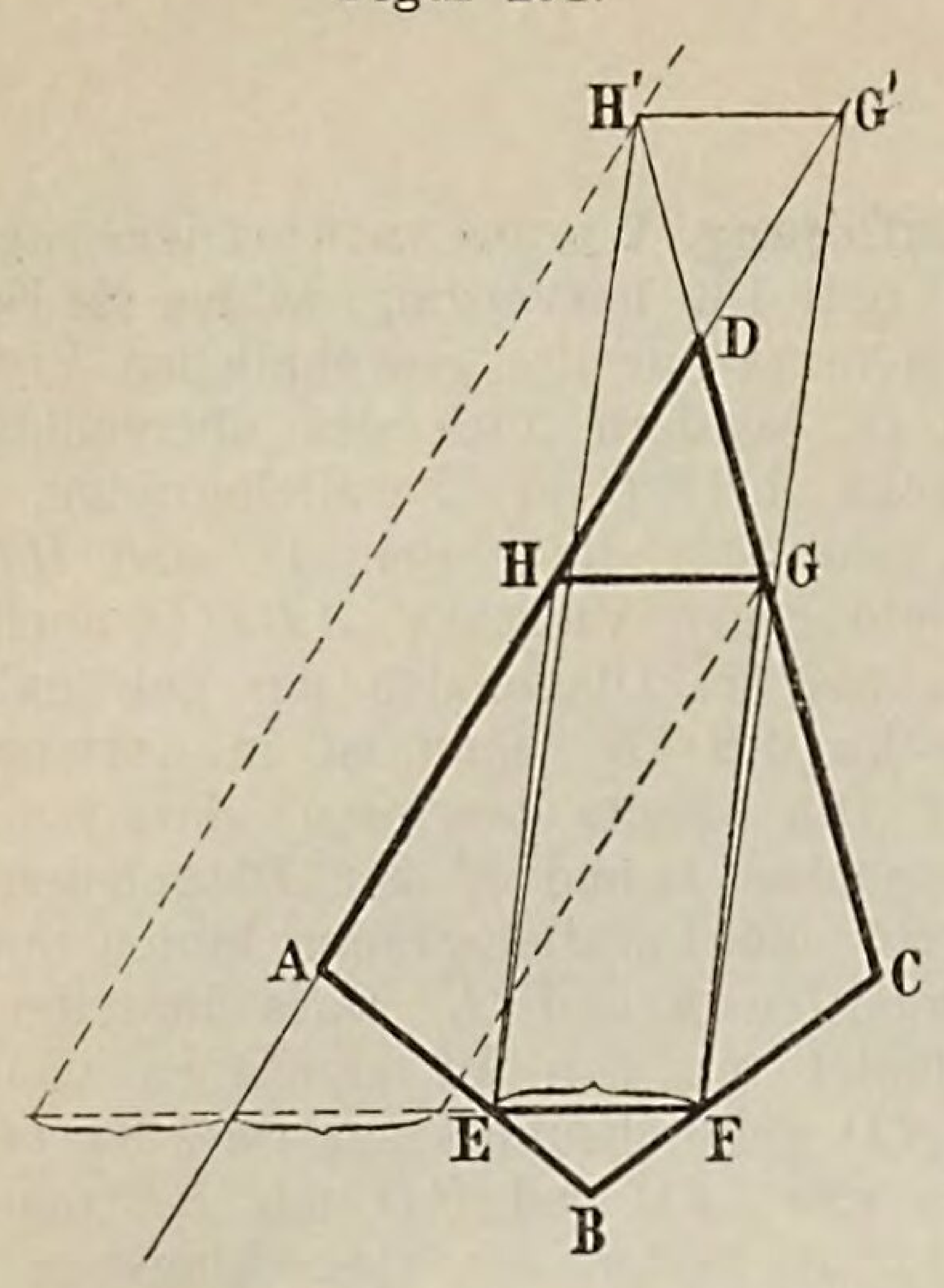
und mit Diagonalen FH und JK, also Mittelpunkt des Parallelogramms im Schnittpunkt und Mittelpunkt der Strecken FH und JK.

Nach vorstehender Ueberlegung muss daher der Mittelpunkt einer der drei Strecken EG, FH, JK zugleich Mittelpunkt der zwei anderen sein, und diese drei Strecken haben die merkwürdige Eigenschaft, durch denselben Punkt zu gehen und einander daselbst zu halbieren.

Aufgabe 251. Man soll in ein beliebiges Vieleck ein Parallelogramm einschreiben (s. Erkl. 593), von welchem die Lage einer Seite gegeben ist.

Auflösung. Wenn in Figur 291 die Strecke EF willkürlich gegeben ist, und die

Figur 291.



ihr gegenüberliegende Seite des Parallelogramms verlangt wird, so muss diese der Strecke EF gleich und parallel sein und ihre Endpunkte auf den Viereckseiten DC und AD liegen haben. Nach Auflösung der Aufgabe 54 kann man aber stets eine Strecke von vorgeschriebener Länge EF und Richtung EF zwischen die Schenkel eines Winkels CDA einlegen. Ist dies geschehen, so bildet diese Strecke GH eine parallele und gleichgrosse Strecke, wie EF, also muss die Figur $EFGH$ ein Parallelogramm sein.

Man erhält eine einzige Lösung, wenn bloss die Innenstrecken der Seiten in Rücksicht gezogen werden, dagegen vier, wenn man auch die Scheitelwinkel und die Diagonalen in Betracht nimmt.

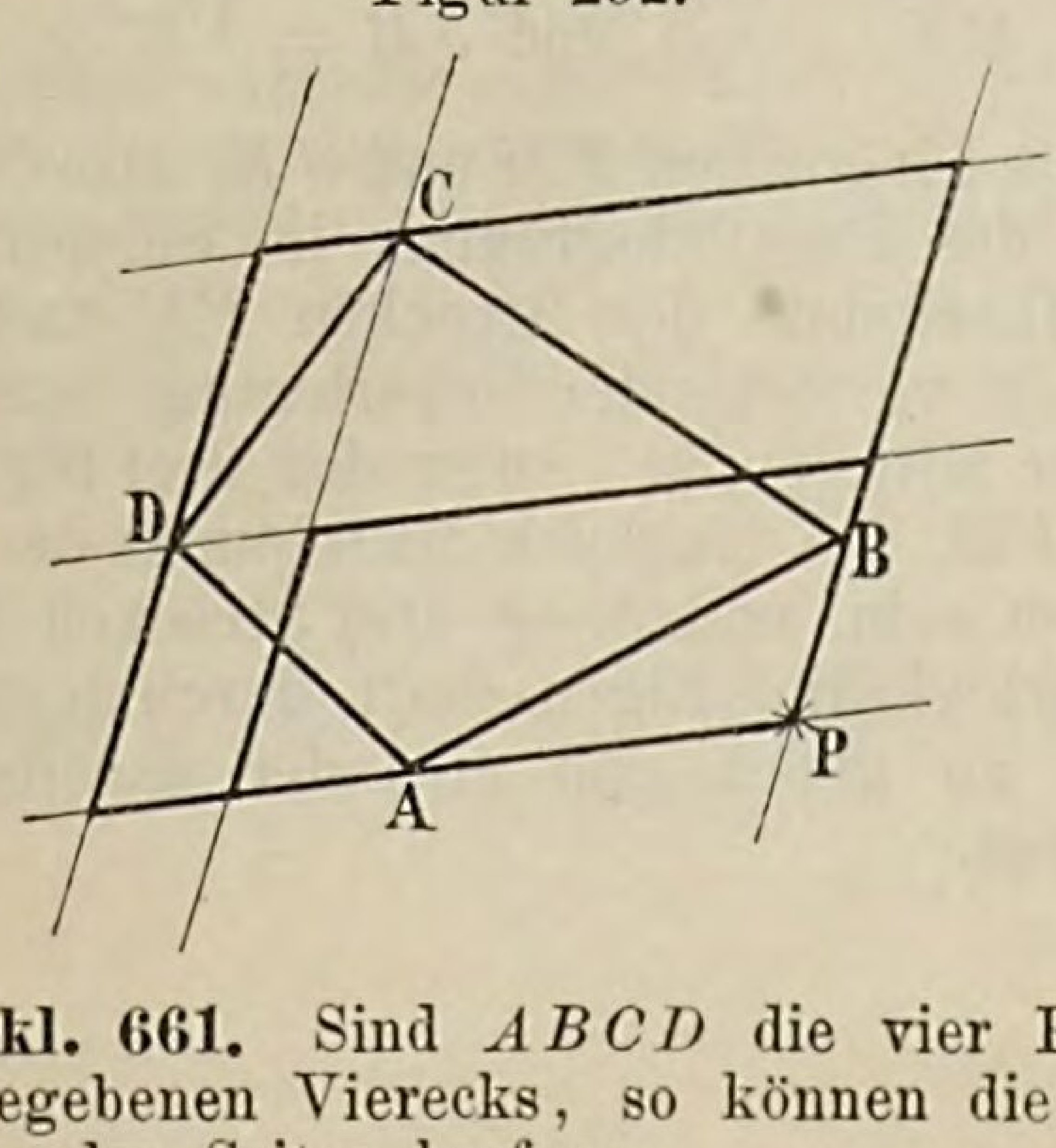
Erkl. 660. In Figur 291 sind diejenigen Hilfslinien angegeben, welche nach Auflösung der Aufgabe 54 nötig sind, um die der Strecke EF gleiche und parallele Strecke GH zu finden. Man kann nach derselben Aufgabe auch eine Lage dieser Strecke im Scheitelwinkel des Winkels BCD finden und es wäre auch dieses Parallelogramm $EFG'H'$ nach Erkl. 593 als ein dem Viereck $ABCD$ „eingeschriebenes" zu betrachten. Einem „vollständigen Viereck" kann man also vier Parallelogramme von gegebener Seite einschreiben, nämlich mit der Gegenseite im Innenwinkel oder Scheitelwinkel der beiden Gegenseiten der gegebenen.

Aufgabe 252. Man soll einem gegebenen Viereck ein Parallelogramm einschreiben, von welchem ein Eckpunkt gegeben ist.

Auflösung. Wenn ein Eckpunkt des Parallelogramms gegeben ist, so müssen zwei seiner Seiten durch zwei Eckpunkte des Vierecks gehen, die beiden andern durch die andern beiden Eckpunkte, den ersteren Seiten parallel.

Man erhält eine einzige Lösung, wenn das Viereck ganz im Innern des Parallelogramms liegen soll, bei beliebiger Wahl der Punkte aber 12 Lösungen (vergl. Erkl. 661).

Figur 292.

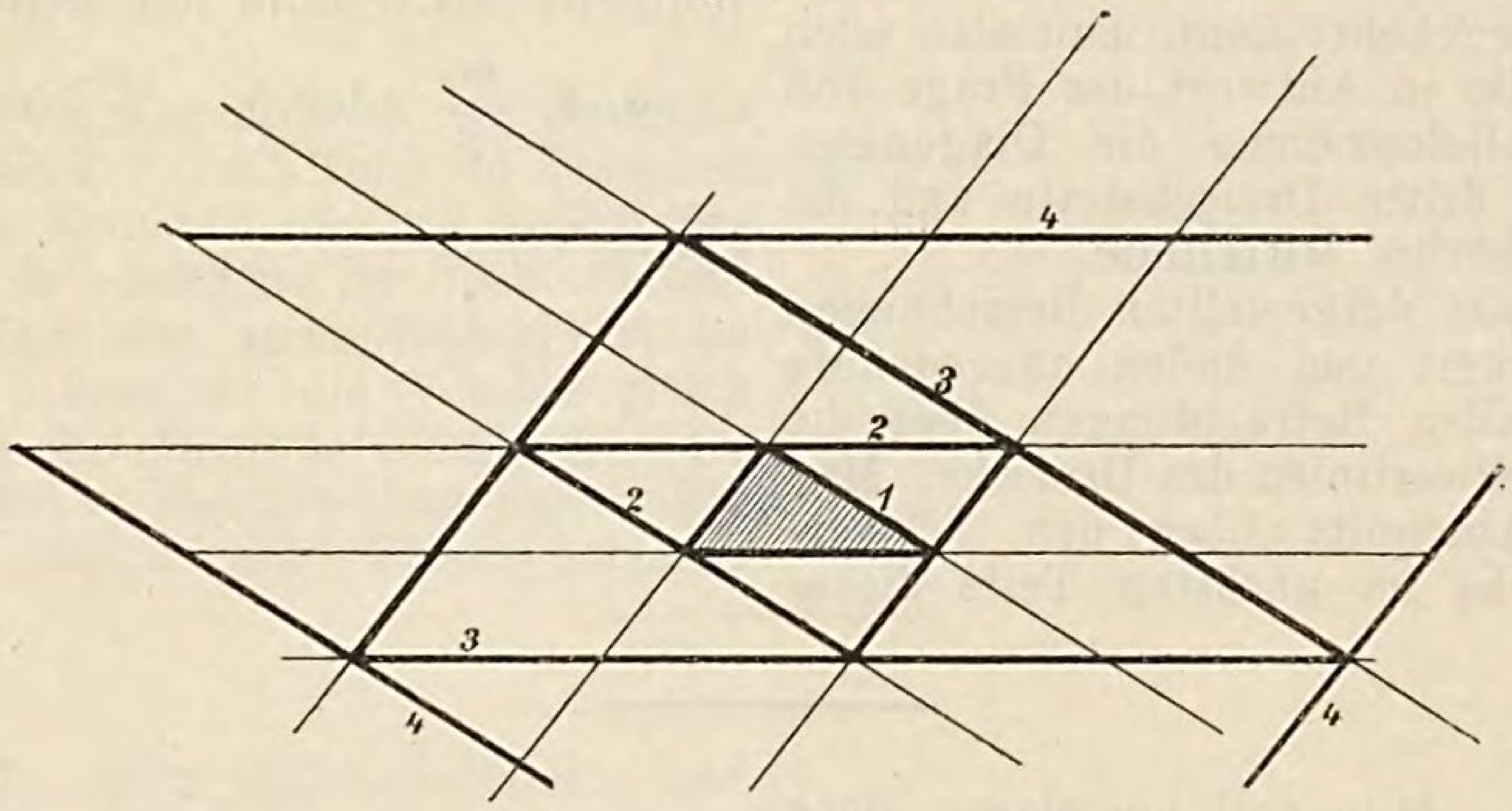


Erkl. 661. Sind $ABCD$ die vier Punkte des gegebenen Vierecks, so können die durch P gehenden Seiten laufen:

1) durch A und B und dabei die Parallelen durch $C \parallel PA$ oder $\parallel PB$,

2) durch A und C und dabei die Parallelen durch $D \parallel PA$ oder $\parallel PC$,
3) durch A und D und dabei die Parallelen durch $B \parallel PA$ oder $\parallel PD$,
4) durch B und C und dabei die Parallelen durch $D \parallel PB$ oder $\parallel PC$,
5) durch B und D und dabei die Parallelen durch $A \parallel PB$ oder $\parallel PD$,
6) durch C und D und dabei die Parallelen durch $A \parallel PC$ oder $\parallel PD$.

Figur 293.



Aufgabe 253. Welche Figur entsteht, wenn man durch die Ecken eines Dreiecks Parallelen zu deren Gegenseiten zieht, und wenn diese Konstruktion fortgesetzt wiederholt wird?

Erkl. 662. Man kann sich die Figur 289 aus 293 dadurch hervorgehend denken, dass die Figur 293 konstruiert wird, nicht nur für das dort angenommene Dreieck, sondern noch für drei andere, nämlich das zentrisch-symmetrische in Bezug auf eine Seitenmitte und für die beiden andern, welche durch die zweite Diagonale des so erhaltenen Parallelogramms gebildet werden. Dabei entsteht dann jede Linie der Figur 289 doppelt.

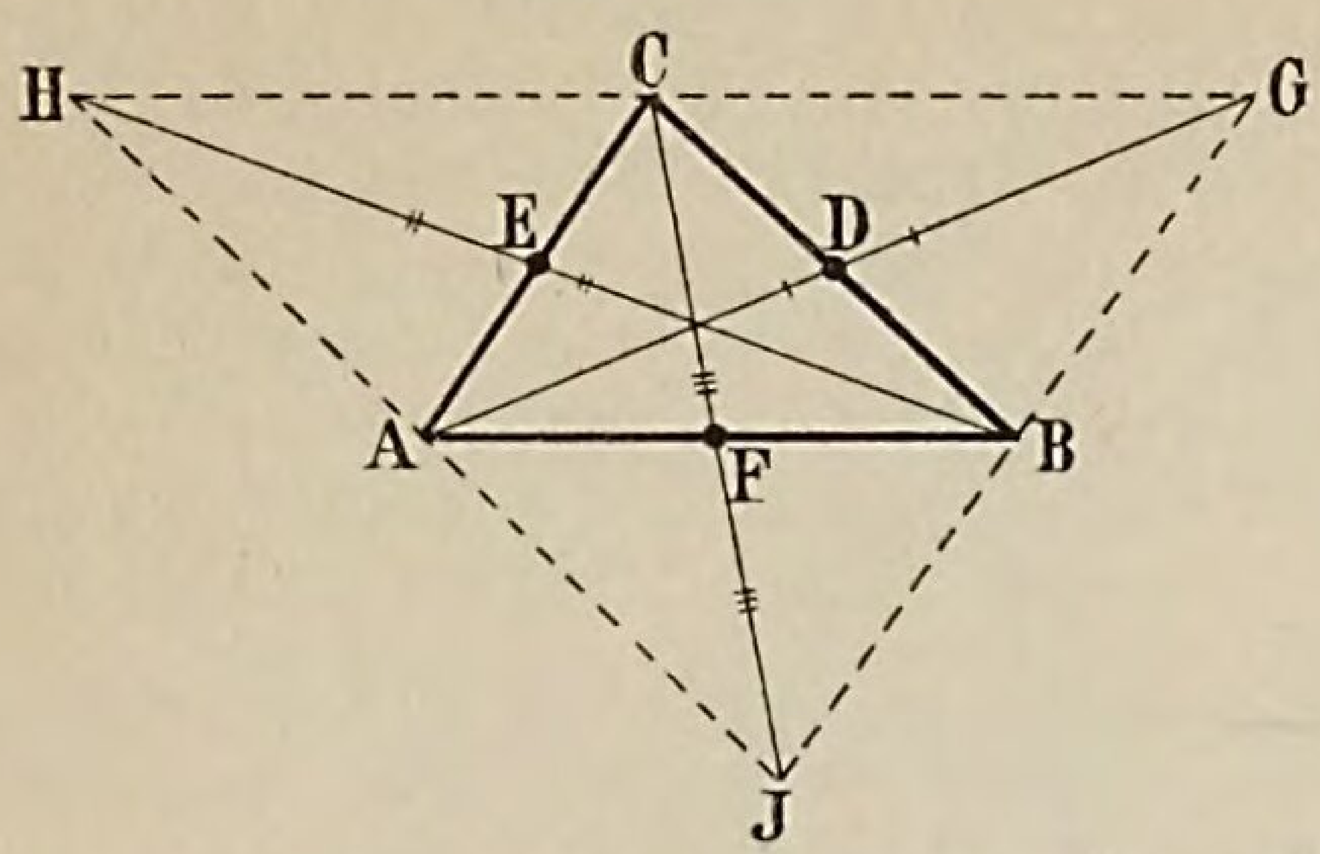
Auflösung. Nach Satz 85a entstehen bei der erstmaligen Konstruktion der Parallelen zu den Seiten eines Dreiecks durch deren Gegenseiten ein Dreieck mit gleichen Winkeln, doppelten Seiten und vierfachem Inhalt. Durch die zweite gleichartige Konstruktion entsteht also wieder ein Dreieck mit gleichen Winkeln, aber gegenüber dem ersten von 4-fachen Seiten und 16-fachem Inhalt; alsdann eines wieder mit gleichen Winkeln, aber 8-fachen Seiten und 64-fachem Inhalt, u. s. w.

Die ganze Figur enthält nur solche Linien, welche auch in Figur 289 enthalten waren, aber keineswegs jene alle, sondern nur einen Teil derselben, indem alle diejenigen fortbleiben, welche durch das zweite Halbdreieck des Parallelogramms 1 veranlasst waren; und die Zwischenräume der Parallelen, durch welche die Ebene zerteilt wird, werden nach beiden Seiten von jeder Dreiecksseite aus immer verdoppelt.

Aufgabe 254. Man soll die drei Mittellinien eines Dreiecks über ihren Seitenschnittpunkt hinaus je um sich selbst verlängern und die dadurch entstehenden Figuren untersuchen.

Auflösung. Wenn man die Mittellinien AD, BE, CF des Dreiecks ABC Figur 294 je verlängert um $DG = DA$, $EH = EB$ und $FJ = FC$, so werden in jedem der

Figur 294.



Erkl. 663. Umgekehrt kann man also auch sagen, dass für die in Antwort der Frage 168 betrachteten Parallelogramme die Diagonalen jeweils sind: die dritte Dreiecksseite und die doppelte ihr zugehörige Mittellinie.

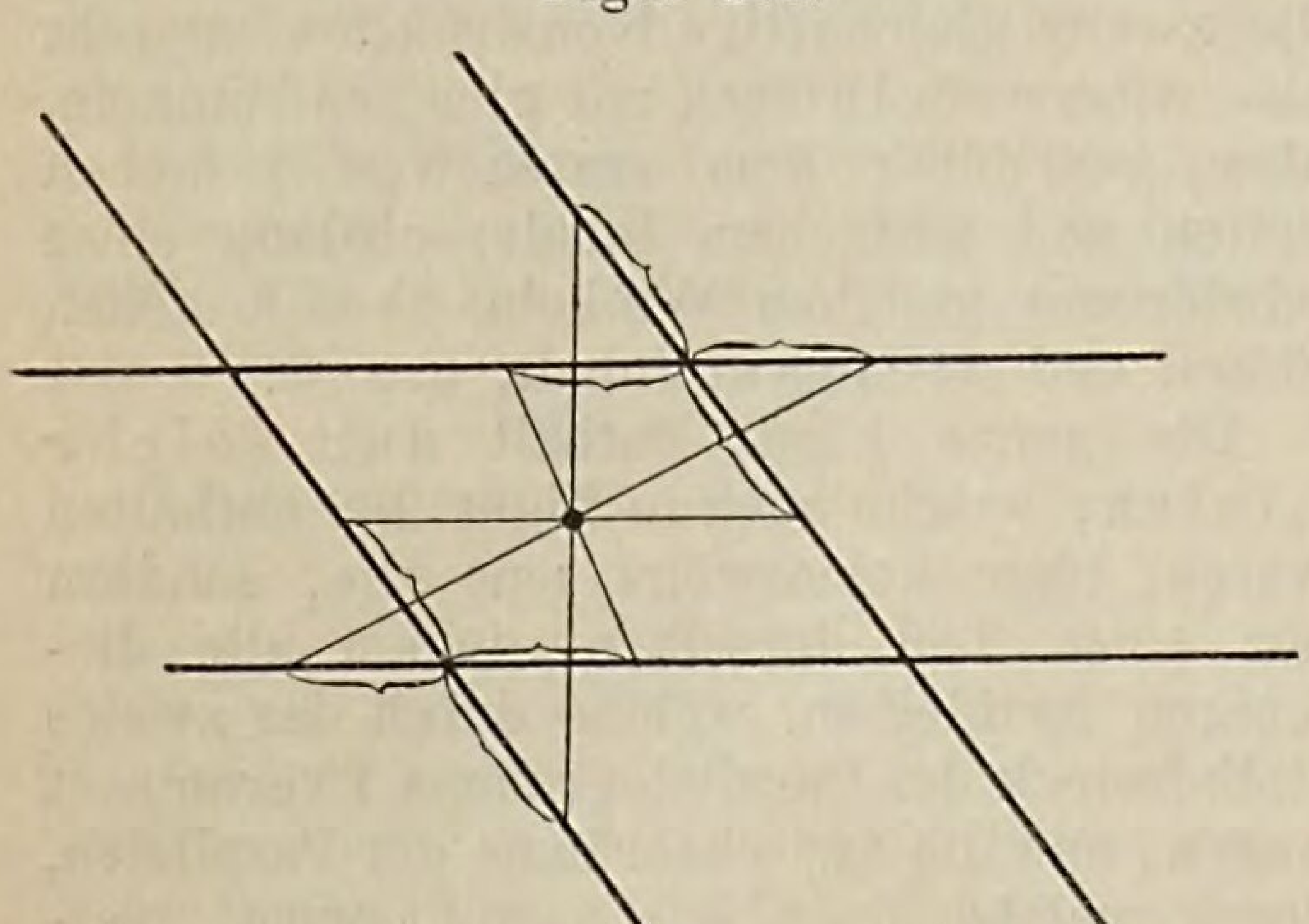
Die in Figur 294 dargestellten Beziehungen sind von Wichtigkeit und finden ausgedehnte Anwendung bei allen Betrachtungen über die Mittellinie oder Schwerlinien des Dreiecks. Man vergleiche den Abschnitt über den Schwerpunkt des Dreiecks im nächsten Teile dieses Lehrbuches.

Vierecke $ABGC$, $ABCH$, $AJBC$ die Diagonalen einander halbieren, also wird jedes dieser Vierecke ein Parallelogramm, und die gleichen Gegenseiten sind $BC = AH = AJ = a$, $AC = BJ = BG = b$, $AB = CG = CH = c$. Es entsteht daher dieselbe Figur, welche in voriger Aufgabe betrachtet wird; und jede einzelne der um sich selbst verlängerten Mittellinien bildet mit den benachbarten Dreiecksseiten zwei kongruente Dreiecke, welche zu Seiten haben diese beiden anliegenden Dreiecksseiten und die doppelte Mittellinie der dritten, also

$$a,\ b,\ \frac{m_c}{2} \text{ oder } b,\ c,\ \frac{m_a}{2} \text{ oder } c,\ a,\ \frac{m_b}{2}.$$

Aufgabe 255. Man soll beweisen, dass die Verbindungslinie zweier Punkte auf Gegenseiten eines Parallelogramms, welche von zwei Gegenecken in entgegengesetzter Richtung gleichen Abstand haben, durch den Mittelpunkt geht und daselbst halbiert wird.

Figur 295.

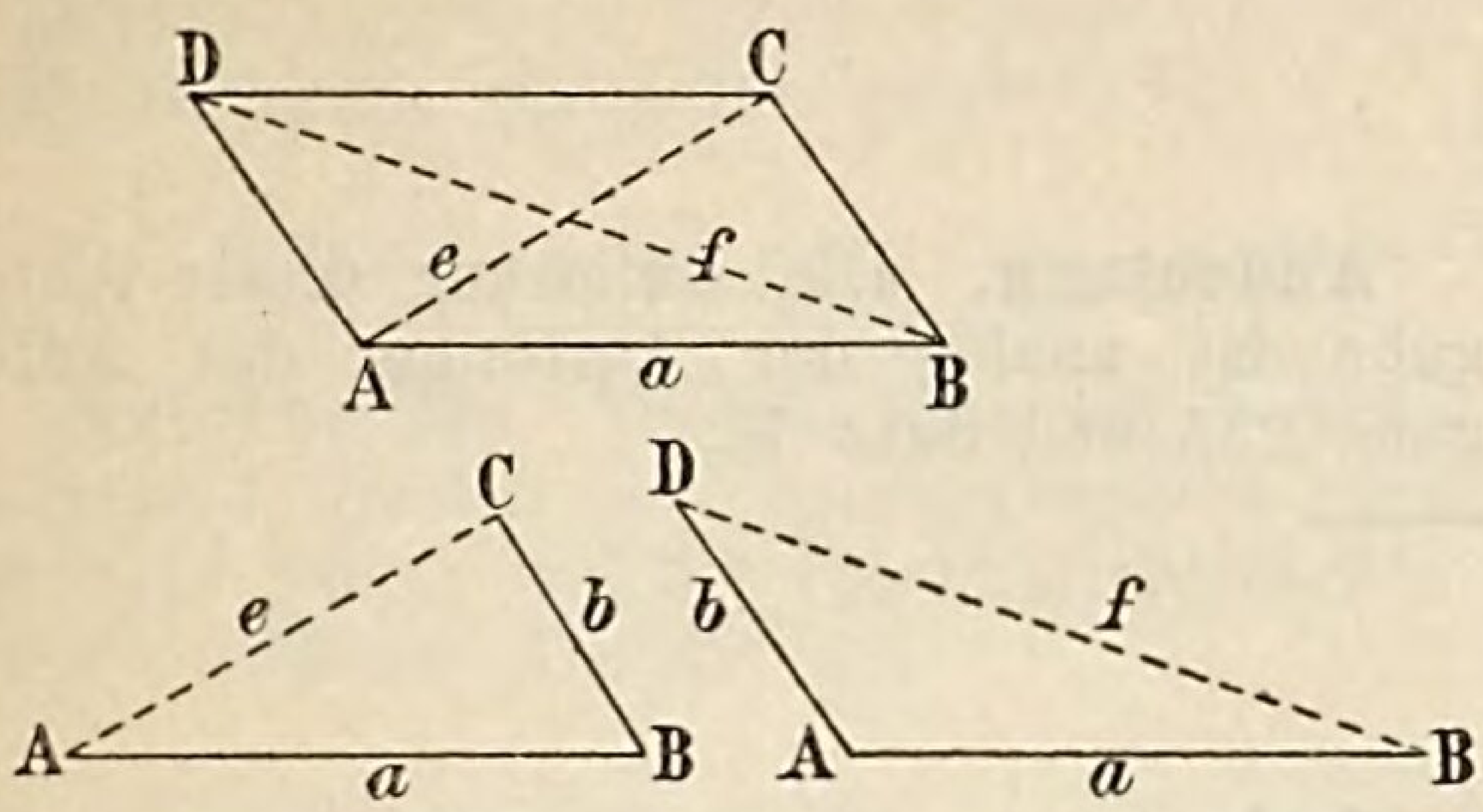


Auflösung. Der Beweis nebenstehender Behauptung ist zu führen durch unmittelbare Bezugnahme auf die Sätze 30 und 83c. Denn da die Gegenseiten und Gegenecken des Parallelogramms zentrisch-symmetrisch sind, so sind jene Punkte ebenfalls zentrisch-symmetrisch, also ist ihre Verbindungslinie Zentrale.

Aufgabe 256. Man soll beweisen, dass die grössere Diagonale eines Parallelogramms stets durch den kleineren Winkel geht, und umgekehrt.

Auflösung. Ist e die kleinere und f die grössere Diagonale eines Parallelogramms mit den Seitenlängen a und b, so bildet sowohl e als f ein Dreieck mit Seiten a und b, nämlich ABC mit a, b, e, und ABD mit

Figur 296.



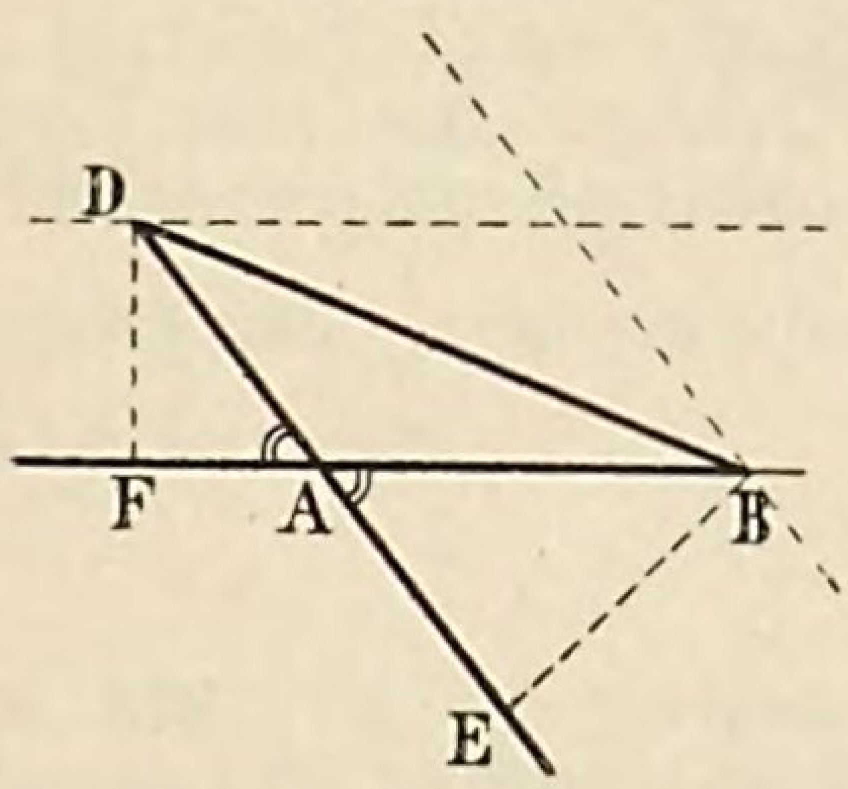
a, f, b. Nach dem in Aufgabe 198 bewiesenen Satze muss dann, wenn $AC = e$ kleiner ist, als $BD = f$, auch der Winkel ABC gegenüber e im Dreieck ABC kleiner sein, als der Winkel BCD gegenüber f im Dreieck ACD. Es liegt also der grösseren Diagonale des Parallelogramms der grössere Winkel gegenüber und umgekehrt, folglich geht durch den grösseren Winkel die kleinere Diagonale.

Erkl. 664. Das Ergebnis dieser Aufgabe stimmt überein mit der Gestaltung im Rhombus und Rechteck. Im Rhombus nämlich bleibt derselbe Satz wörtlich bestehen, im Rechteck und Quadrat aber zeigt sich seine Richtigkeit im besonderen Falle, dass wo die Winkel gleich gross sind, auch die Diagonalen gleich sind, und dass umgekehrt zu gleichen Diagonalen auch nur gleich grosse, nämlich rechte Winkel gehören.

Aufgabe 257. Man soll beweisen, dass dasjenige Paar von Gegenseiten des Parallelogramms den kleineren Parallelen-Abstand besitzt, welches durch die längeren Seiten gebildet wird, und umgekehrt.

Auflösung. Zum Beweise der nebenstehenden Behauptung zeichne man wieder, wie auch in Figur 296 geschehen ist, eines der vier durch die Diagonalen gebildeten Teildreiecke einzeln heraus, z. B. eines, welches den stumpfen Winkel enthält. Dann ist (Fig. 297) die Höhe dieses Dreiecks von B auf AD die eine, diejenige von D auf AB die andere Höhe des Parallelogramms; beide fallen ausserhalb des Dreiecks ABD und bilden rechtwinklige Dreiecke ABE und ADF. Diese beiden Teildreiecke haben aber den Scheitelwinkel bei A gemeinsam, sind also zu beurteilen nach der Betrachtungsweise der Aufgabe 163 und 164 oder Aufgabe 200.

Figur 297.



Da nämlich in beiden Dreiecken zwei, also alle drei Winkel gleichgross sind, so muss auch dasjenige die grössere Kathete haben, welches die grössere Hypotenuse hat. Die grössere Hypotenuse ist aber die grössere Parallelogrammseite; die demnach grössere Höhe aber ist die Höhe zwischen den beiden kürzeren Parallelogrammseiten. Also gehört die grössere Höhe des Parallelogramms zum kürzeren Seitenpaar, die kürzere Höhe zum längeren Seitenpaar.

Erkl. 665. Auch bei dieser Aufgabe stimmt das Ergebnis überein mit der Gestaltung im Rhombus und Rechteck. Im Rechteck nämlich bleibt derselbe Satz insofern wörtlich bestehen, als dort Seite und Höhe zusammenfällt, also die grössere Seite von selbst senkrecht zur kleineren Höhe ist. Im Rhombus dagegen und im Quadrat zeigt sich die Richtigkeit in dem besonderen Falle gleicher Seiten, dass nämlich bei gleichen Seiten auch gleiche Höhen eintreten, und dass umgekehrt wegen der vier gleichen Seiten von Rhombus und Quadrat auch die Abstände der beiden Parallelenpaare gleich gross sind.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 258. Welche Eigenschaften bekommt das in Aufgabe 235 gebildete Antiparallelogramm, wenn es aus einem gleichseitigen Dreieck entsteht?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 235 und Satz 76.

Aufgabe 259. Welchen Winkel muss ein Antiparallelogramm haben, in welchem die vierte Seite das Doppelte der drei gleichgrossen andern sein soll?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 258.

Aufgabe 260. Welchen Winkel muss ein Antiparallelogramm haben, in welchem die vierte Seite die Hälfte der drei gleichgrossen andern sein soll?

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 261. Wie gross sind die Parallelen eines Antiparallelogramms, welche die Höhe desselben in drei gleiche Teile teilen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf Satz 75.

Aufgabe 262. Ein Viereck soll zwei gleiche Gegenseiten haben. Was für ein Viereck kann es werden?

Aufgabe 263. Bei einem Deltoid seien die gleichen Winkel rechte. Wie gross sind die andern?

Aufgabe 264. Man soll aus einem Viereck mit zwei gleichgrossen Gegenwinkeln durch Verschiebung irgend zweier anstossenden Seiten desselben ein Deltoid herstellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 242.

Aufgabe 265. In einem Deltoid sei die eine Diagonale gleich den kurzen Seiten, die andere gleich den längeren. Welche Winkel muss das Deltoid haben?

Andeutung. Man findet leicht, dass das Deltoid einen einspringenden Winkel haben muss.

Aufgabe 266. Wo liegt der Mittelpunkt der nicht halbierten Diagonale im Deltoid (in Bezug auf die andere)?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 208.

Aufgabe 267. Welche Eigenschaft muss derjenige Punkt der Symmetrieachse des Antiparallelogramms haben, welcher von zwei Schenkelecken gleichweit entfernt ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Symmetrie der Figur.

Aufgabe 268. Welche Eigenschaft muss derjenige Punkt der Symmetrieachse des Deltoids haben, welcher von zwei ungleichen Seiten gleichen Abstand hat.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 269. Es seien gegeben zwei verschieden gerichtete Paare von Parallelen und ein Punkt P. Man soll eine Transversale so durch P über die Parallelen legen, dass die zwischen beiden Parallelstreifen liegenden Strecken auf ihr gleichgross werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 244.

Aufgabe 270. Es seien gegeben ein Paar Parallelen, ein Punkt P und eine Transversale. Man soll durch P eine andere Transversale so legen, dass auf ihr durch die Parallelen und die Transversale zwei gleichgrosse Strecken abgeschnitten werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 212.

Aufgabe 271. Es seien gegeben zwei verschieden gerichtete Paare von Parallelen. Man soll eine Transversale so darüber legen, dass die in beiden Streifen liegenden Strecken gleichgross seien und $\frac{1}{n}$ der dazwischen liegenden Strecke betragen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 245.

Aufgabe 272. In der vorigen Aufgabe soll die Transversale so durch die Parallelen (ausserhalb ihres Parallelogramms selbst) gelegt werden, dass die in keinem der Streifen liegende Strecke $\frac{1}{n}$ der innerhalb der Streifen liegenden Strecken beträgt.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 273. In Aufgabe 271 soll die Transversale so durch das Parallelogramm selbst gelegt werden, dass die innerhalb beider Streifen gemeinsam liegende Strecke das n-fache oder $\frac{1}{n}$ der in jedem Streifen liegenden Strecken beträgt.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 274. Man verlängere die Seiten eines Parallelogramms um das n-fache (wobei n auch ein Bruch sein kann) und verbinde die Endpunkte in gleicher Umlaufsrichtung mit dem Scheitel des gegenüberliegenden a) Aussenwinkels, b) Innenwinkels. Das entstehende Viereck ist ein Parallelogramm.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 246.

Aufgabe 275. Man verbinde nach voriger Aufgabe die entsprechenden Teilpunkte statt mit der Ecke selbst, wieder mit unter sich ebenso entsprechenden Teilpunkten des andern Parallelenpaares und beweise, dass wieder Parallelogramme entstehen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe — mit Zuhilfenahme von Kongruenzsätzen.

Aufgabe 276. Man teile zwei Gegenseiten eines Parallelogramms in n-gleiche Teile und trage diese Teilstrecken auch auf den Seitenverlängerungen auf. Nun verbinde man eine Ecke mit dem von der benachbarten Ecke aus m-ten der gegenüberliegenden Teilpunkte und verbinde die übrigen Teilpunkte durch Parallelen hierzu. Dann wird die eine Diagonale des Parallelogramms durch diese Parallelen in $m + n$, die andere in $m - n$ bezw. $n - m$ gleiche Teile geteilt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 246, Absatz 4.

Aufgabe 277. Man beweise, dass die Diagonalen der Parallelogramme, welche in der Aufgabe 274 entstanden, durch den Mittelpunkt gehen und dort halbiert werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 255.

Aufgabe 278. Man beweise, dass jede Diagonale eines Parallelogramms mit der grösseren anstossenden Seite einen kleineren Teilwinkel bildet, als mit der anstossenden kleineren Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 257.

3) Aufgaben über die achsig- und zentrisch-symmetrischen Vierecke: Rhombus, Rechteck, Quadrat.

(Zu Abschnitt C 2 b δ.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 279. Die Aufgaben 169 und 170 sollen unter Anwendung des Rhombus wiederholt werden.

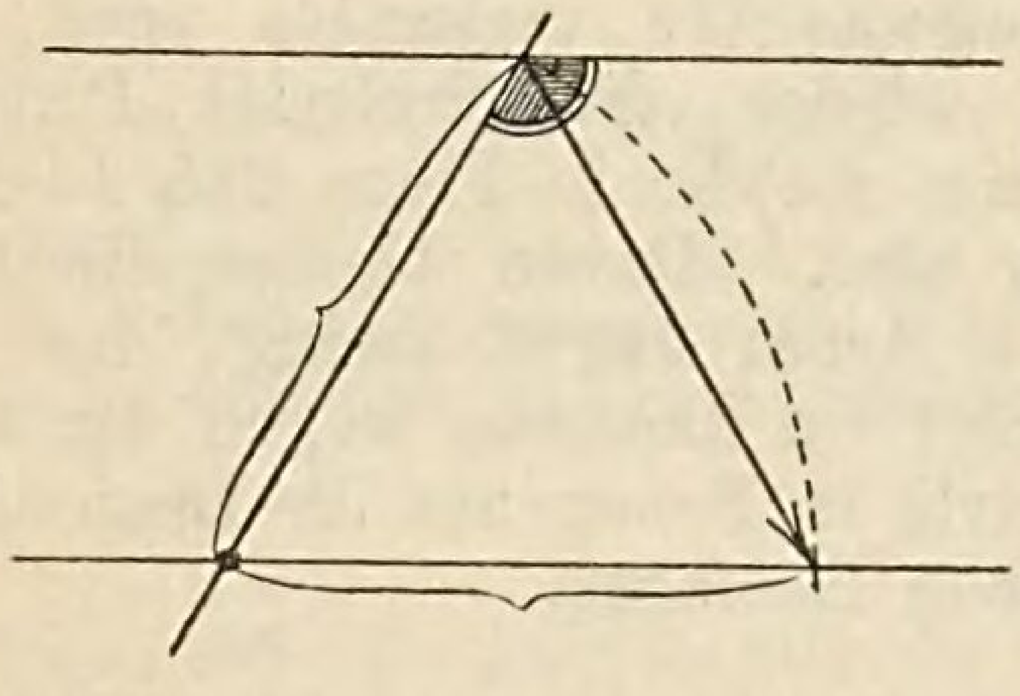
Erkl. 666. Die nebenstehende Ausführung ist diejenige, welche in Erkl. 579 und 598 als die praktisch einfachste angeführt wurde. Sie wird immer dann mit Vorteil anzuwenden sein, wenn nicht wegen Beschränkung der Raumverhältnisse oder behufs der Verminderung von Verwirrung der Figur durch allzuviele Linien auf engem Raume zu dem Verfahren mit ungleichen Radien gegriffen wird.

Auflösung. Um einen gegebenen Winkel zu halbieren, betrachtet man denselben als Winkel eines Rhombus, trägt auf den Schenkeln die zwei gleichen Seiten des Rhombus ab, und beschreibt um deren Endpunkte mit gleichem Radius Kreisbögen, welche die vierte Rhombusecke liefern. Dann halbiert die Diagonale beide Winkel.

Um auf einer gegebenen Strecke die Mittelsenkrechte zu errichten, betrachtet man dieselbe als Diagonale eines Rhombus, und konstruiert durch je zwei Kreisbögen mit gleichem Radius um die Eckpunkte die andern beiden Rhombusecken. Dann ist die zweite Diagonale Mittelsenkrechte der ersten.

Aufgabe 280. Man soll den Winkel halbieren, welchen eine durch zwei Parallelen gelegte Transversale mit einer derselben bildet.

Figur 298.



Erkl. 667. Die nebenstehende Betrachtung könnte auch gegründet werden auf die Aufgabe 136 und Figur 110 im zweiten Teile dieses Lehrbuches. Dieselbe findet Anwendung besonders für Winkelhalbierungen in solchen Figuren, bei welchen ein Winkel der einen von zwei Parallelen mit einer Transversalen auftritt, also bei den Winkeln eines Trapezes, Parallelogramms u. s. w. Dementsprechend ist auch in Satz 77 von den Winkelhalbierenden des Trapezes dasselbe ausgesagt, was von den Diagonalen des Rhombus gilt.

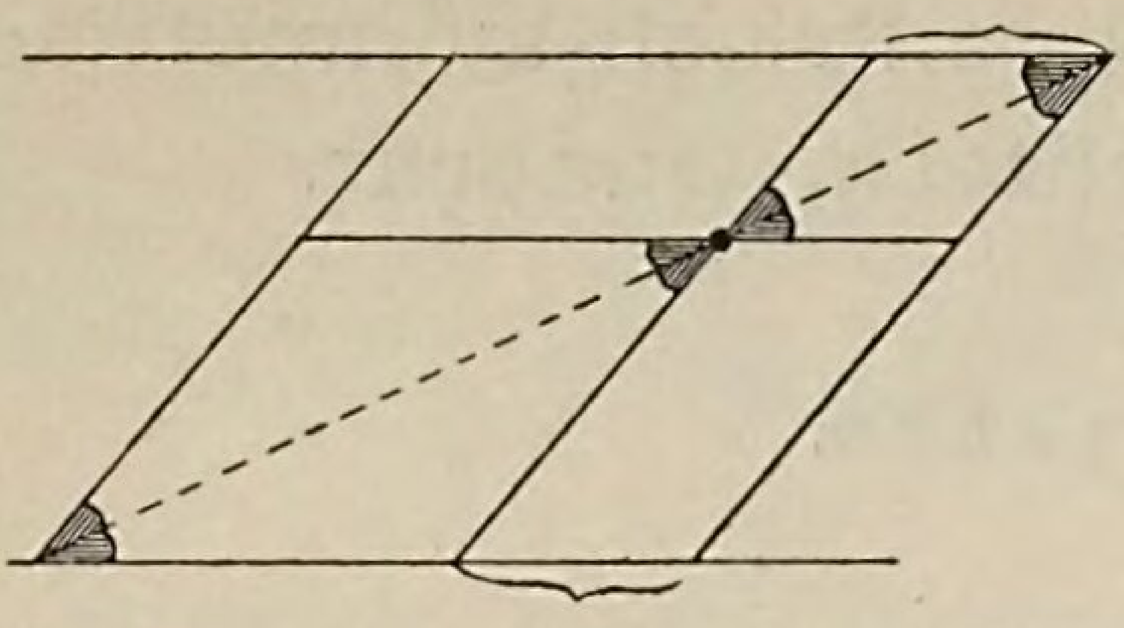
Auflösung. Betrachtet man die Transversale (siehe Figur 298) als eine Rhombusseite und die Parallelen als Seitenrichtungen, so wird die Halbierungslinie des Winkels zur Diagonale des Rhombus vom Winkelscheitel zur Gegenecke. Diese Gegenecke erhält man aber durch Abtragung der Transversalenstrecke auf derjenigen Parallelen, welche nicht selbst Winkelschenkel ist.

Man erhält daher die Richtung der Winkelhalbierenden, wenn man mit dem Zirkel einsetzt im Schnittpunkt der Transversalen mit derjenigen Parallelen, welche nicht Winkelschenkel ist, und auf dieser die Strecke der Transversalen abträgt.

Aufgabe 281. Man konstruiere durch einen beliebigen Punkt auf der Diagonalen eines Rhombus Parallelen zu dessen Seiten und untersuche die dadurch entstehenden Figuren.

Auflösung. Um eine erste beliebige Parallele zu einer Rhombusseite zu erhalten,

Figur 299.



Erkl. 668. Da auch am Diagonalenpunkte die Winkel halbiert werden, so sind auch die beiden Parallelen achsig-symmetrisch in Bezug auf die Diagonale als Achse und ebenso ihre auf den Rhombusseiten abgeschnittenen Strecken. Daher kann die zweite Parallele durch denselben Diagonalenpunkt auch auf die gleiche Weise konstruiert werden, wie in nebenstehender Auflösung die erste, dass man nämlich dieselbe Strecke auch auf den zwei anderen Gegenseiten von den Eckpunkten einer durchschneidenden Seite aus abträgt.

Umgekehrt lässt sich aus Vorigem ablesen, dass wenn man auf je zwei Gegenseiten eines Rhombus von den Endpunkten einer anderen Seite aus gleiche Strecken abträgt und deren Endpunkte verbindet, dann die Verbindungslinien einander auf einer Diagonale treffen und aufeinander dieselben Teilstrecken wie auf den Seiten abschneiden.

kann man auf den Gegenseiten von den Endpunkten der gleichen anstossenden Seite gleiche Strecken abtragen. Zieht man durch den Diagonalenpunkt auch die zweite Parallele, so entstehen vier Vierecke, alle Parallelogramme, von denen noch zwei die Diagonale des Rhombus zur Diagonale haben. Da aber in diesen beiden die Einzelwinkel am Diagonalenpunkt als innere Wechselwinkel gleich sind den gleichen Winkelhälften in den Rhombusecken, so sind dies zwei Parallelogramme, in welchen eine Diagonale beide Winkel halbiert, also ebenfalls jedes ein Rhombus, achsig-symmetrisch zu der benutzten Diagonale. Zu derselben Diagonale sind aber infolge dessen auch die beiden andern Parallelogramme achsig-symmetrisch; also haben von den vier Vierecken die zwei von der Diagonale durchschnittenen Rhomben die gleichen Winkel, wie das gegebene, und die Seitensumme gleich der Seite des gegebenen, also den gleichen Gesamtumfang, wie das gegebene allein. Die beiden andern sind kongruente Parallelogramme, ebenfalls mit gleichen Winkeln wie das Rhombus.

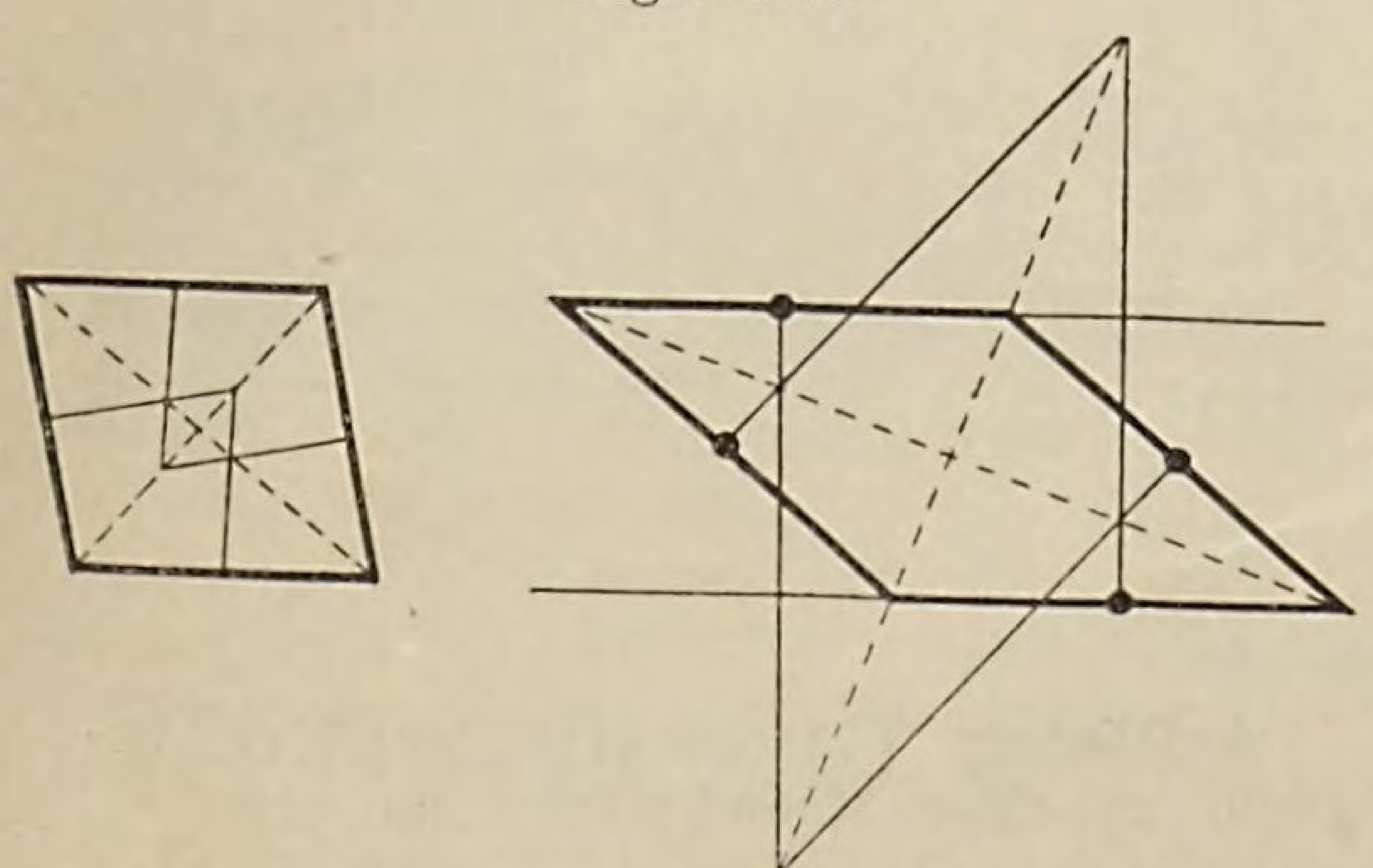
Aufgabe 282. Was wird aus den in Aufgabe 246 betrachteten Figuren, wenn dieselben beim Rhombus ausgeführt werden?

Erkl. 669. Das in Figur 284 entstehende Achteck im Innern des Parallelogramms erhält beim Rhombus ausser der zentrischen Symmetrie auch die achsige in Bezug auf die beiden Rhombusdiagonalen, und hat daher nur noch zweierlei verschiedene Seitenlängen, anstossend beiderseits an die Rhombusdiagonalen als Symmetrieachsen.

Auflösung. Wenn beim Rhombus jede Seitenmitte mit den beiden Endpunkten der Gegenseite verbunden wird, so entstehen wieder die dreierlei Parallelogramme, welche in Figur 285 I—III dargestellt sind. Davon bleiben die beiden ersten Arten ungleichseitig, das letztere aber wird ein Rhombus wegen der achsigen Symmetrie in Bezug auf die Diagonalen des gegebenen Rhombus.

Aufgabe 283. Man soll das Vierseit der Mittelsenkrechten des Rhombus konstruieren und untersuchen.

Figur 300.



Auflösung. Da die benachbarten Seiten des Rhombus (siehe Figur 300) gleich sind, so fallen beim Umklappen um eine Diagonale diese Seiten aufeinander und ebenso ihre Mittelpunkte und Mittelsenkrechten. Daher bilden letztere mit je zwei Rhombusseiten ein Deltoid und schneiden einander auf den Diagonalen selbst. Das von ihnen gebildete Viereck muss also wieder ein Rhombus sein, und dessen Diagonalen fallen zusammen mit den Diagonalen des ursprünglichen Rhombus.

Die Lage dieses neuen Rhombus in Bezug zum ursprünglichen ist abhängig von der Grösse der Winkel des gegebenen Rhombus. Vergl. die beiden in Figur 300 dargestellten

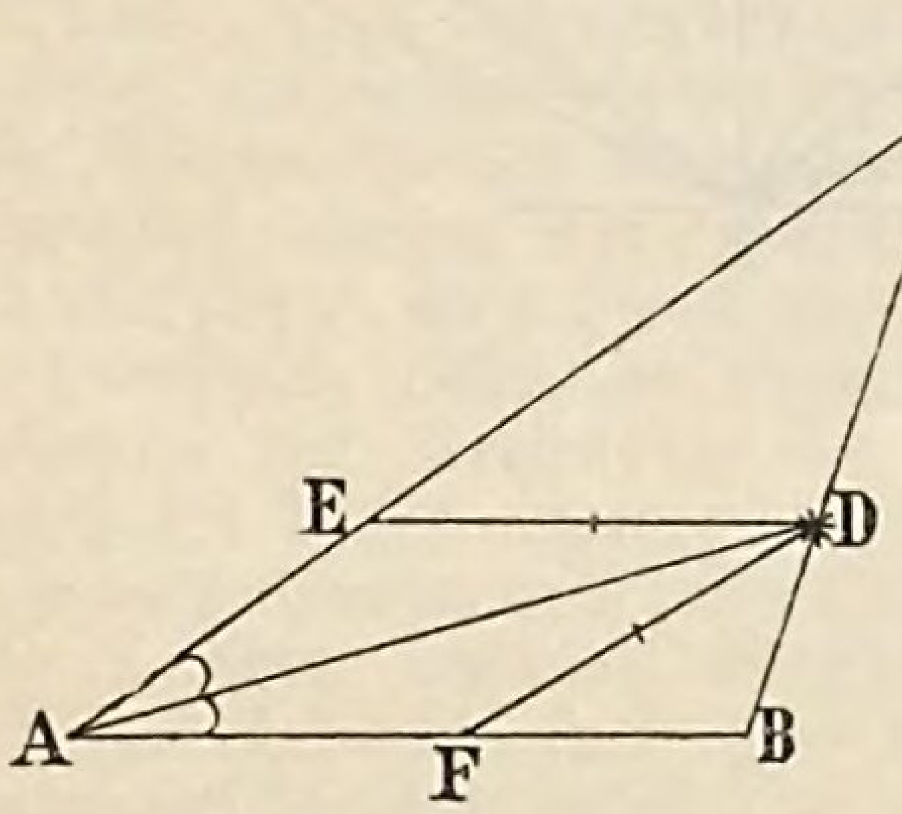
Erkl. 670. Während beim Parallelogramm die Diagonalen des Vierseits der Mittelsenkrechten zwar Mittelsenkrechte waren auf den Parallelogrammsdiagonalen, aber ebendeswegen nicht jeweils mit der zweiten derselben zusammenfallen konnten, ist jetzt beim Rhombus eben dessen zweite Diagonale Mittelsenkrechte der ersten, so dass die Diagonalen der beiden Rhomben zusammenfallen müssen.

Beim Rechteck fallen die Mittelsenkrechten in die Mittelparallele und schneiden sich im Mittelpunkt; also wird beim Rechteck das Vierseit der Mittelsenkrechten zu einem einzigen Punkte.

Fälle: Im einen Rhombus, dessen Winkel sich nicht sehr vom Rechten unterscheiden, bleibt das Vierseit der Mittelsenkrechten ganz im Innern. Bei dem zweiten Rhombus mit einem sehr spitzen und einem sehr stumpfen Winkel durchschneidet dieses Rhombus die Seiten des gegebenen.

Aufgabe 284. Welcher Punkt einer Dreiecksseite hat die Eigenschaft, dass auf den Parallelen von ihm aus zu den andern Seiten durch diese selbst gleiche Stücke abgeschnitten werden?

Figur 301.



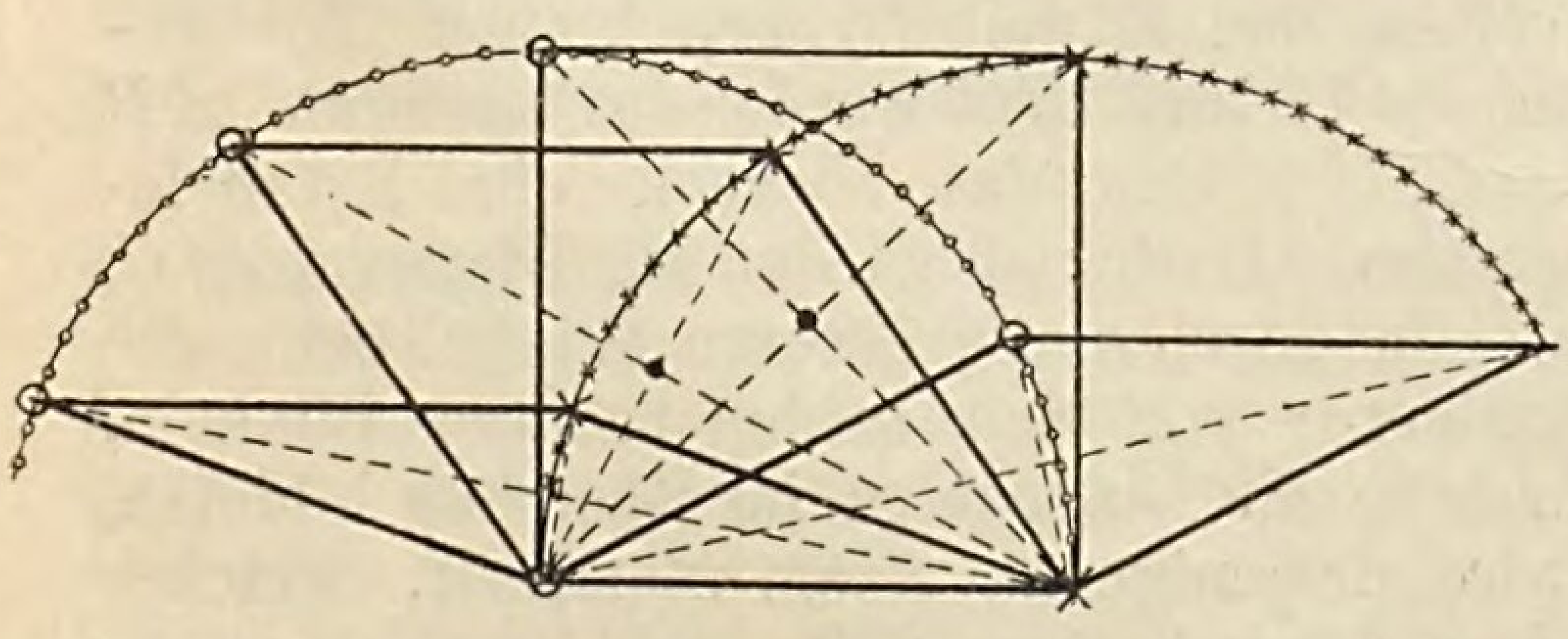
Erkl. 671. Die zweite und dritte Winkelhalbierende schneidet ihre Gegenseiten in anderen Punkten als E und F. Denn nur beim gleichschenkligen Dreieck haben die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden die Eigenschaft, dass ihre Verbindungslinie zur Grundseite parallel ist.

Auflösung. Wenn der gesuchte Punkt D auf der Seite BC die Eigenschaft haben soll, dass $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ und $DE = DF$ sein soll, so muss nach Satz 32 auch $DE \# AF$, $DF \# AE$ sein, also $AF = FD = DE = EA$. Es muss also das Viereck $AFDE$ ein Rhombus sein, folglich AD die Halbierungslinie des Winkels α.

Der gesuchte Punkt ist also der Schnittpunkt einer Dreiecksseite mit der Winkelhalbierenden ihres Gegenwinkels.

Aufgabe 285. Man denke sich die Seiten eines Rhombus als Stäbe und ihre vier Ecken durch Gelenke verbunden. Welche Veränderungen erfährt diese Figur, wenn man den Winkel zweier Seiten ändert?

Figur 302.



Erkl. 672. Bei der nebenstehenden Bewegung beschreibt jeder freie Eckpunkt des

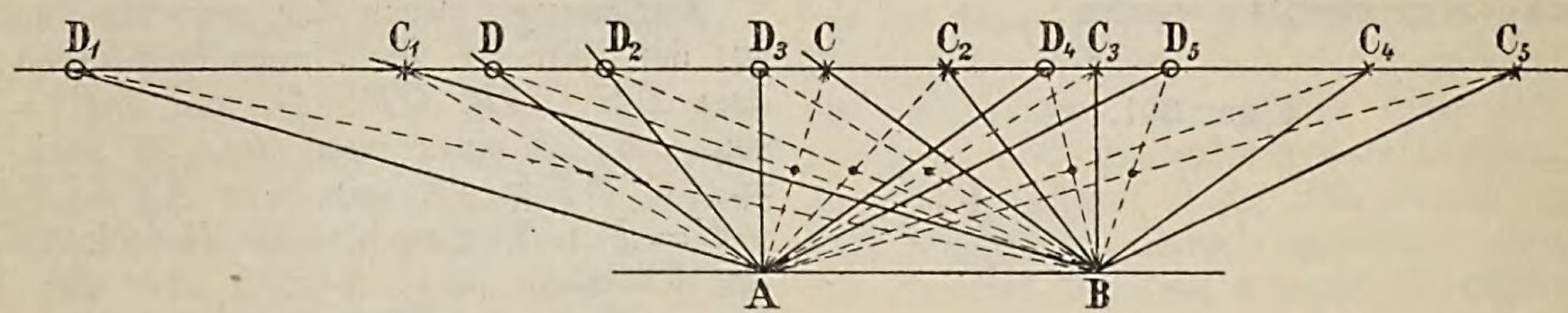
Auflösung. Durch die feste Verbindung der vier Eckpunkte wird bewirkt, dass das von diesen Stäben gebildete Viereck stets vier gleiche Seiten behält, also stets ein Rhombus bleibt. Wird also ein spitzer Winkel vergrössert, so müssen seine beiden benachbarten stumpf sein und kleiner werden, seine zugehörige Diagonale wird kleiner, die andere, welche stets noch kleiner ist als die erstere, wird grösser. Der Winkel beider Diagonalen aber bleibt immer ein rechter, die Gegenseite der festen Seite stets dieser parallel. Ist der veränderliche Winkel selbst ein rechter geworden, so ist der benachbarte ebenfalls ein rechter, das Viereck ist ein

Rhombus einen Halbkreis um den mit ihm verbundenen festen Punkt; es wird sich später herausstellen, dass der Schnittpunkt beider Diagonalen ebenfalls einen Halbkreis beschreibt, und zwar über der festbleibenden Seite als Durchmesser.

Erkl. 673. Praktische Beispiele nebenstehender Anordnung findet man häufig, z. B. bei dem „Schere“ genannten Kinderspielzeug, beim sog. „Wattschen Parallelogramm“ bei Dampfmaschinen und bei sonstigen Maschinenteilen. Man kann auch die Diagonalen als Stäbe anbringen, welche an den festen Punkten eingelenkt sind, an deren Gegenecken durch Löcher laufen, und so sich dort bei Verlängerung und Verkürzung durchschieben können.

Quadrat, beide Diagonalen gleichgross. Bei weiterem Wachsen des veränderlichen Winkels nimmt der benachbarte Winkel weiter ab, wird also spitz, die zugehörige Diagonale des veränderlichen Winkels ist jetzt kleiner geworden, als die andere, und nimmt immer weiter ab, während die zweite immer weiter zunimmt. Der Grenzwert für den wachsenden Winkel ist 180°. Dabei würde die zugehörige Diagonale Null, die andere gleich der doppelten Seitenlänge, der benachbarte Winkel Null.

Figur 303.



Aufgabe 286. Man denke sich die Seiten eines Rhombus als Stäbe und in der Weise verbunden, dass an den Eckpunkten einer von zwei festbleibenden Gegenseiten (A und B in Fig. 303) Drehgelenke, an denen der andern (C und D) Laufgelenke je für das andere Paar Gegenseiten angebracht sind. Welche Veränderungen erfährt diese Figur, wenn unter Beibehaltung gleicher Gegenseiten AB und CD der Winkel zweier Seiten geändert wird?

Erkl. 674. Bei der nebenstehenden Bewegung durchläuft jeder freie Eckpunkt des Rhombus die zur festen Seite parallele Gegenseite. Da auf dieser parallelen Gegenseite stets gleichgrosse Gegenseiten sich befinden sollen, so muss nach Satz 32c auch das andere Gegenseitenpaar stets parallel bleiben, also das ganze Viereck stets ein Parallelogramm bleiben. Dasselbe Ergebnis hätte auch erreicht werden können anstatt durch Beibehaltung gleicher Gegenseiten AB und CD durch Beibehaltung paralleler Gegenseiten $AD \parallel BC$. Jedenfalls ist $ABCD$ ständig ein Parallelogramm, also der Schnittpunkt der Diagonalen stets der gemeinsame Mittelpunkt beider. Da aber der Mittelpunkt einer Transversale durch zwei Parallelen stets auf der Mittelparallelen liegen muss, so durchläuft der Diagonalenschnittpunkt bei der betrachteten Bewegung des Rhombus die Mittelparallele der festen Gegenseiten.

Erkl. 675. Dass der Diagonalenwinkel über der grösseren Seite der grössere sein

Auflösung. Sei das Rhombus $ABCD$ in Figur 303 das gegebene, also der veränderliche Winkel bei A ein stumpfer, dann ist jeder benachbarte Winkel bei B und D ein spitzer, Diagonale $AC \perp BD$, $AC < BD$, der Winkel der Diagonalen über jeder von beiden gleichen Rhombusseiten ist gleichgross, nämlich 90°, der Winkel einer Diagonalen mit ihren beiden anstossenden Rhombusseiten ist ebenfalls der gleiche, da sie die Winkel halbiert.

Wird der veränderliche Winkel bei A noch grösser, so werden die benachbarten Winkel bei B und D noch kleiner, die Seiten AD und BC werden grösser als $AB = C_1D_1$, also das Viereck ein Parallelogramm. Darin ist wieder die Diagonale AC, welche durch den grösseren Winkel geht, die kleinere; von den beiden rechten Winkeln, welche die Diagonalen im Rhombus bildeten, wird derjenige zu einem stumpfen, welcher über der grösseren Seite AD liegt, der über AB wird spitz; die Winkel der Diagonale AC_1 mit den anstossenden Seiten sind nicht

muss, geht hervor aus Betrachtung der beiden Teildreiecke, in welchen eine Parallelogrammhälfte, z. B. ABD durch BD geteilt wird. Bezeichnet man nämlich mit M den Mittelpunkt des Parallelogramms, so haben die Dreiecke AMD und CMD die Seiten $AM = CM$ und $DM = DM$ gemeinsam, folglich muss auch in demjenigen von beiden Dreiecken der eingeschlossene Winkel der grössere sein, worin die Gegenseite desselben die grössere ist, und umgekehrt.

Dass die Diagonale mit der grösseren Seite den kleineren Teilwinkel bildet, geht hervor aus Betrachtung des Dreiecks ABC. Darin ist BAC der eine Teilwinkel des $\sphericalangle A$, der andere Teilwinkel DAC ist aber als innerer Wechselwinkel im gleichen Dreieck vertreten als $\sphericalangle ACB$. Nun muss der grösseren der beiden Seiten AB und BC auch der grössere Winkel gegenüberliegen, also muss $BAC > BCA$ sein, wenn $BC > AB$ ist; folglich muss auch $BAC \gtrless DAC$ sein, wenn $AD \gtrless AB$ ist, und nur wenn $AD = AB$ ist, wird $\sphericalangle BAC = DAC$, d. h. $\sphericalangle A$ wird halbiert.

Erkl. 676. Auch für die nebenstehende Bewegung lässt sich leicht praktische Anwendung finden bei Maschinenteilen dieser Art, oder auch bei solchen der vorigen Art, wenn noch durch einen „Schlitten" eine geradlinige Führung für die parallelen Schenkel angebracht wird. Doch müssten für Erreichung der Grenzwerte alle Linien der Figur ausser der festen Seite, also beide Gegenseiten und Diagonalen, als unbegrenzte Längen gedacht werden, da nach beiden Seiten nicht wie in voriger Aufgabe 285 ein Grenzpunkt erreicht wird.

mehr gleichgross, sondern der mit der grösseren Seite gebildete Winkel wird kleiner als der mit der kleineren Seite gebildete.

Wird umgekehrt der stumpfe Winkel A des Rhombus $ABCD$ verkleinert, so wird $AD_2 < AD$ und $BC_2 < BC$, während $AB = CD$ gleich bleibt; also entsteht das Parallelogramm ABC_2D_2. In diesem ist immer noch $\sphericalangle A$ stumpf, folglich $\sphericalangle B = \sphericalangle D$ spitz, $AC_2 < BD_2$. Aber es ist jetzt Seite $AB > AD_2$, daher ist der über AB liegende Diagonalenwinkel jetzt stumpf und grösser als sein über der kleinen Seite AD_2 liegender spitze Nebenwinkel. Auch sind die $\sphericalangle BAD_2$ und ABC nicht mehr halbiert, sondern der an der grösseren Seite AB liegende Teilwinkel C_2AB und D_2BA ist kleiner als der mit der kleineren Nachbarseite gebildete Teilwinkel C_2AD_2 und D_2BC_2.

Geht die Verkleinerung des stumpfen Winkels A weiter, bis derselbe ein rechter geworden ist, so wird das Viereck ein Rechteck, beide Diagonalen also gleich. Immer noch ist aber wegen $AB > AD_3$ der Diagonalenwinkel über AB grösser als über AD_3, dagegen der Winkel der Diagonalen mit AB kleiner, als der mit AD_3 und BC_3, nämlich $D_3AC_3 > BAC_3$ und $ABD_3 < D_3BC_3$.

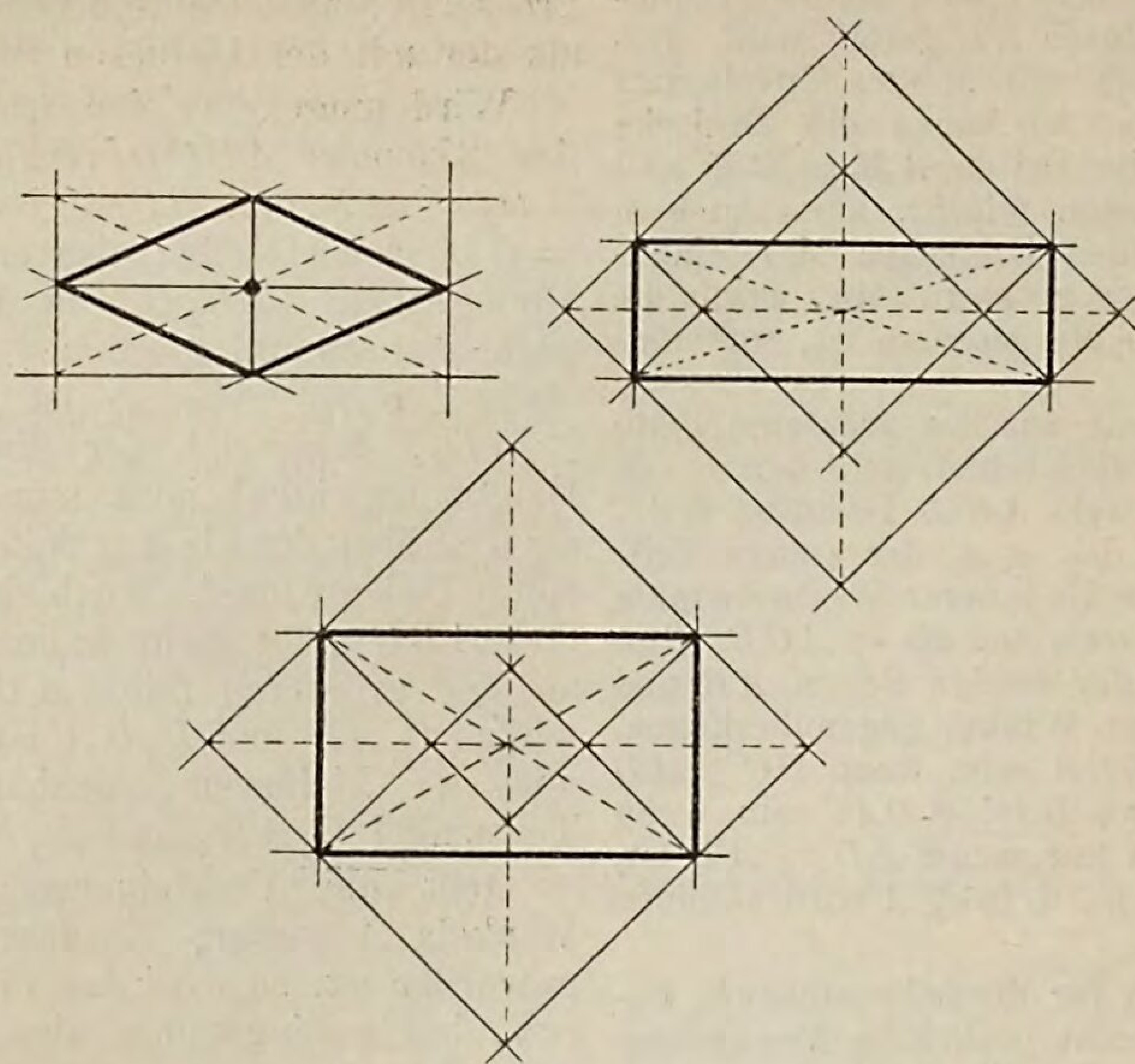
Wird der veränderliche Winkel A kleiner als ein rechter, so wiederholen sich die Figurenverhältnisse der vorhergehenden Gestalt, nur in achsig-symmetrischer, also ungleichwendiger Lage. Es entsteht auch wieder ein Rhombus ABC_4D_4 mit gleichen Seiten und folglich gleichen Winkeln zwischen den Diagonalen unter sich, über den gleichen Seiten, und mit den beiderseits gleichen anstossenden Seiten. Geht die Verkleinerung des Winkels A über diese Lage hinaus, so geht die Verlängerung von Seiten und Diagonalen ins Unbegrenzte fort, es ist stets über der grösseren Parallelogrammseite der grössere Diagonalenwinkel und ihr anliegend der kleinere Winkel.

Aufgabe 287. Was wird aus der in Aufgabe 246 betrachteten Figur, wenn dieselbe beim Rechteck ausgeführt wird?

Erkl. 677. Das in Figur 284 entstehende Achteck im Innern des Parallelogramms erhält beim Rechteck ausser der zentrischen Symmetrie auch die achsige in Bezug auf die Mittelparallelen des Rechtecks, und hat daher nur noch zweierlei verschiedene Seitenlängen anstossend beiderseits an die Mittelparallelen des Rechtecks als Symmetrieachsen.

Auflösung. Wenn beim Rechteck jede Seitenmitte mit den beiden Eckpunkten der Gegenseite verbunden wird, so entstehen wieder die dreierlei Parallelogramme, welche in Figur 285 I—III dargestellt sind. Davon bleiben diejenigen der ersten und dritten Art ungleichseitig, die beiden der zweiten Art aber werden je ein Rhombus wegen der achsigen Symmetrie in Bezug auf die Mittelparallelen des gegebenen Rechtecks.

Figur 304.



Aufgabe 288. Man soll das Vierseit der Winkelhalbierenden der Innen- und Aussenwinkel des Rhombus und des Rechtecks konstruieren und untersuchen.

Erkl. 678. Das Vierseit der Innenwinkelhalbierenden des Rhombus hat nach Nebenstehendem dieselbe Eigenschaft, wie dasjenige der Mittelsenkrechten des Rechtecks, dass nämlich alle vier Geraden durch einen Punkt gehen.

Erkl. 679. Während die Diagonalen des Quadrats der Innen- und Aussenwinkelhalbierenden des Rechtecks mit den Mittelparallelen des gegebenen Rechtecks zusammenfallen, trifft dies nicht zu für die Mittelparallelen des Quadrats und Diagonalen des Rechtecks. Vielmehr halbieren die Mittelparallelen des Quadrats die Winkel seiner Diagonalen, bilden also mit beiden Rechtecksseiten gleichgrosse Winkel, während dessen Diagonalen mit der grösseren Seite einen kleineren, mit der kleineren Seite einen grösseren Winkel bilden.

Erkl. 680. Für das Rechteck der Aussenwinkelhalbierenden des Rhombus ist das ursprüngliche Rhombus das Viereck der Seitenmitten (siehe Frage 190). Für das gegebene Rhombus ist das Rechteck der Aussenwinkelhalbierenden zugleich das Vierseit der Parallelen zu den Diagonalen durch die Eckpunkte (siehe die folgende Aufgabe 289).

Auflösung. Das Vierseit der Innenwinkelhalbierenden bildet, wie schon in Antwort der Frage 189 gefunden wurde, beim Rhombus einen Punkt, nämlich den Schnittpunkt der Diagonalen und Mittelparallelen, beim Rechteck ein Quadrat, dessen Diagonalen die Mittelparallelen des Rechtecks sind (siehe Figur 304). Die Lage dieses Quadrats in Bezug zum ursprünglichen Rechteck ist abhängig von dem Grössenverhältnis der beiden Seiten des gegebenen Rechtecks.

Die Halbierungslinien der Aussenwinkel stehen beim Rhombus senkrecht auf den Diagonalen, bilden also zusammen ein Rechteck und mit den Hälften der Rhombusdiagonalen vier kleine Rechtecke, deren Diagonalen mit denen des grossen zusammenfallen und durch den Mittelpunkt des Rhombus gehen, und dessen Seiten als zweite Diagonalen halbieren. Daher sind die Diagonalen des Rechtecks der Aussenwinkelhalbierenden die Mittelparallelen des Rhombus, die Mittelparallelen des Rechtecks die Diagonalen des Rhombus. Die Seitenlängen des Rechtecks sind die Diagonalenlängen des Rhombus.

Die Halbierungslinien der Aussenwinkel beim Rechteck stehen senkrecht auf den Innenwinkelhalbierenden, bilden also wie diese ein Viereck mit rechten Winkeln. Da dasselbe aber seine Eckpunkte auf den Mittel-

parallelen des gegebenen Rechtecks hat, also senkrechte Diagonalen besitzt, so ist dasselbe ebenfalls ein Quadrat mit gleichem Mittelpunkt, gleichen Diagonalen und Mittelparallelen, und parallelen Seiten mit jenen des vorigen.

Aufgabe 289. Welche Figuren entstehen, wenn man beim Rhombus und Rechteck durch die Eckpunkte Parallelen zu den Diagonalen zieht und dies Verfahren fortsetzt?

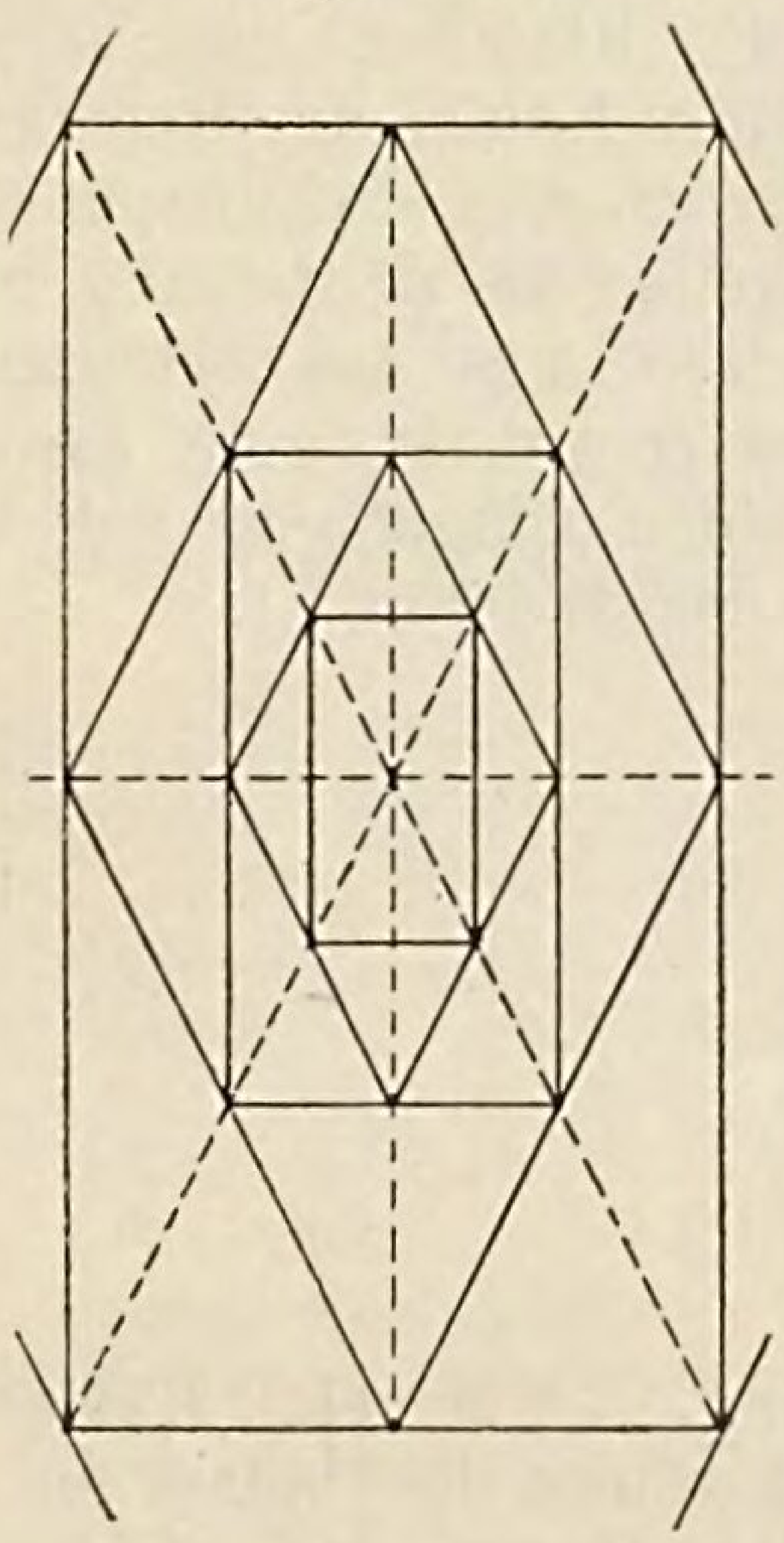
Auflösung. Wenn beim Rhombus durch jede Ecke die Parallele zur anderen Diagonale gezogen wird, so entsteht eine Senkrechte zur zugehörigen Diagonale, weil die Diagonalen senkrecht stehen. Zugleich halbiert diese Senkrechte den Aussenwinkel, weil die andere senkrechte Diagonale den Innenwinkel halbiert. Die vier Parallelen bilden also das schon in voriger Aufgabe 288 betrachtete Rechteck.

Wenn beim Rechteck durch jede Ecke die Parallele zur anderen Diagonale gezogen wird, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Seiten jeweils den dazu parallelen Rechtecksdiagonalen nach Satz 32 gleich sind. Da aber beide Diagonalen des Rechtecks gleichgross sind, so ist das Parallelogramm ein Rhombus.

Man erhält also durch die Parallelen zu den Diagonalen des Rhombus ein Rechteck, durch die Parallelen zu dessen Diagonalen ein Rhombus, dann wieder ein Rechteck, wieder ein Rhombus u. s. f.

Jedes folgende Rhombus hat doppelt so grosse Längen wie das vorhergehende Rhombus, jedes folgende Rechteck doppelt so grosse, wie das vorhergehende Rechteck, nämlich jeweils parallele und doppelte Seiten, Diagonalen, Mittelparallelen u. s. w.

Figur 305.



Erkl. 681. Die Figur 305 stimmt mit Figur 289 überein, wenn in jener das innerste Parallelogramm zu einem Rechteck wird. Während in Figur 289 alle Parallelen ganz ausgezogen sind, und dadurch die Teilung der gesamten Ebene in Einzeldreiecke mehr hervortritt, ist bei Figur 305 nur jede Seite eines Vierecks ausgezogen, so dass die Bildung der Rechtecke und Rhomben mehr hervortritt.

Erkl. 682. Dieselbe Figur 305 würde auch entstehen, wenn man von dem grössten Rhombus das Viereck der Seitenmitten bildet, von diesem wieder das Viereck der Seitenmitten u. s. f., — man erhält der Reihe nach abwechselnd immer ein Rechteck und ein Rhombus.

Jedes folgende Rechteck hat halbsogrosse Längen, wie das vorhergehende Rechteck, jedes folgende Rhombus halbsogrosse als das vorhergehende Rhombus, nämlich jeweils parallele und halbsogrosse Seiten, Diagonalen, Mittelparallelen u. s. f.

Es ist derselbe Zusammenhang der auf- bezw. absteigenden Reihe, als wenn im Dreieck die Parallelen zu den Gegenseiten oder die Verbindungslinien der Seitenmitten fortgesetzt gezogen werden.

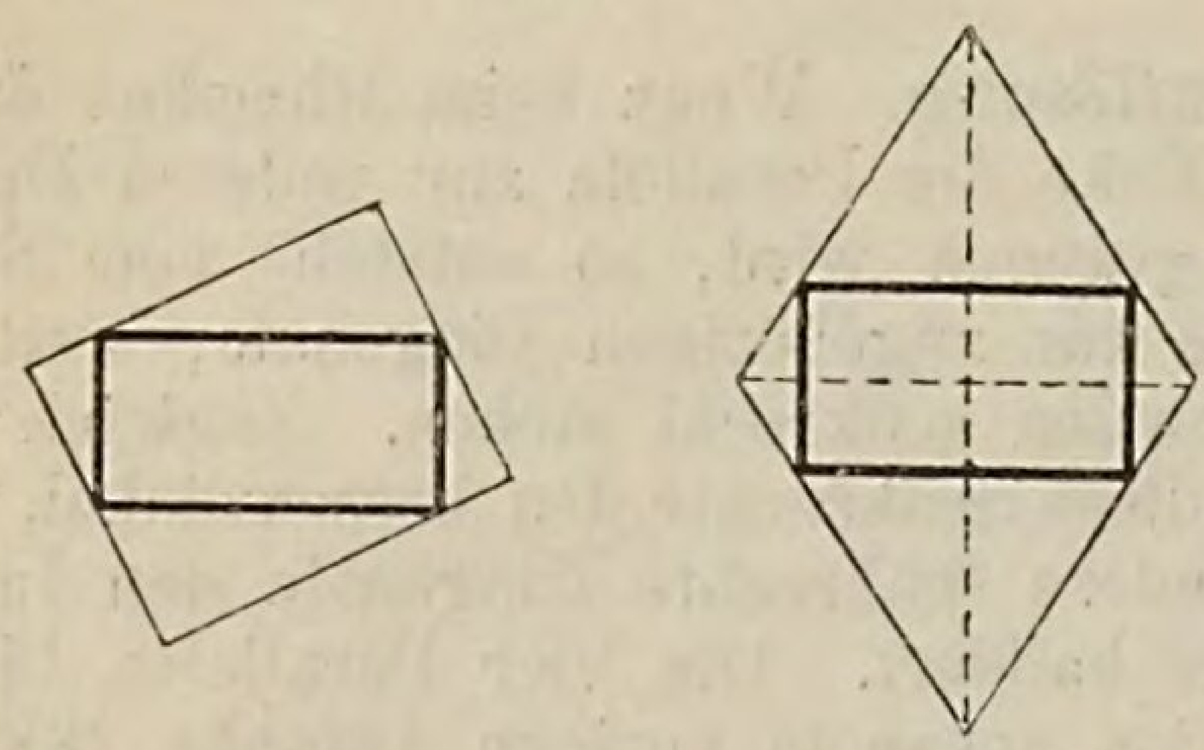
Aufgabe 290. Man soll einem gegebenen Rechteck:

a) wieder ein Rechteck,

b) ein Rhombus

umschreiben, von dem eine Seitenrichtung gegeben ist.

Figur 306.



Erkl. 683. Die nebenstehende Auflösung ebenso wie die der folgenden Aufgaben zeichnet sich dadurch aus, dass sie mit Benützung des Lineals allein ausgeführt werden kann. Das Einschreiben von Figuren in andere kann auch unter Wiederholung der Auflösungen der Aufgaben 251 (und 252) geschehen.

Auflösung. Um einem Rechteck ein ebensolches umzuschreiben, braucht man nur durch die Gegenecke der ersten Ecke eine Parallele und durch die beiden anderen Gegenecken Senkrechte zu derselben gegebenen Seite zu zeichnen.

Um ein Rhombus umzuschreiben benutze man die Symmetrieachsen des Rechtecks als Achsen des Rhombus, wähle also die Schnittpunkte derselben mit der gegebenen Seite als Ecken des Rhombus, und verbinde diese mit den andern Ecken des Rechtecks. Dann entsteht als zweiter Schnittpunkt mit den Achsen jeweils die dritte und vierte Ecke des Rhombus. Dass das erhaltene Viereck ein Rhombus sein muss, geht daraus hervor, dass von seinen Diagonalen jede die Mittelsenkrechte der anderen ist.

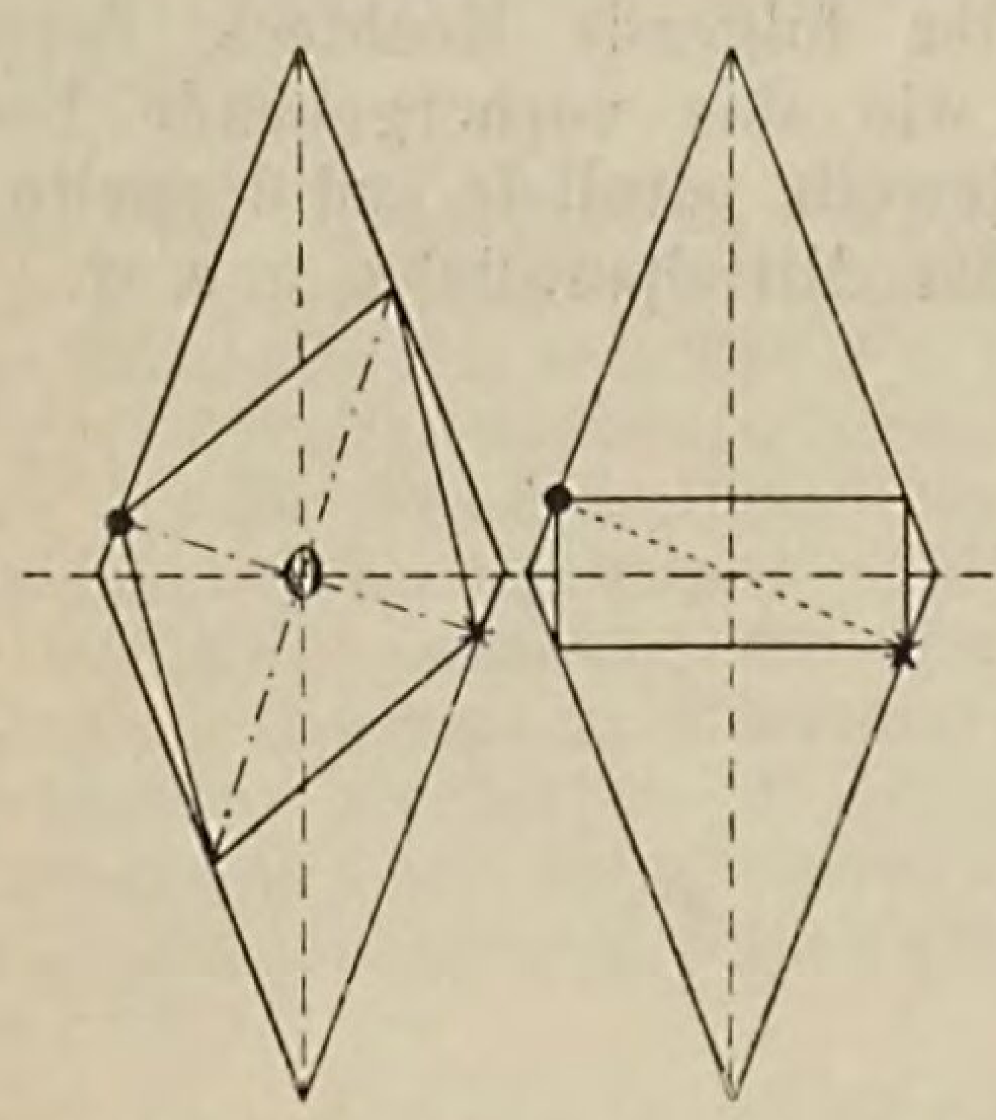
Aufgabe 291. Man soll einem gegebenen Rhombus:

a) wieder ein Rhombus,

b) ein Rechteck

einschreiben, von welchem ein Eckpunkt gegeben ist.

Figur 307.



Erkl. 684. Ein Punkt auf der Gegenseite, welcher in gleicher Umlaufsrichtung gleichen Abstand von der entsprechenden Ecke hat, kann auch erhalten werden als Schnittpunkt der Zentralen durch den ersten Punkt mit dieser Gegenseite.

Sowohl für ein eingeschriebenes Rhombus als Rechteck hat der gegebene Eckpunkt denselben Punkt als Gegenecke. Die beiden anderen Eckpunkte aber liegen verschieden.

Auflösung. Um ein Rhombus einzuschreiben, hat man im Umlauf um das Rhombus auf der Gegenseite einen Punkt im gleichen Abstand vom Anfangspunkt zu bestimmen, und auf der Verbindungslinie beider im Mittelpunkt eine Senkrechte zu errichten. Diese schneidet die beiden anderen Gegenseiten in zwei Punkten, die mit den ersten beiden ein Rhombus bilden. Denn von den Diagonalen des von ihnen gebildeten Vierecks ist jede die Mittelsenkrechte der anderen.

Um ein Rechteck einzuschreiben, hat man von einer benachbarten Ecke und deren Gegenecke aus auf den anstossenden Seiten den gleichen Abstand zwischen jener Ecke und dem gegebenen Punkte abzutragen. Dann entstehen vier zu den Rhombusdiagonalen achsig-symmetrische Punkte, und diese bilden ein Rechteck.

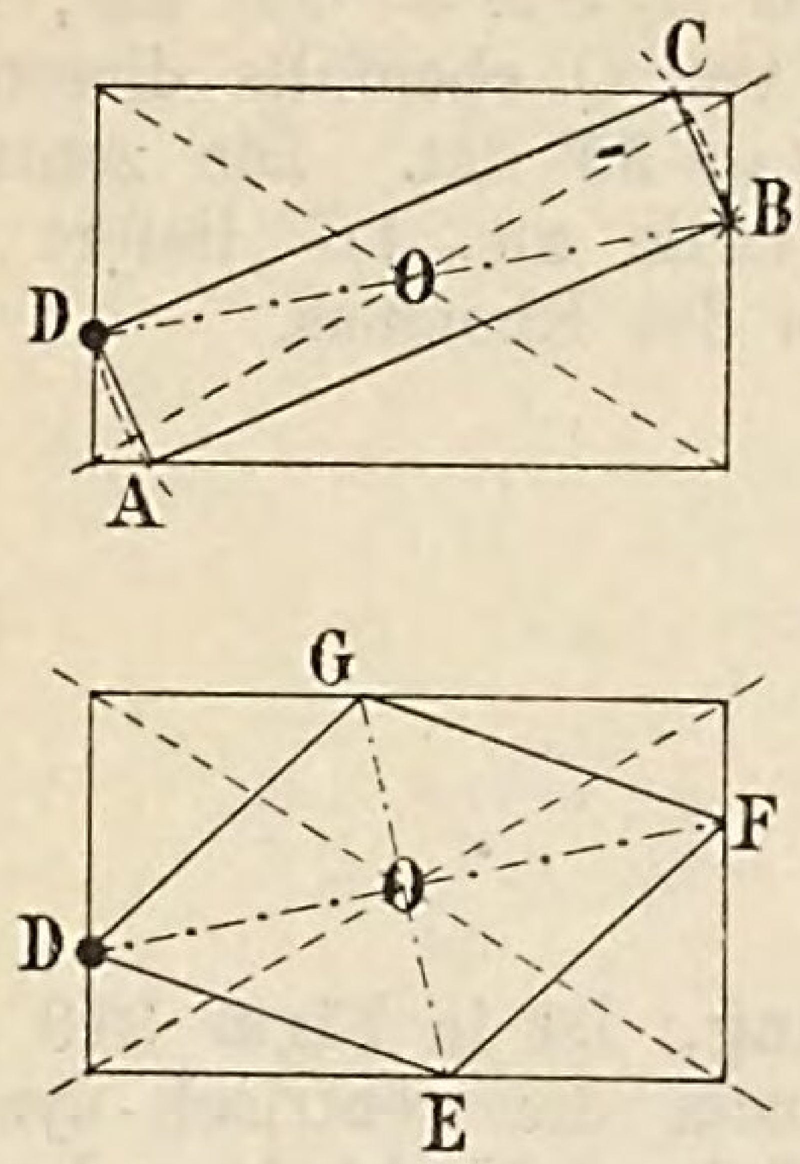
Aufgabe 292. Man soll einem gegebenen Rechteck:

a) wieder ein Rechteck,

b) ein Rhombus

einschreiben, von welchem eine Ecke gegeben ist.

Figur 308.



Auflösung. Wenn eine Ecke (D in Figur 308) des einzuschreibenden Vierecks gegeben ist, so muss der zentrischen Symmetrie wegen die Gegenecke (B bezw. F) auf der Gegenseite durch die Zentrale des andern Eckpunktes D ausgeschnitten werden. Um alsdann den dritten und vierten Punkt eines Rhombus zu erhalten, errichtet man auf dieser Zentralen die Mittelsenkrechte; um den dritten und vierten Eckpunkt eines Rechtecks zu erhalten, benutzt man Satz 89a bezw. 60, sucht also mittels des Zirkels auf den andern Gegenseiten je einen Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkt gleich der Hälfte der Zentralen ist. Diese beiden liefern mit der vorigen ein Viereck mit gleichlangen einander halbierenden Diagonalen, also ein Rechteck.

Erkl. 685. Dass $ABCD$ ein Rechteck ist, geht nach Satz 60 daraus hervor, dass die Strecken $OA = OB = OC = OD$ sind. Folglich müssen sowohl die Winkel bei A und C über der Hypotenuse DB rechte sein, als auch die Winkel bei B und D über der Hypotenuse AC.

Dass $DEFG$ ein Rhombus ist, geht daraus hervor, dass $GO = EO \perp OD = OF$ ist, also $DEFG$ ein Viereck, in welchem jede Diagonale Mittelsenkrechte der andern ist.

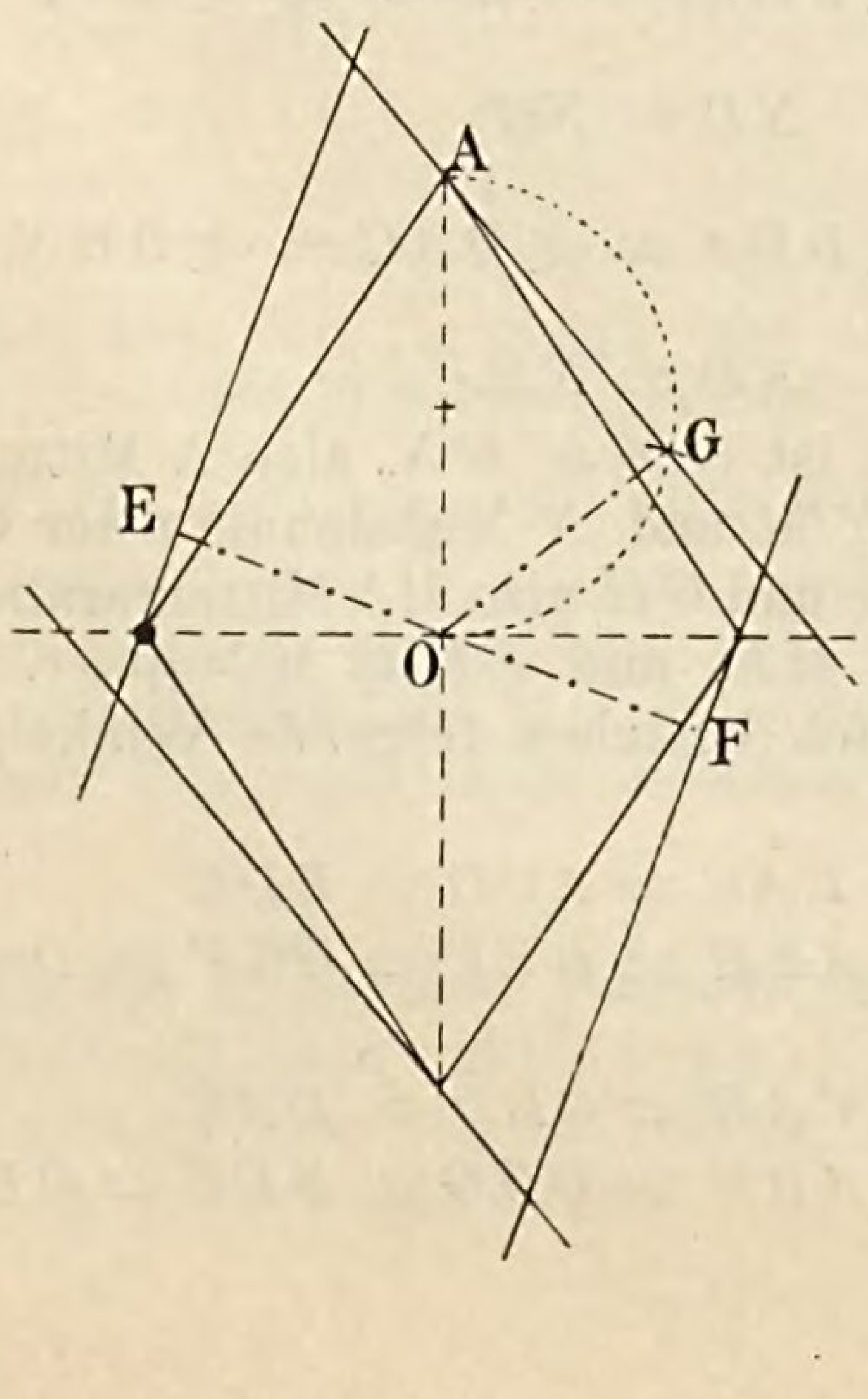
Aufgabe 293. Man soll einem gegebenen Rhombus:

a) wieder ein Rhombus,

b) ein Rechteck

umschreiben, von welchem eine Seitenrichtung gegeben ist.

Figur 309.



Auflösung. Die zweite dieser Aufgaben ist sehr einfach aus Figur 308 zu entnehmen. Ist nämlich $DEFG$ das gegebene Rhombus und die Rechteckseite durch D gegeben, so hat man nur durch F die Parallele und durch E und G die Senkrechten dazu zu konstruieren, um das Rechteck zu erhalten.

Um dagegen ein Rhombus umzuschreiben, kann man folgendermassen verfahren (siehe Fig. 309):

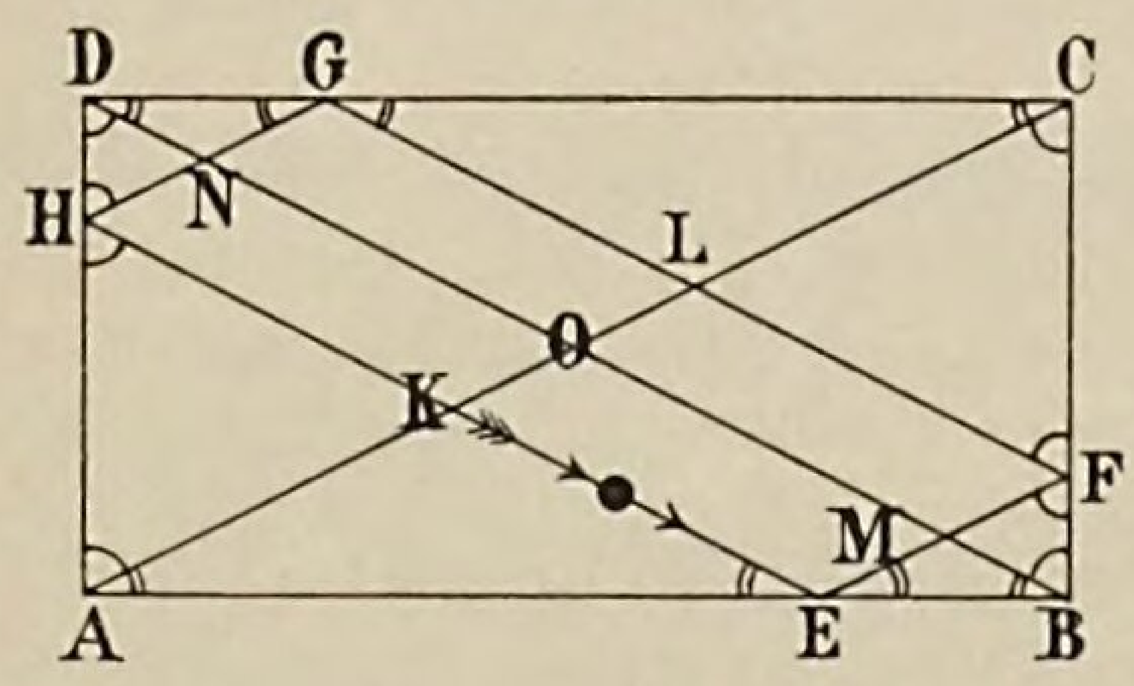
Die Gegenseite zur gegebenen Rhombusseite geht jedenfalls durch die Gegenecke parallel zur vorgeschriebenen. Da man dadurch den Abstand der noch unbekannten Parallelen ebenfalls erhält, und diese durch die übrigen Gegenecken des gegebenen Rhombus gehen müssen, so bildet der Mittelpunkt O mit einer dieser Ecken A und dem senkrechten Abstand von der durch dieselben gehenden Parallelen ein rechtwinkliges Drei-

Erkl. 686. Das durch die zweite Konstruktion erhaltene Viereck ist entstanden als ein Parallelogramm mit zwei gleichen Höhen. Dass das Rhombus zwei gleiche Höhen hat, ist bekannt. Dass aber auch jedes Parallelogramm ein Rhombus sein muss, welches gleiche Höhen hat, geht aus Aufgabe 257 hervor. Würde eine Höhe kleiner oder grösser sein, als die andere, so müsste nach dieser Aufgabe auch die zugehörige Seite länger oder kürzer sein. Ganz unmittelbar aber lässt sich die Folgerung entnehmen aus den in Figur 297 gezeichneten Dreiecken ADF und ABE. Ist in diesen $BE = DF$, so müssen auch alle andern Seiten gleich sein, insbesondere $AB = AD$, also zwei benachbarte Parallelogrammseiten. Demnach sind alle vier Seiten gleich, und das Viereck ist ein Rhombus.

eck, von welchem man kennt OA als Hypotenuse, und den senkrechten Abstand $OE = OG$ als Kathete. Zeichnet man also über der Hypotenuse OA als Durchmesser den Halbkreis, welcher schon in Satz 60 und Aufgabe 136 benutzt wurde, und sucht auf demselben einen Punkt G, welcher von O den Abstand $OG = OE = OF$ hat, so hat die Linie AG von O ebenfalls diesen Abstand, weil $AGO = 90^0$ ist. Die zentrisch-symmetrische Linie zu AG liefert dann die vierte Seite des Rhombus.

Aufgabe 294. Man durchschneide ein Rechteck durch eine Parallele zu einer Diagonale, zeichne zu dieser die zentrisch-symmetrische Gerade und untersuche das entstehende Viereck.

Figur 310.



Erkl. 687. Vergleicht man die Figur 310 mit der bei Aufgabe 17 erhaltenen Figur 180, so findet man, dass, wenn eine Billardkugel in der Richtung HE an die Billardbande AB gelangt, sie in der Richtung EF weiterläuft bis F, dann abschlägt in der Richtung FG, von dort in der Richtung GH, und so wieder in die Richtung HE gelangt. Es ist also der Linienzug $HEFGH$ ein solcher, auf dem eine in der Linie HE laufende Billardkugel nach Abschlagen an allen vier Banden wieder an ihren vorigen Platz zurückkehrt.

Umgekehrt kann man also sagen, dass wenn eine Billardkugel nach Abschlagen an allen vier Banden wieder an ihren eigenen Platz zurückkehren soll, sie in Richtung parallel einer Diagonale des Billards abgestossen werden muss. Man kann nach dem nebenstehenden Beweise für diesen Fall davon Abstand nehmen, die Konstruktion der sämtlichen Spiegelbilder für die vier Banden durchzuführen, wie solches in Aufgabe 17 geschehen. Denn nach Zeichnung aller dieser Spiegelbilder muss eine Richtung sich ergeben, welche der Diagonale parallel ist.

Man kann also eine Billardkugel auf zwei Wegen, parallel der einen oder der andern Diagonale so abstossen, dass sie an allen vier

Auflösung. Ist in Figur 310 $EF \parallel AC$, so findet man die zentrisch-symmetrische Gerade GH durch Verbindung der zentrisch-symmetrischen Punkte zu E und F, oder durch Verbindung der Punkte auf CD und DH, welche von C und D denselben Abstand haben, wie auf AB und BC Punkt E von A und F von B. Da wegen der zentrischen Symmetrie $GH \# EF$ ist, so wird $EFGH$ ein Parallelogramm, also auch $FG \# HE$. Wegen dieser Parallelen ist nun:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BEM,$$

also:

$$EM = BM;$$

und

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle EFB,$$

also:

$$FM = BM.$$

Demnach ist $EM = FM$, also M Mittelpunkt von EF. Ebenso ist:

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD = \sphericalangle NGD,$$

also:

$$ND = NG;$$

und

$$\sphericalangle BDA = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DHN,$$

also:

$$ND = NH.$$

Demnach ist $GN = HN$, also N Mittelpunkt von GH; M und N Mittelpunkte der Gegenseiten EF und GH, also MN Mittelparallele von FG und HE, und $EH \# MN \# FG \parallel BD$.

Folglich bestehen folgende Winkelgleichheiten:

$$ABD = BAC = ACD = BDC$$
$$= AEH = BEF = CGF = DGH$$

und

$$ACB = CAD = CBD = DAC$$
$$= AHE = DHG = BFE = CFG.$$

Banden abschlägt und an ihren Platz zurückkehrt. Und der Weg, den sie dabei durchläuft, ist ein Parallelogramm mit Seiten parallel den Billarddiagonalen und an Länge gleich deren doppelter Länge.

Es sind also im Parallelogramm $EFGH$ beide Seiten den Diagonalen des Rechtecks parallel und bilden mit den Rechtecksseiten gleichgrosse Winkel, nämlich wie die parallelen Diagonalen mit denselben Seiten.

Aus letzterem Grunde ist auch in den gleichschenkligen Dreiecken:

$$AK = EK = HK = OM = ON = FL = GL = CL$$

und

$$BM = EM = FM = OK = OL = NH = NG = ND,$$

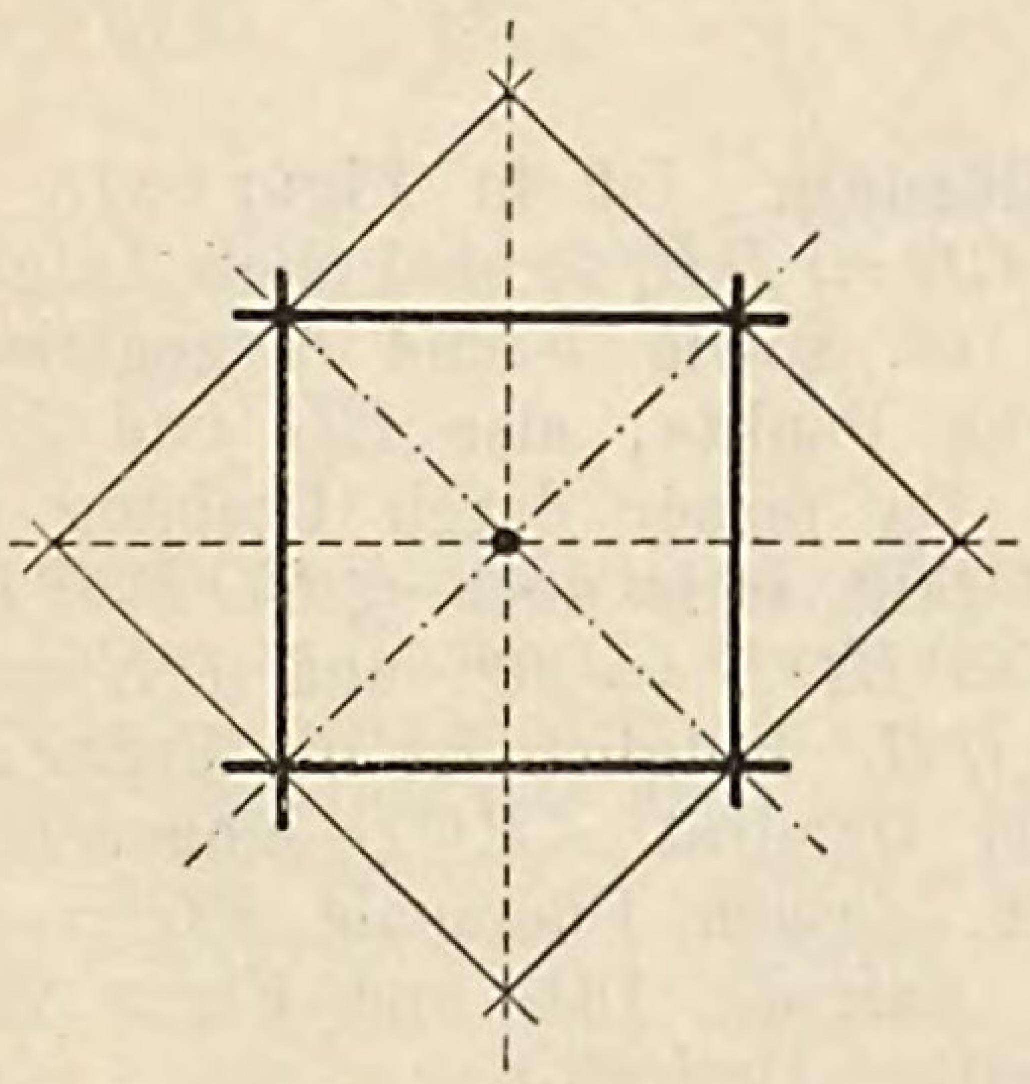
also der Umfang des eingeschriebenen Parallelogramms:

$$EFGH = EM + MF + FL + LG + GN + NH + HK + KE$$

gleich der Summe von je vier langen und vier kurzen Längen, also gleich der doppelten Diagonalenlänge.

Aufgabe 295. Was wird beim Quadrat aus dem Vierseit der Halbierungslinien der Innen- und Aussenwinkel, der Mittelsenkrechten und der Parallelen zu der Diagonalen?

Figur 311.



Erkl. 688. In Figur 311 tritt am Mittelpunkt 8 mal und in jedem Eckpunkte 4 mal der Winkel von $45^0 = \frac{R}{2}$ auf. Die ganze Figur zerfällt daher in 16 kongruente, gleichschenklige, rechtwinklige Dreieckchen, deren Kathete je eine halbe Quadratseite ist, deren Hypotenuse eine halbe Diagonalenlänge desselben ist.

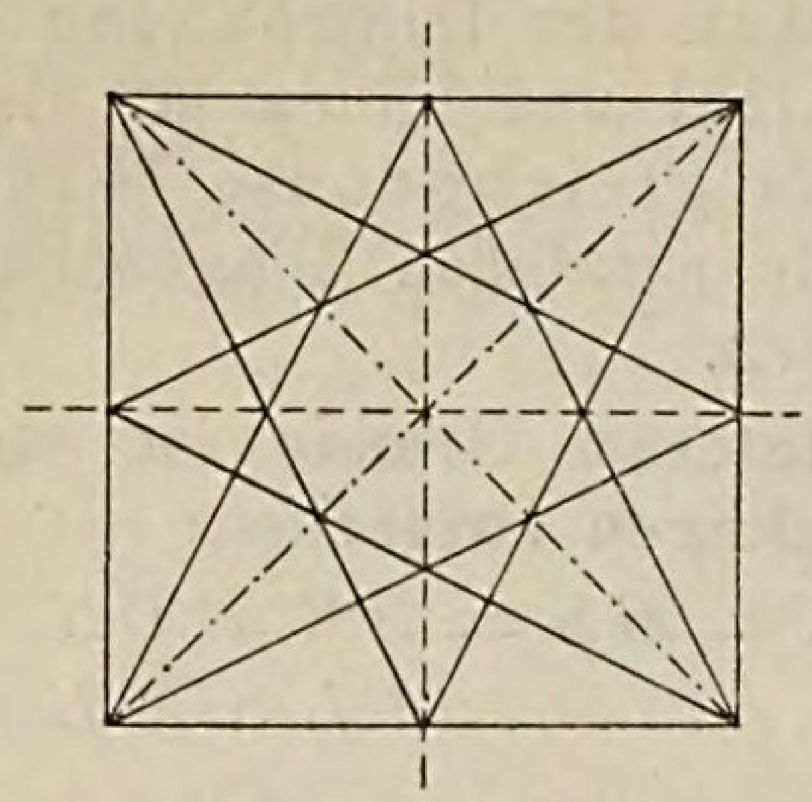
Auflösung. Da beim Quadrat die Diagonalen selbst die Winkel halbieren und aufeinander senkrecht stehen, so sind die Senkrechten auf denselben zugleich Halbierungslinien der Aussenwinkel und parallel zur zweiten Diagonale.

Daher fällt im Quadrat sowohl das Vierseit der Innenwinkelhalbierenden, als diejenige der Mittelsenkrechten in dem Mittelpunkt zusammen; das Vierseit der Aussenwinkelhalbierenden und dasjenige der Parallelen zu den Diagonalen fallen ebenfalls zusammen und liefern ein Quadrat, dessen Diagonalen die Mittelparallelen, dessen Mittelparallelen die Diagonalen des ursprünglichen Quadrates sind. Seine Diagonalenstrecken selbst sind gleich dem halben Umfang des gegebenen Quadrats, oder gleich der doppelten Seitenlänge desselben.

Aufgabe 296. Man verbinde jede Quadratecke mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten und untersuche die entstehende Figur.

Auflösung. Durch die Verbindungslinie einer Ecke mit einer der gegenüberliegenden

Figur 312.

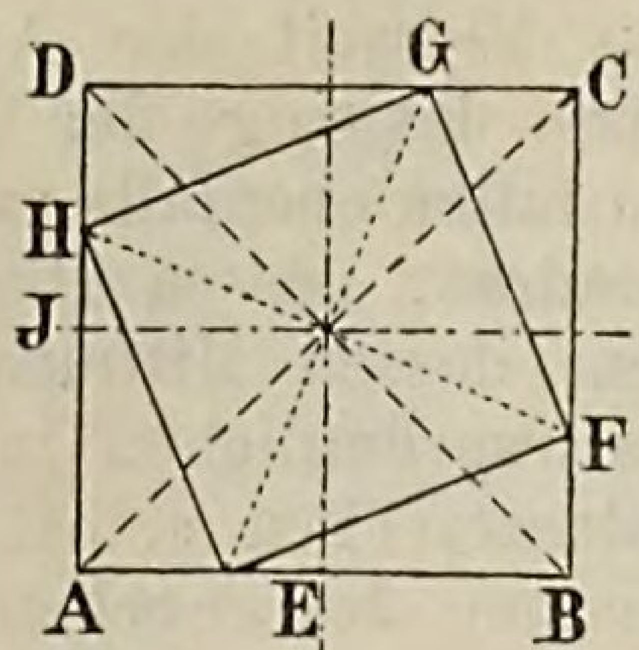


Erkl. 689. Die ganze Figur als solche hat vier verschiedene Symmetrieachsen, nämlich jede der Diagonalen und jede der Mittelparallelen. Ausserdem gelangt sie zur Deckung mit sich selbst durch Drehung um 180° und um 90°. Daher wird durch je eine halbe Diagonale und eine halbe Mittelparallele ein Flächenwinkelstück von 45° ausgeschnitten, durch dessen 8malige Zusammensetzung in gleich- und ungleichwendiger Kongruenz die ganze Figur gebildet werden kann. Jeder beliebige rechte Winkel mit Scheitel im Mittelpunkt schneidet ein Winkelstück aus, zu welchem noch drei weitere kongruente Figurenstücke vorhanden sind.

Seitenmitten entsteht jeweils ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem eine Kathete das doppelte der andern ist. Solche Dreiecke sind im ganzen 8 vorhanden. Von den in Figur 285 dargestellten Parallelogrammen bleibt das erste ein allgemeines, die beiden anderen werden Rhomben, und das Achteck, welches von den Linien gebildet wird, erhält 8 gleiche Seiten und je 4 gleiche Winkel, dasselbe ist daher ein gleichseitiges, nicht aber auch gleichwinkliges Achteck. Dasselbe kann aber aufgefasst werden sowohl als einfaches Achteck der Linienstücke als solcher, welche es umgrenzen, wie auch als Sternachteck. Denn wenn man irgend eine Ecke oder Seitenmitte des Quadrats als Ausgangspunkt wählt, so kann man in ununterbrochenem Umlauf das ganze Achteck samt seinen Sternecken durchlaufen. Die Innenseiten treten dann in folgender Reihenfolge auf: 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6 — und dann wieder die erste. Während aber für das einfache Achteck die Ungleichheit je zweier benachbarten Winkel nicht sofort in die Augen springt, erkennt man dieselbe für das Sternachteck aus der unmittelbaren Anschauung.

Aufgabe 297. Man soll auf jeder Seite eines Quadrats im Umlauf um dasselbe eine gleiche Strecke von der Ecke aus abschneiden und das durch diese vier Punkte gebildete Viereck untersuchen.

Figur 313.



Erkl. 690. Die Lage des Quadrats $EFGH$ im Quadrat $ABCD$ liefert die Lösung für die folgende Aufgabe. Es ist daher diese Aufgabe 297 als die Analysis zu betrachten für die beiden Aufgaben 298.

Auflösung. Ist in Figur 313 $AE = BF = CG = DH$, so sind nach Aufgabe 255 E und G, sowie F und H zentrisch-symmetrische Punkte, also EG und FH Zentralen. Da ferner durch Drehung um 90° E auf F fällt, so ist auch $\sphericalangle EOF = FOG = GOH = HOE = 90^0$ und $OE = OF = OG = OH$. Folglich ist die Figur $EFGH$ ein dem Quadrat $ABCD$ eingeschriebenes Quadrat, dessen Diagonale $EG = FH$ ist. (Vergl. Aufgabe 131 und Figur 230 fürs gleichseitige Dreieck.)

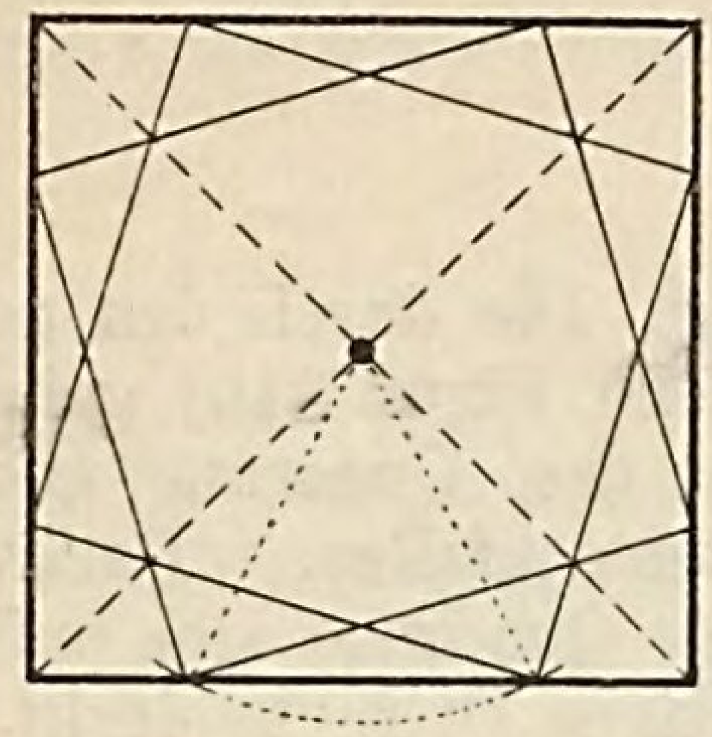
Aufgabe 298. Man soll einem gegebenen Quadrat (Seite s_1) ein anderes von gegebener Seitenlänge s_2

a) einschreiben,

b) umschreiben.

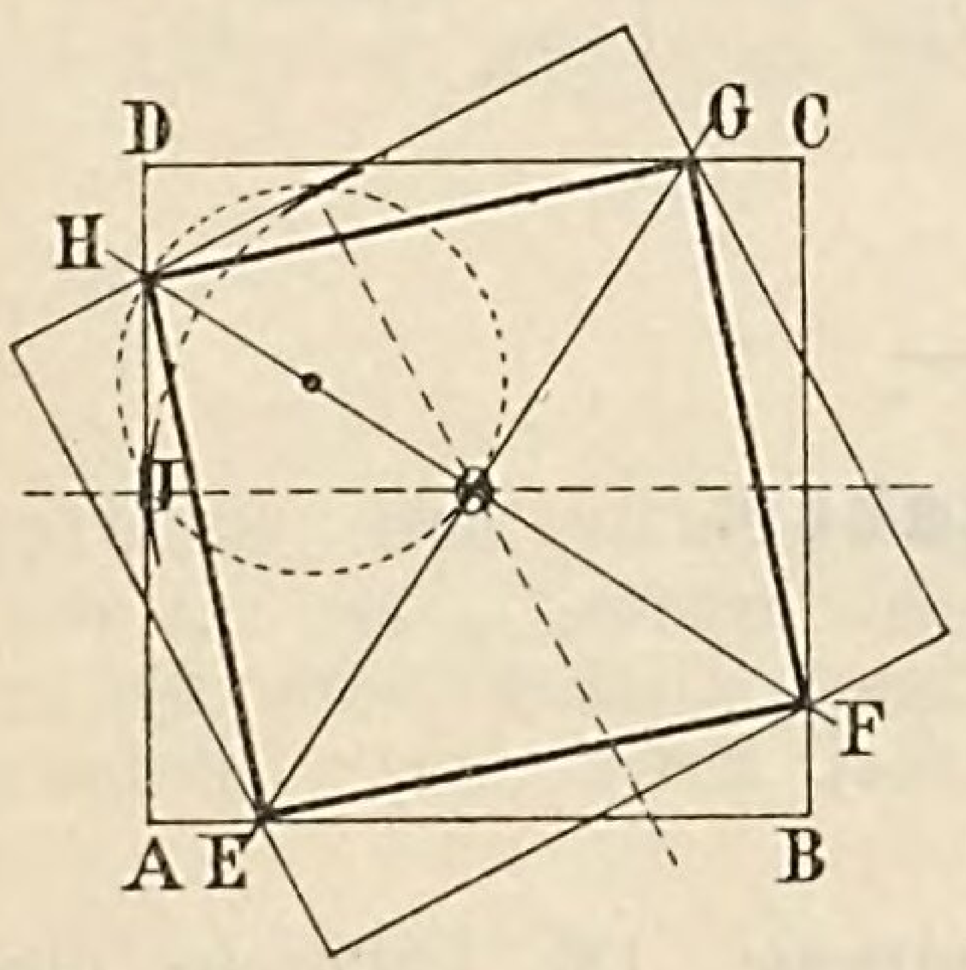
Auflösung. a) Um dem Quadrat $ABCD$ das Quadrat mit gegebener Seite s_2 einzuschreiben, zeichne man das Quadrat mit Seite

Figur 314.



Erkl. 691. Wie aus der Figur hervorgeht, darf die halbe Seite s_2 nicht grösser sein, als die halbe Diagonale, und nicht kleiner, als die halbe Mittelparallele des gegebenen Quadrats. Da letztere selbst gleich $\frac{s_1}{2}$ ist, so findet man mittels der im V. Teile dieses Lehrbuches anzugebenden Hilfsmittel für die Bedingung der Lösbarkeit: $s_1 > s_2 > \frac{s_1}{\sqrt{2}}$.

Figur 315.



Erkl. 692. Dass das Viereck $ABCD$ nicht nur, wie in seiner Konstruktion geschieht, vier rechte Winkel erhält, sondern auch vier gleiche Seiten, dass dasselbe also nicht nur Rechteck, sondern wirklich Quadrat ist, geht hervor aus der zentrischen Symmetrie der ganzen Figur in Bezug auf O. Denn durch die Drehung um 90^0 gelangt Punkt G nach H, also die Linie DC durch G in die Lage der dazu senkrechten durch H, somit gelangt CD nach Richtung und auch Grösse auf DA — ebenso BC auf CD, AB auf BC, DA auf AB.

Damit der Punkt J auf dem Kreise überhaupt zu finden sei, muss die Halbseite OJ des verlangten Quadrats kleiner sein, als die halbe Diagonale des gegebenen Quadrats, und damit Punkt J überhaupt ausserhalb des gegebenen Quadrats zu liegen kommt, auch grösser als die Halbseite dieses Quadrats; also ist Bedingung der Lösbarkeit: $s_1 < s_2 < \frac{s_1}{\sqrt{2}}$ (siehe oben).

s_2 besonders daneben, um seine Diagonalenlänge zu finden. Diese trägt man alsdann, wie in Figur 313 als Strecke OE, so in Figur 314 vom Mittelpunkte aus nach der einen oder nach allen Seiten des Quadrats hin ab und zeichnet das Quadrat der Schnittpunkte, wie in Aufgabe 297. Man erhält zwei Lösungen, da auf der gegebenen Quadratseite zwei Punkte zu finden sind, welche von O den Abstand OE besitzen.

b) Um umgekehrt dem gegebenen Quadrat $EFGH$ (Figur 315) ein anderes mit der Seite s_2 umzuschreiben, benützt man wieder Aufgabe 297 mit Figur 313 als Analysis. Daselbst bildet nämlich die Mittelparallele OJ des grossen Quadrats $ABCD$ mit der Diagonale OH des eingeschriebenen Quadrats $EFGH$ ein rechtwinkliges Dreieck OHJ. Von diesem kennt man für die vorliegende Aufgabe OH als Diagonale des gegebenen Quadrats und OJ als $\frac{1}{2}s_2$. Folglich kann man den Punkt J finden, und damit das ganze umgeschriebene Quadrat.

Man zeichnet nämlich über der Strecke OH als Durchmesser den in Aufgabe 136 und 293 benutzten Halbkreis und sucht auf demselben einen Punkt J im Abstand $OJ = \frac{1}{2}s_2$ von O; dann wird HJ eine Seitenrichtung des gesuchten umgeschriebenen Quadrats $ABCD$. Fällt man also auf die Linie HJ noch von E und G Senkrechte und zieht durch F eine Parallele zu HJ, so ist $ABCD$ das gesuchte Quadrat. — Man erhält wieder zwei Lösungen, da man den Halbkreis über OH sowohl auf der einen, als auf der anderen Seite zeichnen kann.

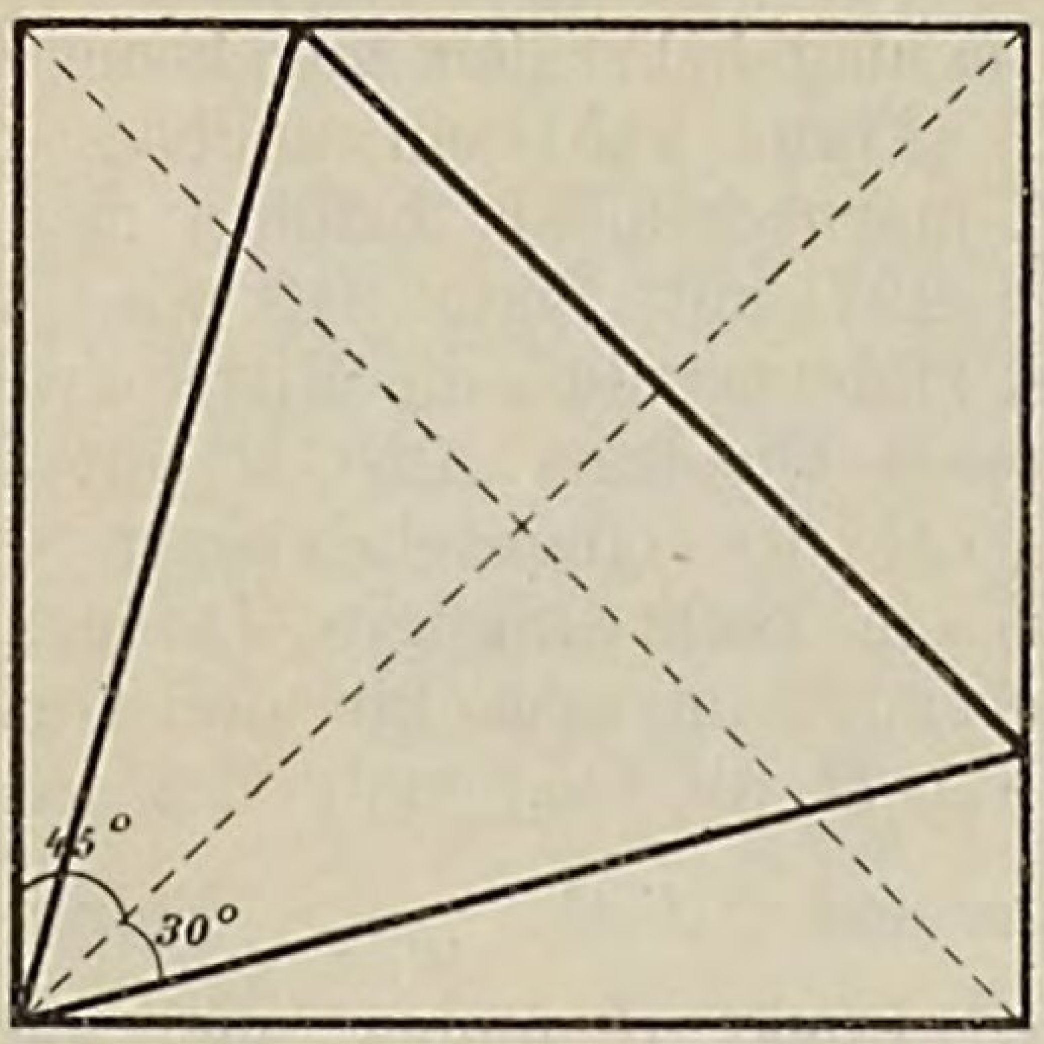
Aufgabe 299. Man soll:

a) einem gegebenen Quadrat ein gleichseitiges Dreieck einschreiben;

b) einem gegebenen gleichseitigen Dreieck ein Quadrat umschreiben,

so dass Dreieck und Quadrat eine Ecke gemeinsam haben.

Figur 316.



Erkl. 693. Dass die ganze Figur symmetrisch bleiben muss, geht für beide Aufgaben hervor aus der Thatsache, dass Punkte auf den Quadratseiten mit gleichen Abständen von einer Ecke nur symmetrische Punkte zur Diagonale sein können.

Auflösung. Die durch den gemeinsamen Eckpunkt (siehe Figur 316) gehenden Symmetrieachsen des Quadrats und Dreiecks müssen zusammenfallen. Damit also die Diagonale des Quadrats sich mit der Höhe des gleichseitigen Dreiecks deckt, muss jede benachbarte Dreieckseite einen Winkel von 30°, jede benachbarte Quadratseite einen Winkel von 45° mit dieser Symmetrieachse bilden.

Man konstruiere also die durch die Ecke gehende Symmetrieachse und trage an dieser im ersten Falle beiderseits einen Winkel von 30°, im zweiten Falle von 45° an, und vervollständige Dreieck bezw. Quadrat durch die Ziehung der Verbindungslinien bezw. der Senkrechten.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 300. Man beweise, dass in einem nach Rhomben oder nach Rechtecken (sogenannt karriert, vom französischen quarré) geteilten Felde je zwei benachbarte Diagonalen parallel sind, je zwei anstossende in einer geraden Linie liegen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 281.

Aufgabe 301. Man verfahre mit den Seiten eines allgemeinen Parallelogramms nach Massgabe der Aufgaben 285 und 286.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 285 und 286.

Aufgabe 302. Man verfahre mit den Seiten eines Quadrats nach Massgabe der Aufgaben 285 und 286.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 303. Man soll einem gegebenen Quadrat ein anderes einschreiben, von welchem eine Seitenrichtung gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 290 bis 293 und 297.

Aufgabe 304. Man soll einem gegebenen Quadrat ein Rhombus einschreiben, von welchem eine Ecke gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 290 bis 293 und 297.

Aufgabe 305. Man soll einem gegebenen Quadrat ein Parallelogramm einschreiben, von welchem die Lage einer Seite gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 290 bis 293 und 297.

Aufgabe 306. Man soll einem gegebenen Quadrat ein anderes einschreiben, von welchem eine Ecke gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 290 bis 293 und 297.

Aufgabe 307. Man soll einem gegebenen Quadrat ein anderes einschreiben, dessen eine Ecke auf einer gegebenen Linie liegt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 290 bis 293 und 297.

Aufgabe 308. Man soll ein gleichseitiges Dreieck so um ein gegebenes Quadrat beschreiben, dass eine Grundseite gemeinsam ist, und die anderen Seiten durch Quadratecken gehen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 299.

Aufgabe 309. Man soll ein Quadrat so in ein gleichseitiges Dreieck zeichnen, dass eine Grundseite gemeinsam ist, und die Gegenseite des Quadrats durch die Dreieckspitze geht.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 299.

Aufgabe 310. Man zeichne ein Quadrat und ein kongruentes, dessen Diagonalen die Mittelparallelen des ersten sind, und untersuche das entstehende Achteck.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 299.

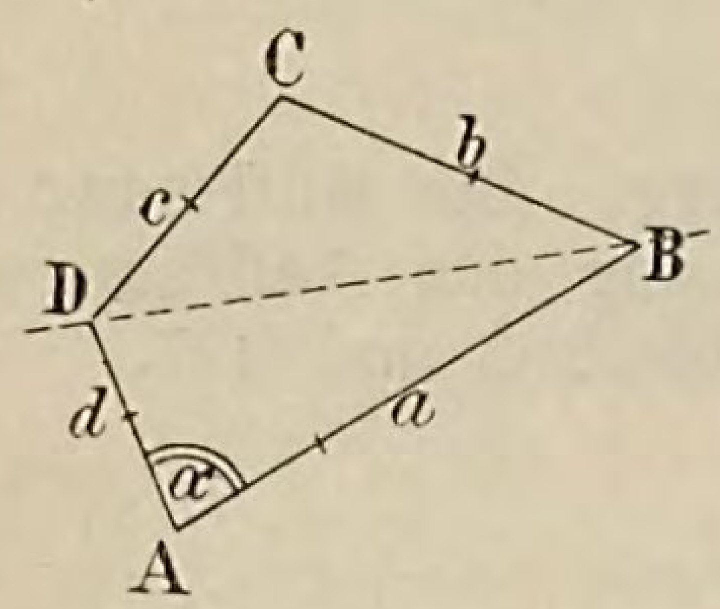
4) Aufgaben über die Konstruktion und Kongruenz der Vierecke.

(Zu Abschnitt C 2 c und d.)

a) Gelöste Aufgaben.

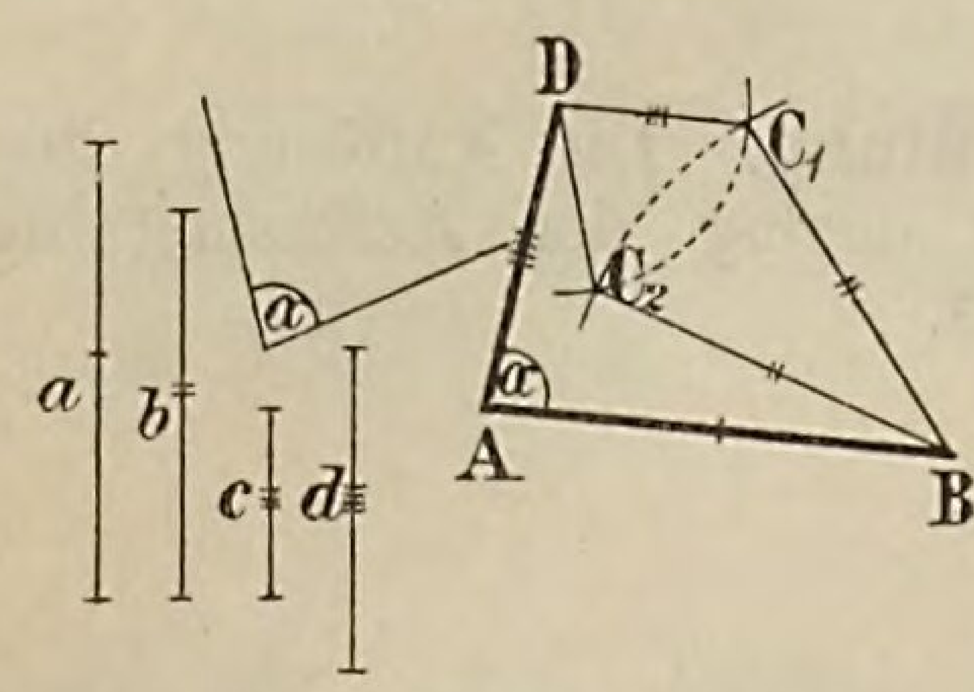
Aufgabe 311. Man soll ein allgemeines Viereck konstruieren, von welchem die vier Seiten und ein Winkel gegeben sind, also die Stücke a, b, c, d, α.

Figur 317.



Erkl. 694. Für die Ausführung ist die Zeichnung der Diagonale $BD = f$ nicht erforderlich. Will man dieselbe auch aus der Analysis fortlassen, so muss man die Bestimmung der Lage der Punkte B und D durch die Winkelschenkel a und d hervorheben und den Punkt C durch die Abstände von den so bekannten Punkten B und D festlegen.

Figur 318.



Erkl. 695. Dass die allgemeine Bedingung des Satzes 67 auch für die Konstruierbarkeit des Dreiecks BCD hinreicht, lässt sich folgendermassen erkennen:

Es muss für das Dreieck ABD:

$$a - d < f < a + d$$

sein, und für das Dreieck CBD muss:

$$b - c < f < b + c$$

sein, also durch Zusammenfassung:

$$a - d < b + c \text{ oder } b - c < a + d,$$

wie in Satz 67.

Wenn Punkt C_2 in den Punkt A selbst fällt, so entsteht nur eine einzige Lösung ABC_1D, aber dann kein allgemeines Viereck, sondern ein Deltoid wegen $a = b$, $c = d$. — Wenn $c > f$ wird, so kann C_2 sowohl als C_1 jenseits AD

Auflösung.

I. Analysis. Angenommen das Viereck $ABCD$ in Figur 317 sei das verlangte. In demselben kennt man die vier Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, und den Winkel $BAD = \alpha$. Durch Einzeichnung der Diagonale BD entstehen zwei Teildreiecke, BAD und BCD. Das erstere ist konstruierbar aus den zwei Seiten a und d und dem eingeschlossenen Winkel α, liefert also für das zweite Teildreieck die Seite $BD = f$. Alsdann ist auch dieses zweite konstruierbar aus den drei Seiten.

II. Ausführung. Man trage auf den Schenkeln des gegebenen Winkels (siehe Figur 318) die Strecken $a = AB$ und $d = AD$ ab, beschreibe um B und D mit Radien b und c Kreisbögen, und verbinde deren Schnittpunkt C mit B und D.

III. Beweis. Das erhaltene Viereck $ABCD$ ist das verlangte, denn es enthält den Winkel $BAD = \alpha$ und die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ abgetragen gleich den vorgeschriebenen Stücken.

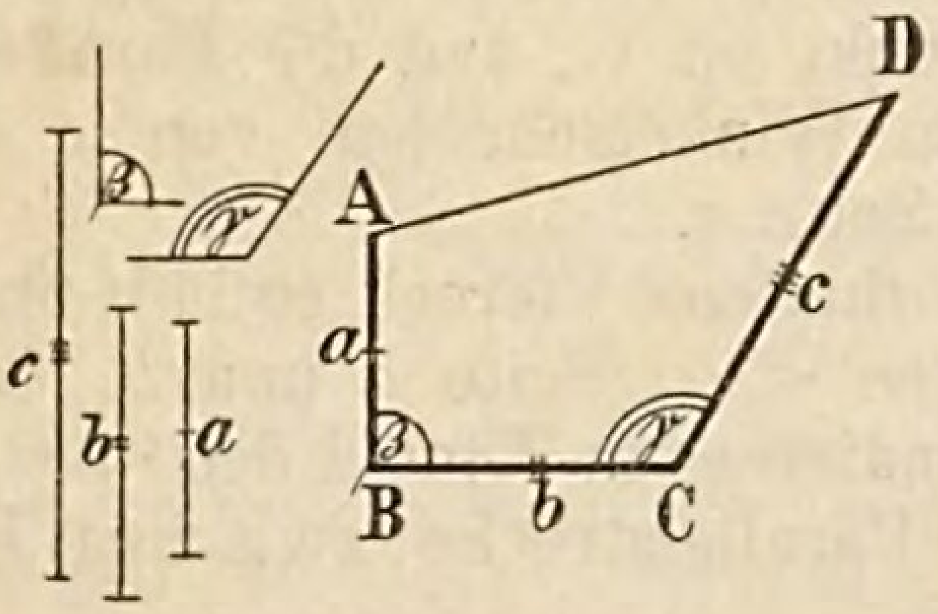
IV. Determination. Man erhält nur dann eine Lösung, wenn die Seiten b und c mit der im Teildreieck ABD entstandenen Diagonale f ein Dreieck ergeben. Dies trifft zu bei der in Satz 67 ausgesprochenen Bedingung, dass jede Seite des Vierecks kleiner sein muss, als die Summe der drei anderen, aber grösser als die Differenz zwischen der sonst grössten und der Summe der beiden kleinsten.

Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man zweierlei Vierecke, je nachdem der Winkel γ als ein hohler oder ein erhabener gewählt wird.

fallen, so dass das Viereck ABC_1D ebenfalls bei D einen einspringenden Winkel erhält, das Viereck ABC_2D aber ein überschlagenes wird. — Für $b > a$ und $c > d$ fällt die Lösung ABC_2D ganz weg, weil dieses Viereck den Winkel α nicht mehr als Innenwinkel enthielte.

Aufgabe 312. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem drei Seiten und ihre beiden eingeschlossenen Winkel gegeben sind, also etwa die Stücke a, b, c, β, γ.

Figur 319.

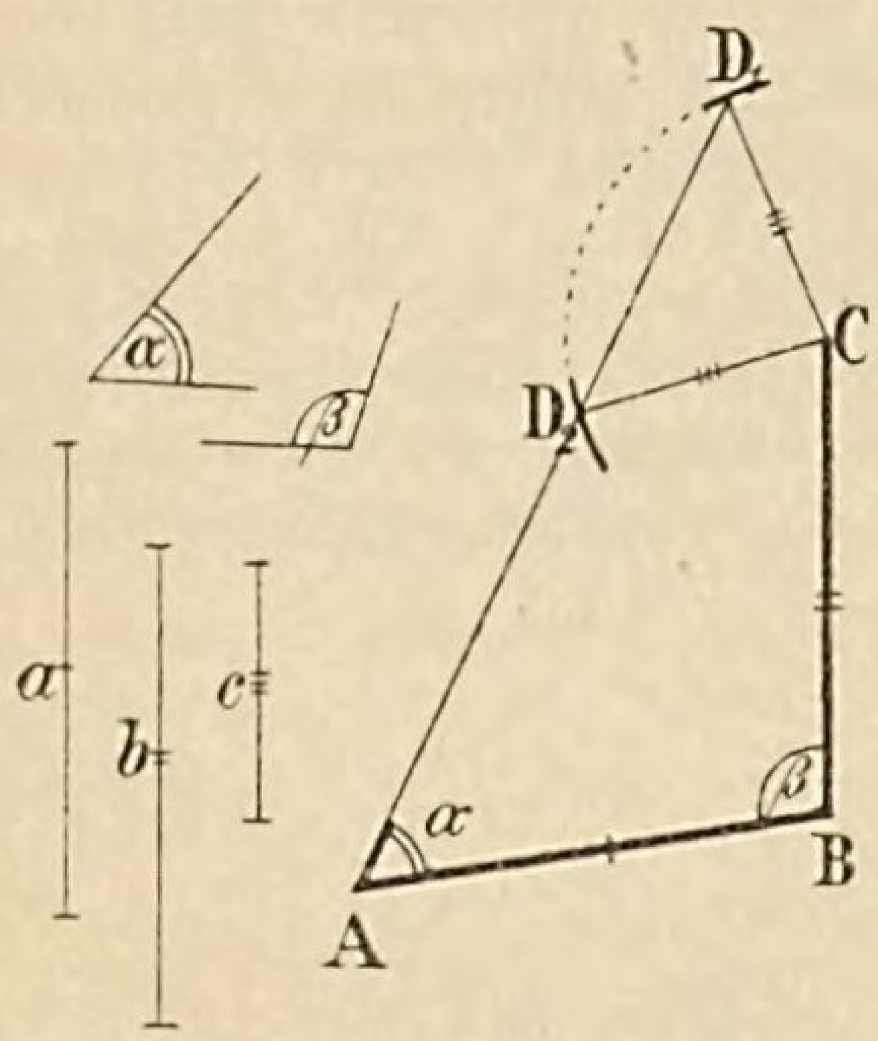


Auflösung. Man trage an der gemeinsamen Schenkelseite (siehe Figur 319) beiderseits die gegebenen anliegenden Winkel an, trage auf diesen anderen Schenkeln die gegebenen Seiten ab und verbinde die Endpunkte.

Man erhält stets eine und nur eine einzige Lösung.

Aufgabe 313. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind drei Seiten und ein eingeschlossener und ein anliegender Winkel, also a, b, c, α, β.

Figur 320.



Erkl. 696. Die ziffernmässige Angabe der im Nebenstehenden angegebenen Lösungsbedingungen ist nicht ohne Zuhilfenahme trigonometrischer Rechnungen ausführbar. Durch Konstruktion aber den Abstand der Linie AD von C zu suchen und mit der Länge c zu vergleichen, würde längere Zeit erfordern, als bloss die Konstruktion des Vierecks selbst auszuführen.

Auflösung. Durch die Stücke a, β, b ist das Dreieck ABC (siehe Figur 320) festgelegt, dann durch α die Richtung der Seite d und durch C die Länge der Seite c.

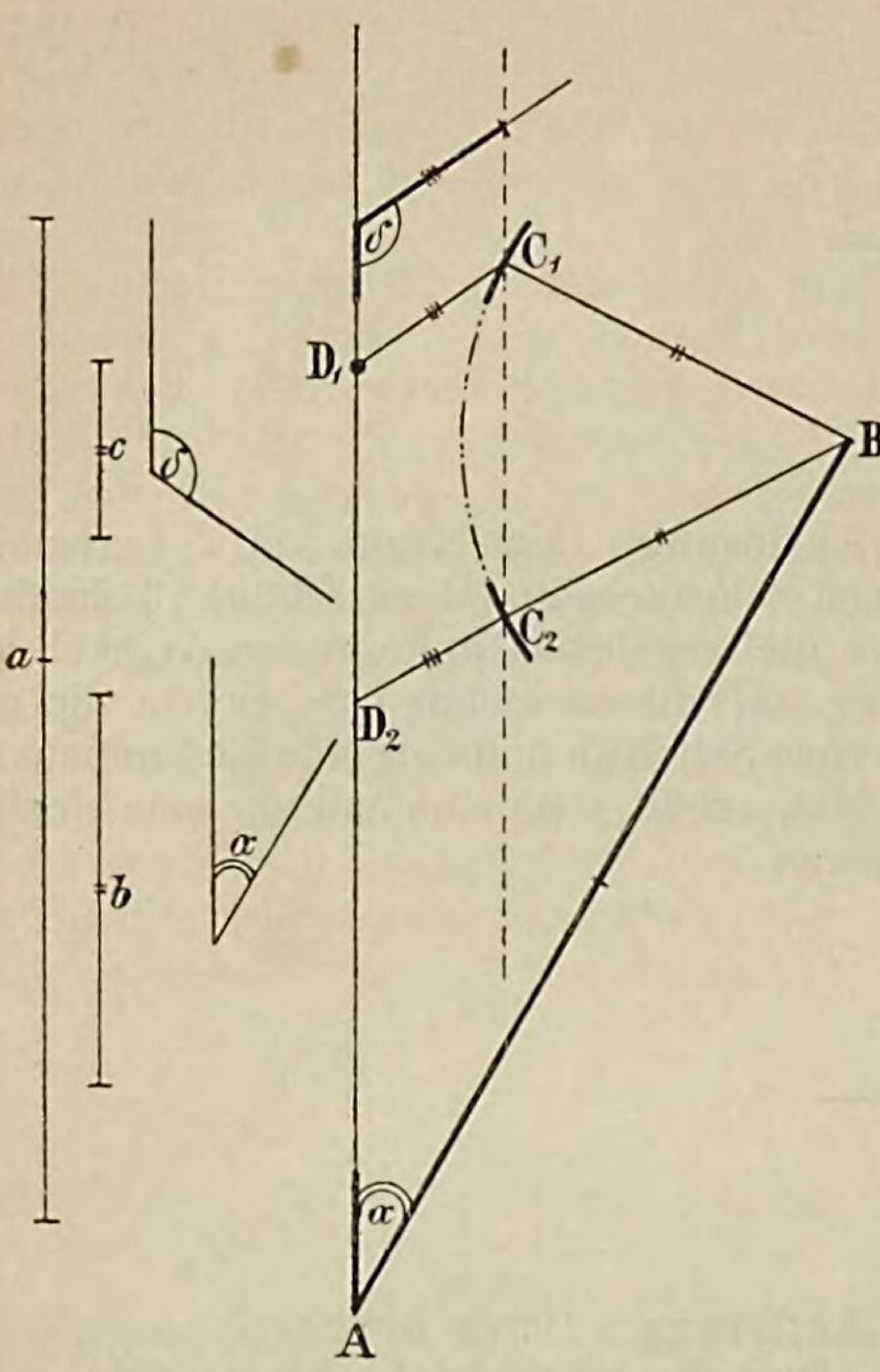
Man trage also auf den Schenkeln des Winkels β die Seiten a und b ab, trage an AB in A den Winkel α an und beschreibe um C mit Radius c einen Kreisbogen, welcher den Schenkel dieses Winkels trifft. Dieser Schnittpunkt ist D.

Man erhält zwei Lösungen, wenn der Abstand der Linie AD vom Punkte C kleiner wird als c, eine Lösung, wenn er gleich c wird, keine Lösung, wenn er grösser als c wird. Auch im ersten Falle erhält man eine einzige Lösung wenn c grösser ist, als die durch das Teildreieck ABC gelieferte Diagonale AC.

Aufgabe 314. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind drei Seiten und die beiden nicht eingeschlossenen Winkel, also a, b, c, α, δ.

Auflösung. Durch die Stücke α und a (siehe Figur 321) ist die Lage der Punkte

Figur 321.



A und B und die Richtung der Seite d festgelegt. Wird alsdann Seite c sich selbst parallel längs d verschoben, so bleibt $\sphericalangle \delta$ stets gleich, und man weiss, dass Punkt C auf der dadurch entstehenden Parallelen zu d liegen muss, und zwar im Abstande b von B.

Man trage also an zwei beliebig gewählte Punkte einer als Seite d zu betrachtenden Geraden die Winkel α und δ an, und auf deren anderen Schenkeln die Seiten a und c. Durch einen dieser Endpunkte, z. B. den des Winkelschenkels von δ, ziehe man eine Parallele zu d und schneide diese durch einen Kreisbogen um B mit Radius b. Dieser Schnittpunkt ist C, und die Parallele durch ihn zum Winkelschenkel von δ ist CD, nämlich Seite c.

Das erhaltene Viereck enthält unmittelbar abgetragen $\sphericalangle \alpha$, Seite a und b, ferner als korrespondierenden Winkel den $\sphericalangle CDA = \delta$ und als Parallelstrecke zwischen Parallelen $CD = c$.

Man erhält zwei Lösungen in dem in Figur 321 dargestellten Falle, nur eine oder gar keine Lösung, wenn im Innenraum des Winkels α nur ein oder kein Punkt der Parallelen $C_1 C_2$ mit Abstand b von B besteht.

Erkl. 697. Aus Figur 321 ist leicht abzusehen, welche Veränderungen der gegebenen Stücke Abänderungen der Lösbarkeit veranlassen. Wenn der Abstand der Parallelen zu d von B grösser oder gleich b ist, so entsteht keine oder nur eine Lösung. Fällt C_2 ausserhalb AB, so liefert C_1 die einzige Lösung. Ist Punkt C weiter von d entfernt als B, so zeichnet man entweder die Parallele durch B, oder die Parallele $C_1 C_2$ fällt weiter von d weg als Punkt B. Dadurch kann auch ein überschlagenes Viereck entstehen, wenn nämlich C_2 so fällt, dass die Parallele zum Winkelschenkel von δ die Strecke AB durchschneidet.

Ueber die ziffernmässige Angabe der Lösbarkeitsbedingungen gilt dasselbe, was in Erkl. 696 gesagt wurde.

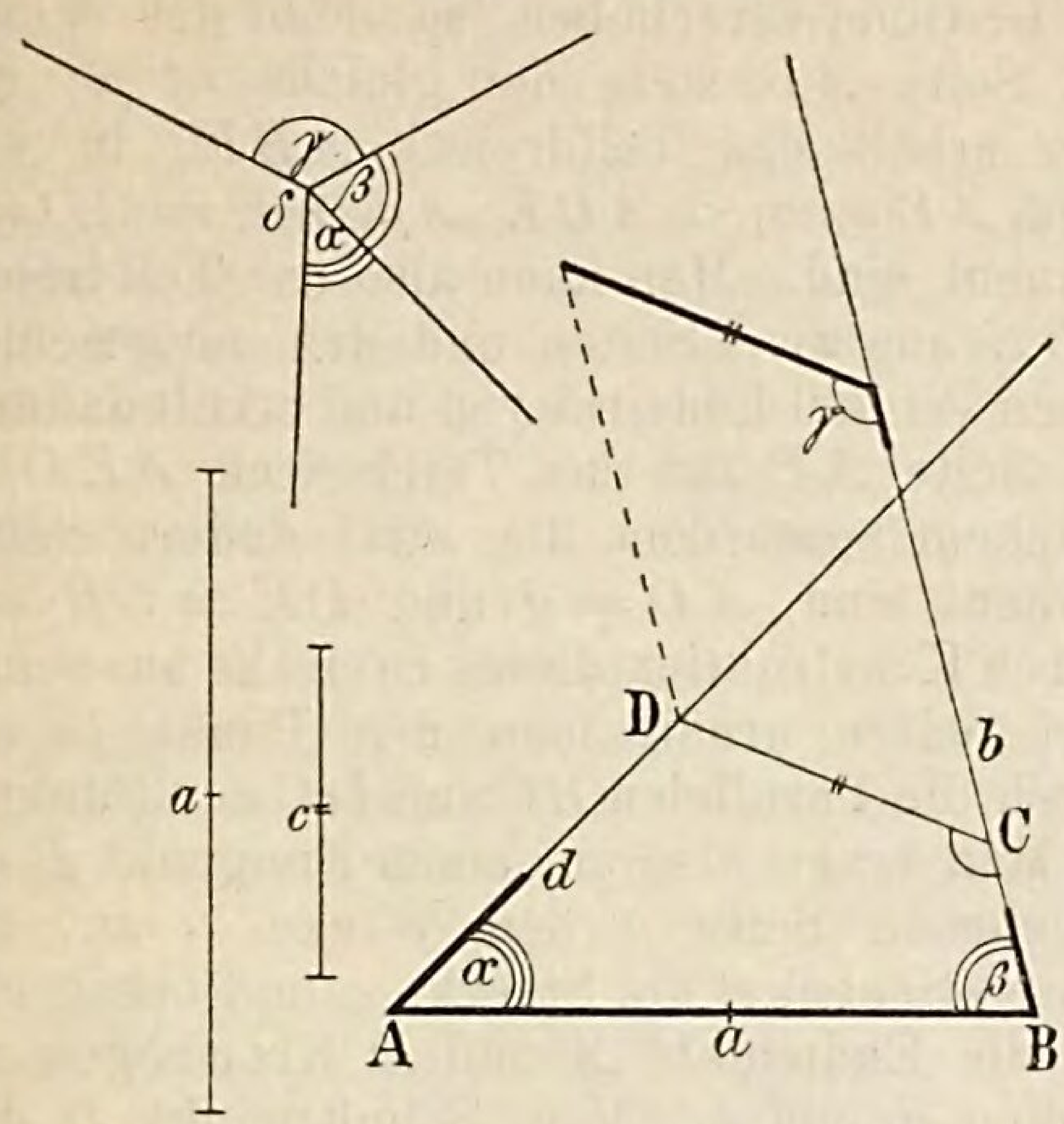
Aufgabe 315. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem zwei anstossende Seiten und drei, also alle vier Winkel gegeben sind, also a, b, α, β, γ, δ.

Auflösung. Durch die Stücke a, β, b ist die Lage der Punkte A, B, C festgelegt; und sodann durch den Winkel α und γ die Richtung der Seiten d und c, also auch die Lage des Punktes D eindeutig bestimmt.

Aufgabe 316. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind zwei Gegenseiten und drei, also alle vier Winkel, also a, c, α, β, γ, δ.

Auflösung. Durch die Stücke α, a, β ist die Lage der Punkte A und B und die

Figur 322.



Erkl. 698. Wenn der Winkel γ nur nach einer Seite der Seite b abgetragen wird, so erhält man nur eine Lösung. Durch Hinzufügung der in den Scheitelwinkel von (b, d) einzutragenden Strecke c käme eine zweite Lösung, ein überschlagenes Viereck, hinzu. Wenn die Winkel α und β, wie in Figur 322, beide spitz sind, so ist für die erste Lösung eine Grenze der Ausführbarkeit zu beachten; denn damit die Strecke c im $\sphericalangle$ (b, d) oberhalb Seite AB eingetragen werden kann, darf sie die Seite b nicht in oder unterhalb B durchschneiden.

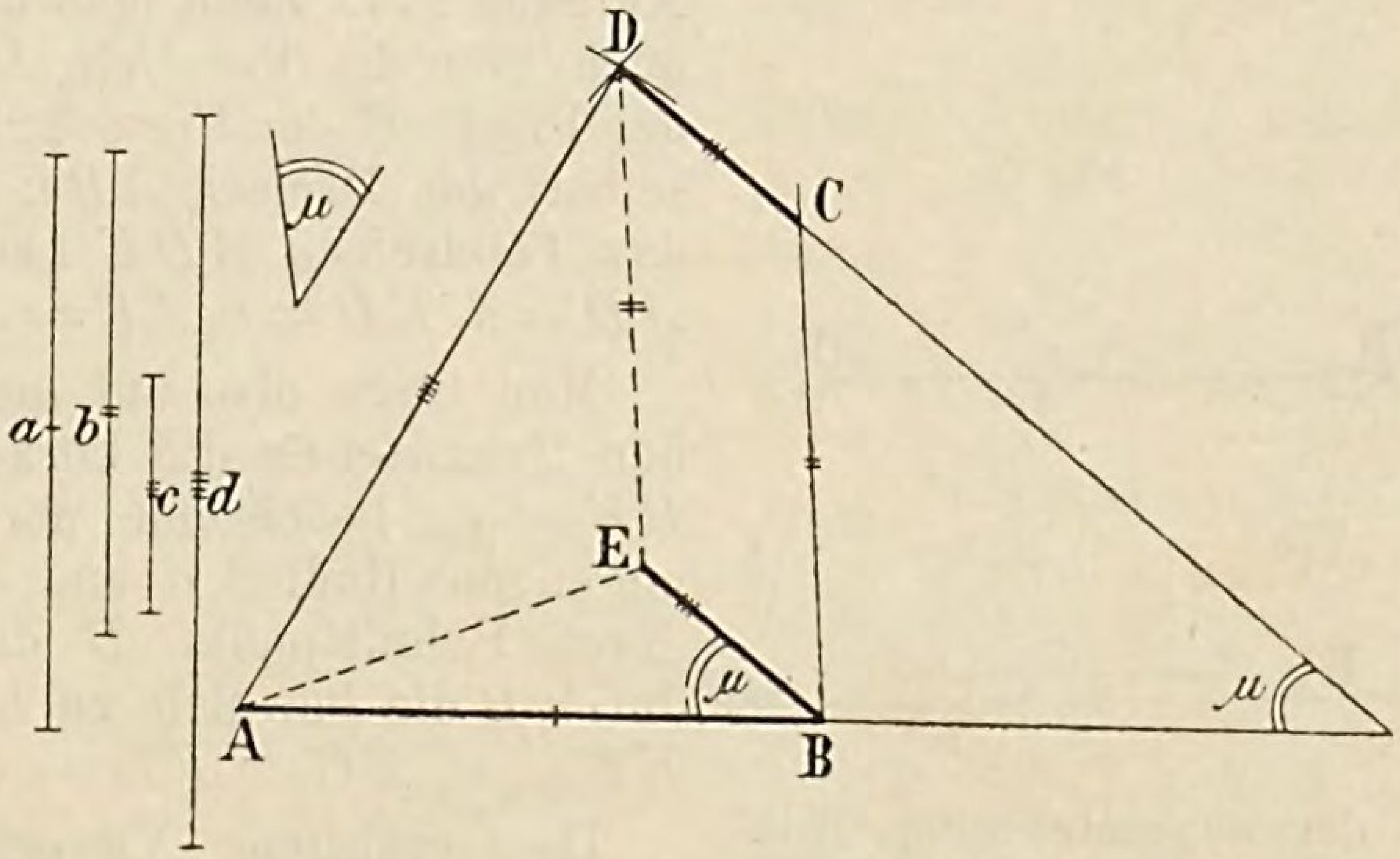
Je ferner aber aber der Scheitelpunkt von b und d rückt, desto weiter hinaus wird die Seite c bei gleichbleibender Grösse gerückt werden. Und wenn b und d gar divergieren, so wird c eine gewisse Grösse übersteigen müssen, um überhaupt eingetragen werden zu können. Wird $b \parallel d$, so wird die Aufgabe nicht mehr allgemein löslich (vergl. Aufgabe 321).

Richtung der Seiten d und b festgelegt. Man hat also dann noch die gegebene Strecke c in gegebener Richtung gegen diese beiden Linien in den Winkel derselben Linien b und d einzulegen, wie solches in Aufgabe 54 geschehen ist.

Man trage also an beiden Seiten der gegebenen Strecke a die Winkel α und β an, trage an einem beliebigen Punkte des Schenkels b den Winkel γ ab und auf dessen Schenkel die Länge c, ziehe durch den Endpunkt derselben eine Parallele zu b und durch deren Schnittpunkt D mit d eine Parallele DC zum Schenkel des abgetragenen Winkels γ.

Das erhaltene Viereck $ABCD$ enthält α, a, β abgetragen gleich den vorgeschriebenen Stücken, $\sphericalangle\gamma$ als korrespondierenden Winkel und CD als Parallelstrecke zwischen Parallelen ebenfalls gleich den gegebenen Stücken.

Figur 323.



Aufgabe 317. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind die vier Seiten und der Winkel, unter welchem sich die Verlängerungen zweier Gegenseiten schneiden, also $a, b, c, d, \sphericalangle(a, c) = \mu$.

Auflösung. Angenommen, das Dreieck $ABCD$ in Figur 323 sei das verlangte.

Erkl. 699. Die Lösung der Aufgabe würde unmöglich, wenn die Seite AE des Teildreiecks ABE eine solche Grösse erhielte, dass aus ihr mit den Seiten b und d kein Dreieck AED zustandekommen könnte. Eine zweite Lösung mit überschlagenem Viereck würde entstehen, wenn man das Dreieck AED mit Seite AE statt nach links oben, nach rechts unten angelegt hätte. Im allgemeinen entsteht aber nur ein einziges einfaches Viereck aus den gegebenen Stücken.

Wenn der Winkel μ der beiden Gegenseiten selbst gleich 0^0 wird, so werden die beiden Gegenseiten parallel und die Aufgabe geht in die folgende Aufgabe 318 über, nämlich dass ein Paralleltrapez gezeichnet werden soll aus vier bekannten Seiten, d. h. eben ein Viereck, von dem gegeben sind die vier Seiten und der Winkel zweier Gegenseiten $= 0^0$.

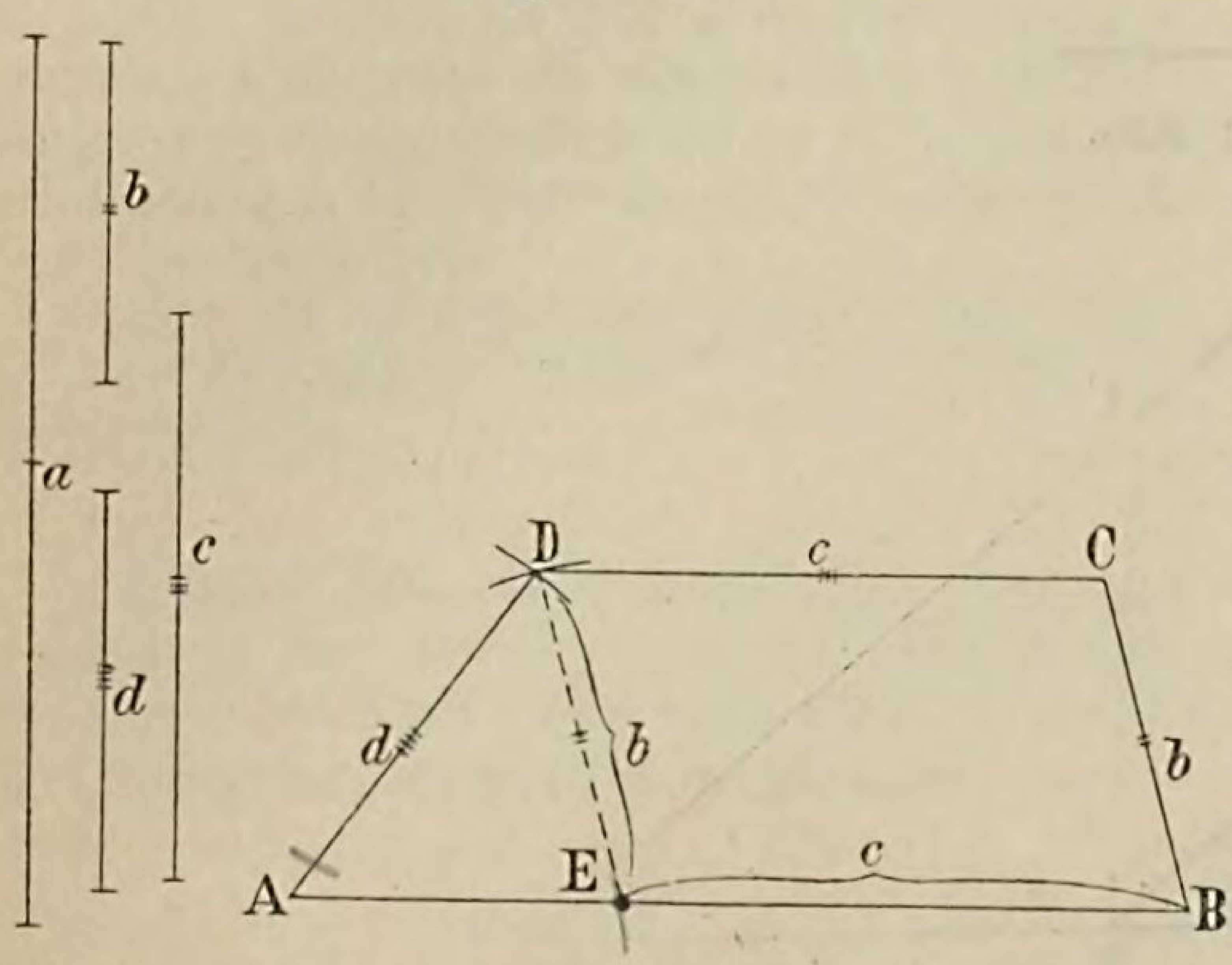
Wird in demselben die Seite CD längs CB als Leitlinie verschoben, so bleibt der Winkel mit Seite AB stets der gleiche $= \mu$, und man erhält das Teildreieck ABE, in welchem $AB = a$, $\sphericalangle ABE = \mu$, $BE = CD = c$ bekannt sind. Man kann also das Teildreieck ABE aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel konstruieren und erhält dadurch die Seite AE für das Teildreieck AED, in welchem ausserdem die zwei andern Seiten bekannt sind, $AD = d$ und $DE = CB = b$. Durch Konstruktion dieses Dreiecks aus seinen drei Seiten erhält man den Punkt D und durch die Parallelen BC und DC den Punkt C.

Man trage also am einen Endpunkt B der gegebenen Seite a den Winkel μ an, auf dessen Schenkel die Strecke c und beschreibe um die Endpunkte A und E Kreisbögen mit Radien d und b. Vom Schnittpunkt D derselben ziehe man eine Parallele zu BE und durch B eine Parallele zu DE. Der Schnittpunkt beider ist C.

Das erhaltene Viereck $ABCD$ enthält unmittelbar abgetragen die Strecken a und d, als korrespondierende Winkel die Winkel $(AB, CD) = ABE = \mu$, und als Parallelstrecken zwischen Parallelen $CB = ED = b$ und $CD = BE = c$ — hat also alle verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 318. Es soll ein Paralleltrapez konstruiert werden aus den gegebenen vier Seiten desselben.

Figur 324.



Erkl. 700. Aus der nebenstehenden Konstruktion ist zu entnehmen, dass für die Seiten eines Trapezes noch weitere Beschränkungen anzusetzen sind, als für die vier Seiten eines allgemeinen Vierecks. Während nämlich für letztere nur Satz 67 die Schranken zieht, muss im Trapez für das Zustandekommen des Drei-

Auflösung. Da die Parallelität der zwei Grundseiten des Trapezes nicht eine Grössenangabe über einen Innenwinkel desselben ist, sondern eine Winkelangabe zwischen zwei Gegenseiten bedeutet, so schliesst diese Aufgabe unmittelbar an an die vorhergehende Aufgabe 317. Zieht man nämlich (s. Fig. 324) auch hier die Parallele $DE \parallel CB$, so fällt der Punkt E der Figur 323 auf die Seite AB selbst, das Dreieck ABE verschwindet, und das Teildreieck ADE hat als Seitengrössen $AD = d, ED = b, AE = AB - BE = a - c$.

Man trage also auf der längeren der beiden Grundseiten die kürzere ab als Strecke $BE = c$, beschreibe um A und E Kreisbögen mit Radien d und b, und ziehe durch deren Schnittpunkt D die Parallele zu a, durch B die Parallele zu ED, dann ist $DC = EB = c$, $BC = ED = b$.

Das erhaltene Viereck ist ein Trapez wegen der parallelen Gegenseiten $c \parallel a$ und enthält zwei Seiten a und d unmittelbar abgetragen, zwei andere, BC und DC als Parallelstrecken zwischen Parallelen gleich den gegebenen.

ecks ADE auch noch die Strecke $AE = a - c$ die Bedingung erfüllen, zwischen $d - b$ und $d + b$ zu liegen. Also $d - b < a - c < d + b$, oder es muss sein $c + d - b < a < b + c + d$. Davon ist der zweite Teil schon in Satz 67 enthalten, der erste aber besagt, dass z. B. aus den Stücken $a = 12$, $b = 4$, $c = 10$, $d = 7$ kein Trapez möglich ist, während allgemeine Vierecke mehrfach bestehen können. Denn es ist $a = 12$, aber $c + d - b = 13$, daher im Dreieck ADE: $d - b = 3$ grösser als $AE = a - c = 2$.

Aufgabe 319. Man soll aus der vorigen Aufgabe eine Beziehung zwischen den Seitenlängen des Paralleltrapezes ableiten.

Erkl. 701. Nebenstehender Satz ist der Ausdruck der eben gefundenen Beziehung:

$$a - c > d - b;$$

beim Antiparallelogramm und jeglichem Parallelogramm, wo die beiden Schenkel gleich sind, ist deren Differenz Null, also ist die nebenstehende Bedingung stets von selbst erfüllt.

Auflösung. Aus der Notwendigkeit, dass bei einem Paralleltrapez immer ein Dreieck existieren muss von der Art des Dreiecks ADE mit den beiden Schenkellängen als Seiten und der Grundseitendifferenz als Grundseite, lässt sich der Schluss ziehen, dass bei einem Trapez stets die Differenz der Grundseiten grösser sein muss als die Differenz der Schenkel.

Aufgabe 320. Man soll ein Trapez konstruieren, von welchem drei Seiten und ein Winkel gegeben sind.

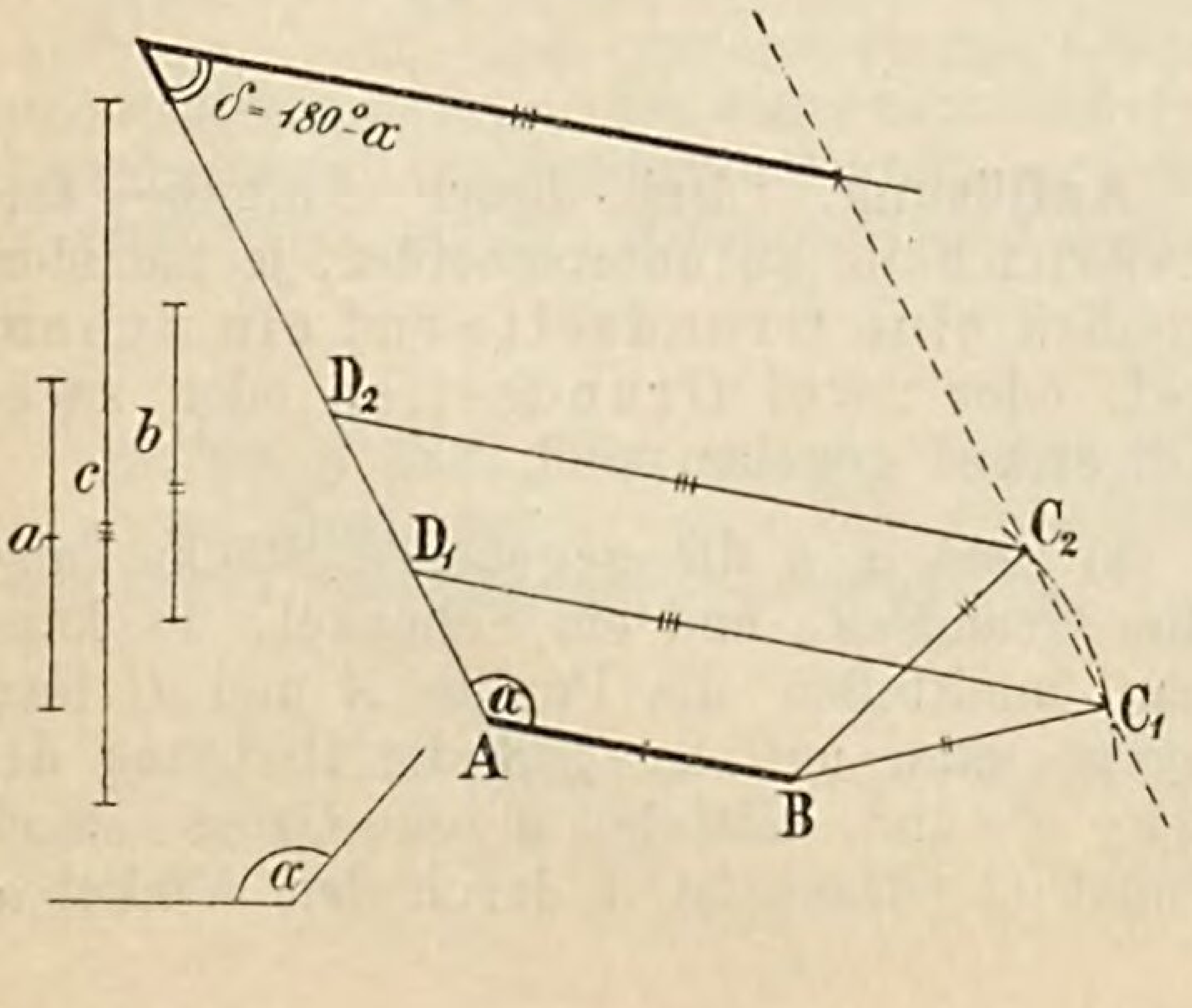
Erkl. 702. Stellt man die Fälle zusammen, wie drei Seiten und ein Winkel des Trapezes zusammenkommen können, so erhält man:

1, 2, 3, 4	a, b, c	mit α, β, γ, δ
5, 6, 7, 8	a, b, d	mit α, β, γ, δ
9, 10, 11, 12	a, c, d	mit α, β, γ, δ
13, 14, 15, 16	a, c, d	mit α, β, γ, δ

Und diese 16 Gruppen verteilen sich folgendermassen unter nebenstehende drei Fälle:

I:		II:		III:		
	2. $abc\beta$		1. $abc\alpha$		5. $abd\alpha$	9. $bcd\alpha$
(4)	3. $abc\gamma$	(4)	4. $abc\delta$	(8)	6. $abd\beta$	10. $bcd\beta$
	10. $acd\alpha$		9. $acd\beta$		7. $abd\gamma$	11. $bcd\gamma$
	11. $acd\delta$		12. $acd\gamma$		8. $abd\delta$	12. $bcd\delta$

Figur 325.



Auflösung. Bei dieser Aufgabe sind zunächst zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob unter den drei gegebenen Seiten zwei Grundseiten, oder zwei Schenkelseiten enthalten sind. Und der erste von beiden Fällen ist wieder in zwei zu trennen, ob nämlich der gegebene Winkel am gegebenen Schenkel, oder nicht am gegebenen Schenkel liegt.

Erster Fall: a, b, c, β.

Sind zwei Grundseiten, ein Schenkel und ein Winkel, also beide eingeschlossene Winkel gegeben, so trägt man an den beiden Endpunkten der gegebenen Schenkelseite b die beiden Supplementwinkel an, und auf deren Schenkeln die gegebenen Grundseiten a und c. Dann sind die Punkte A und D eindeutig bestimmt — und man erhält stets eine einzige Lösung.

Zweiter Fall: a, b, c, α.

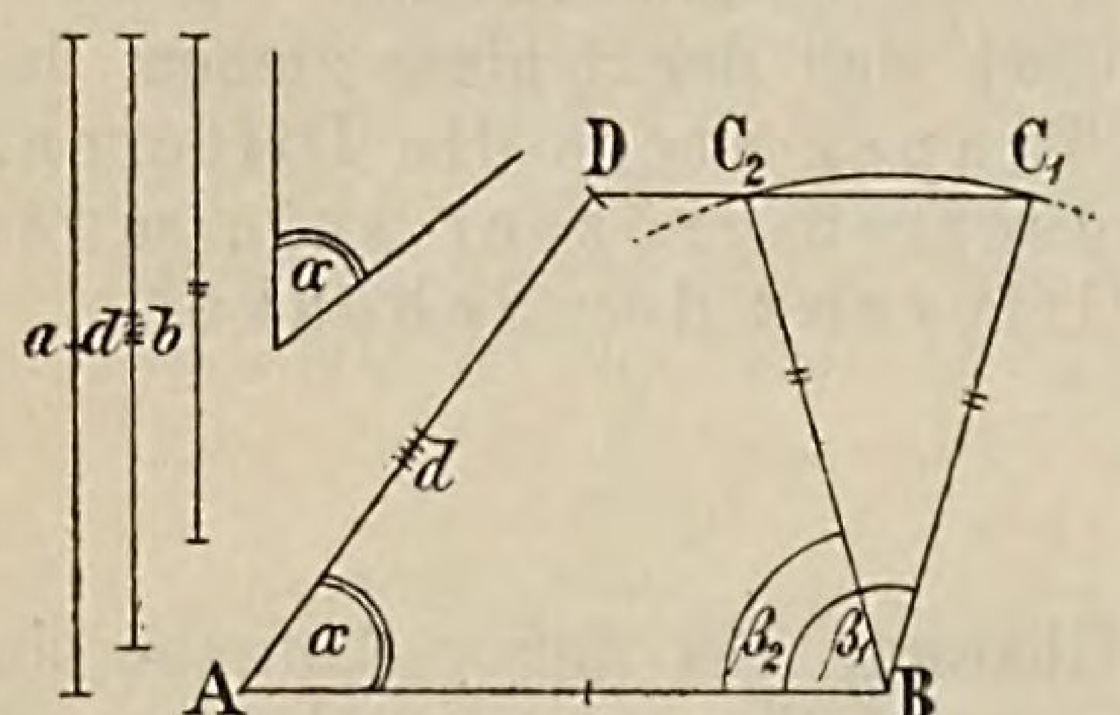
Sind zwei Grundseiten, eine Schenkelseite und ein Winkel, also beide am andern Schenkel liegenden Winkel gegeben, so hat man genau die Aufgabe 152, bloss mit der Beifügung, dass α und δ Supplementwinkel sind.

Man trägt also (siehe Figur 325) an der Seite a in A an den Winkel α an, zieht durch einen beliebigen Punkt auf dessen Schenkel d eine Parallele zu a und trägt

Erkl. 703. Dass die Konstruktionsfälle des Trapezes sich nicht vollständig einreihen in diejenigen des allgemeinen Vierecks, rührt daher, dass die Parallelität der beiden Grundseiten keine Winkelbeziehung zweier anstossenden Seiten ist. Deshalb ist die Aufgabe 318 nicht auf einen der sechs Fälle in Antwort der Frage 197 und in den Aufgaben 311 bis 316 zurückzuführen, sondern auf die Aufgabe 317. Auch der zweite Fall der Antwort 197 zerteilt sich in zwei verschiedene, der dritte aber liefert nur einen, der vierte gar keinen neuen Fall.

Erkl. 704. Entsprechend der eindeutigen Konstruktion in Aufgabe 318 und im ersten Falle von 320 erhält man daraus auch unbeschränkte Kongruenzfälle. Dagegen bedarf der dritte Fall so umständlicher Grenzbetrachtungen, dass sie in der Elementargeometrie nicht durchzuführen sind.

Figur 326.



Erkl. 705. Der dritte Fall nebenstehender Auflösung ist dadurch vor dem zweiten ausgezeichnet, dass die beiden erhaltenen Lösungen Unterschiede aufweisen, welche die Aufstellung des entsprechenden Kongruenzsatzes erleichtern. Denn wenn überhaupt zwei Lösungen entstehen, so muss der eine Winkel β_2 spitz, der andere β_1 stumpf sein. Ist also α spitz, so sind für die zweite Lösung, ist α stumpf, so sind für die erste Lösung an der Grundseite a und folglich auch an beiden Grundseiten gleichartige Winkel, für die andere Lösung aber beidemale ungleichartige Winkel, d. h. beide über oder beide unter 180°.

auf derselben die gegebene Seite c an, zieht durch deren Endpunkt eine Parallele zu d, und schneidet diese durch einen Kreisbogen um B mit Radius b im Punkte C. Die Linie durch C parallel a trifft d in D.

Man kann zwei, eine oder keine Lösung erhalten je nach dem Abstande der Parallelen durch C vom Punkte B.

Dritter Fall: a, b, d, α.

Sind beide Schenkelseiten und eine Grundseite gegeben, sowie ein Winkel, so ist jedenfalls einer der eingeschlossenen Winkel bekannt, und man kann (siehe Figur 326) an der Grundseite a einen Schenkel d unter dem Winkel α endgültig antragen, erhält also auch Punkt D festgelegt und kann durch denselben die Seite c der Richtung nach parallel a ziehen. Setzt man dann mit Radius b in B ein, so trifft der Kreisbogen diese Parallele in C.

Wenn die in Auflösung der Aufgabe 319 festgesetzte Bedingung erfüllt ist, so erhält man immer eine oder zwei Lösungen. Eine Lösung entsteht, wenn b die Parallele eben berührt, dann werden $\beta = \gamma = 90^0$. In jedem andern Falle erhält man zwei Lösungen, und zwar wegen der zwei Schnittpunkte C_1 und C_2 beiderseits der Senkrechten mit je einem stumpfen und einem spitzen Winkel (β_1 oder β_2).

Aufgabe 321. Man soll ein Paralleltrapez konstruieren, in welchem zwei Seiten und alle vier Winkel gegeben sind.

Erkl. 706. Die beiden ersten Fälle nebenstehender Aufgabe liefern eindeutige Konstruktionen und deshalb auch unbeschränkte Kongruenzsätze, wie in Antwort der Frage 201 durchgeführt wurde. Wegen des dritten Falles aber kann der Kongruenzsatz nicht allgemein auf die Gleichheit zweier Seiten und der vier Winkel gestützt werden. Denn wenn der Zufall eintritt, dass aus den gegebenen beiden Schenkeln mit den vier Winkeln überhaupt ein

Auflösung. Bei dieser Aufgabe sind dreierlei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich eine Grundseite und ein Schenkel, oder zwei Grundseiten oder zwei Schenkel gegeben sind.

1) Sind a, b die gegebenen Stücke, also eine Grundseite und ein Schenkel, so kann man unmittelbar die Punkte A und B festlegen, dann mittels $\sphericalangle\ \beta$ die Richtung der Seite b und mittels deren Grösse auch Punkt C. Dann ist d durch den Winkel α,

Trapez konstruiert werden kann, so gibt es aus diesen gleichen Stücken nicht nur eines, sondern unbegrenzt viele. Es kann also wieder nicht ausgesagt werden, dass zwei Trapeze, welche diese beiden Schenkelseiten und diese vier Winkel gemeinsam haben, zur Deckung gebracht werden könnten.

Erkl. 707. Weiteres Verständnis über das eigentümliche Verhalten der nebenstehenden Aufgabe erhält man durch Betrachtung des Teildreiecks AED in Figur 324. Dieses Dreieck nämlich ist schon eindeutig bestimmt durch die vier Trapezwinkel und einen Schenkel. Denn sein $\sphericalangle A$ ist α, $\sphericalangle E = \beta$,

$$\sphericalangle D = CDA - CDE = \delta - CBE = \delta - \beta$$
$$= 180 - \alpha - \beta = 180 - (\alpha + \beta).$$

Es ist also umgekehrt durch einen Schenkel und die vier Winkel eines Trapezes die Grösse des zweiten Schenkels bereits eindeutig festgelegt, und es kann daher zu diesen Stücken nicht eine willkürliche zweite Schenkelgrösse als weiteres gegebenes Stück hinzutreten. Vielmehr muss, wenn ein Schenkel und die vier Winkel gegeben sind, irgend eine Längenangabe über eine der Grundseiten bekannt sein, um das verlangte Trapez mit den gegebenen vier Winkeln und einem Schenkel vollenden zu können.

c durch den Winkel γ bestimmt, also auch ihr Schnittpunkt D.

2) Sind a, c die gegebenen Stücke, also zwei Grundseiten, so kann man an einer Grundseite die beiderseitigen Winkel antragen und hat dann in den Winkelraum dieser beiden Seiten b und d die dritte Seite c von gegebener Grösse parallel der Grundseite einzutragen, wie solches in den Aufgaben 54 und 316 geschehen ist.

3) Sind b und d die gegebenen Stücke, also zwei Schenkelseiten und die vier Winkel vorausbestimmt, so wird man in der gleichen Weise verfahren, wie im vorigen Falle, nämlich an einem gegebenen Schenkel die beiden Winkel antragen und dann zwischen deren parallele Schenkel die gegebene Strecke unter verlangtem Winkel einzutragen versuchen. Wie aber aus Aufgabe 55 und Satz 32 hervorgeht, haben alle gleichlangen Strecken, welche zwischen zwei Parallelen eingetragen sind, auch ihrerseits eindeutig bestimmte Winkel mit beiden Parallelen, nämlich einen ganz bestimmten spitzen mit der einen und einen ganz bestimmten stumpfen mit der andern Parallelen. Wenn also nicht zufällig die gegebenen beiden übrigen Winkel diese sind, so ist die Aufgabe unmöglich zu lösen. Ist aber zufällig der richtige Winkel gegeben, unter welchem die gegebene Strecke c zwischen die Parallelen $a \parallel c$ eingetragen werden kann, so ist nicht nur eine, sondern jede Lage der Geraden c parallel dieser Richtung der Aufgabe genügend. Man erhält also entweder gar keine, oder eine unbegrenzte Anzahl von Lösungen.

Aufgabe 322. Man soll ein Antiparallelogramm konstruieren, von welchem zweierlei Seiten und ein Winkel, also alle vier Winkel gegeben sind.

Erkl. 708. In beiden Fällen nebenstehender Auflösung erhält man nur eine einzige Lösung, und dementsprechend auch einen unbeschränkten Kongruenzsatz für Antiparallelogramme, welche in zwei Seiten und den Winkeln übereinstimmen.

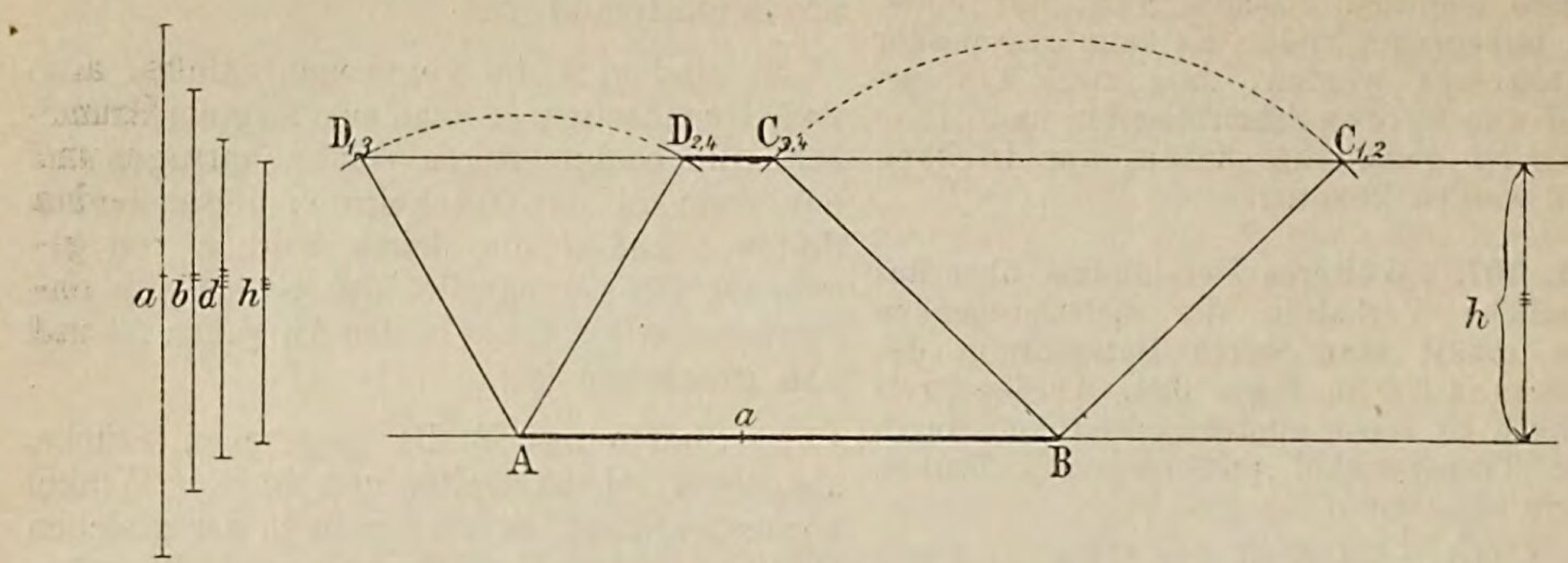
Auflösung. Da im Antiparallelogramm die beiden Schenkel gleich sind, so kann der dritte Fall der vorigen Aufgabe 321 gar nicht eintreten. Man hat also entweder eine Grundseite und einen Schenkel, oder zwei Grundseiten als gegebene Stücke, und verfährt beidemale genau wie im ersten und zweiten Falle der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 323. Man soll ein Paralleltrapez konstruieren, von welchem die Höhe und drei Seiten gegeben sind.

Erkl. 709. Da drei Seiten nur in vier verschiedene Gruppen sich verteilen können, so hat man den ersten Fall nebenstehender Aufgabe,

Auflösung. Durch die Höhe ist der Abstand der parallelen Grundseiten gegeben, so dass diese sofort der Richtung nach gezeichnet werden können. Da ferner unter drei Seiten mindestens eine Grundseite sein muss, so kann man die Punkte A und B festlegen,

Figur 327.



wenn die Seiten sind a, b, c oder a, c, d; den zweiten, wenn die gegebenen Seiten sind a, b, d oder b, c, d.

Erkl. 709 a. In Figur 327 ist AB die gegebene Grundseite. Durch die Bogen um B und A entstehen zweierlei Endpunkte C und D. Wäre Seite c gegeben, so würde um A kein Kreisbogen zu beschreiben sein, sondern $CD = c$ abzutragen. Im vorliegenden Falle erhält man vier Trapeze, nämlich zu jeder Ecke C einmal die eine und einmal die andere Ecke D. Die entstehenden Vierecke sind also nach der Bezeichnungsweise in der Figur:

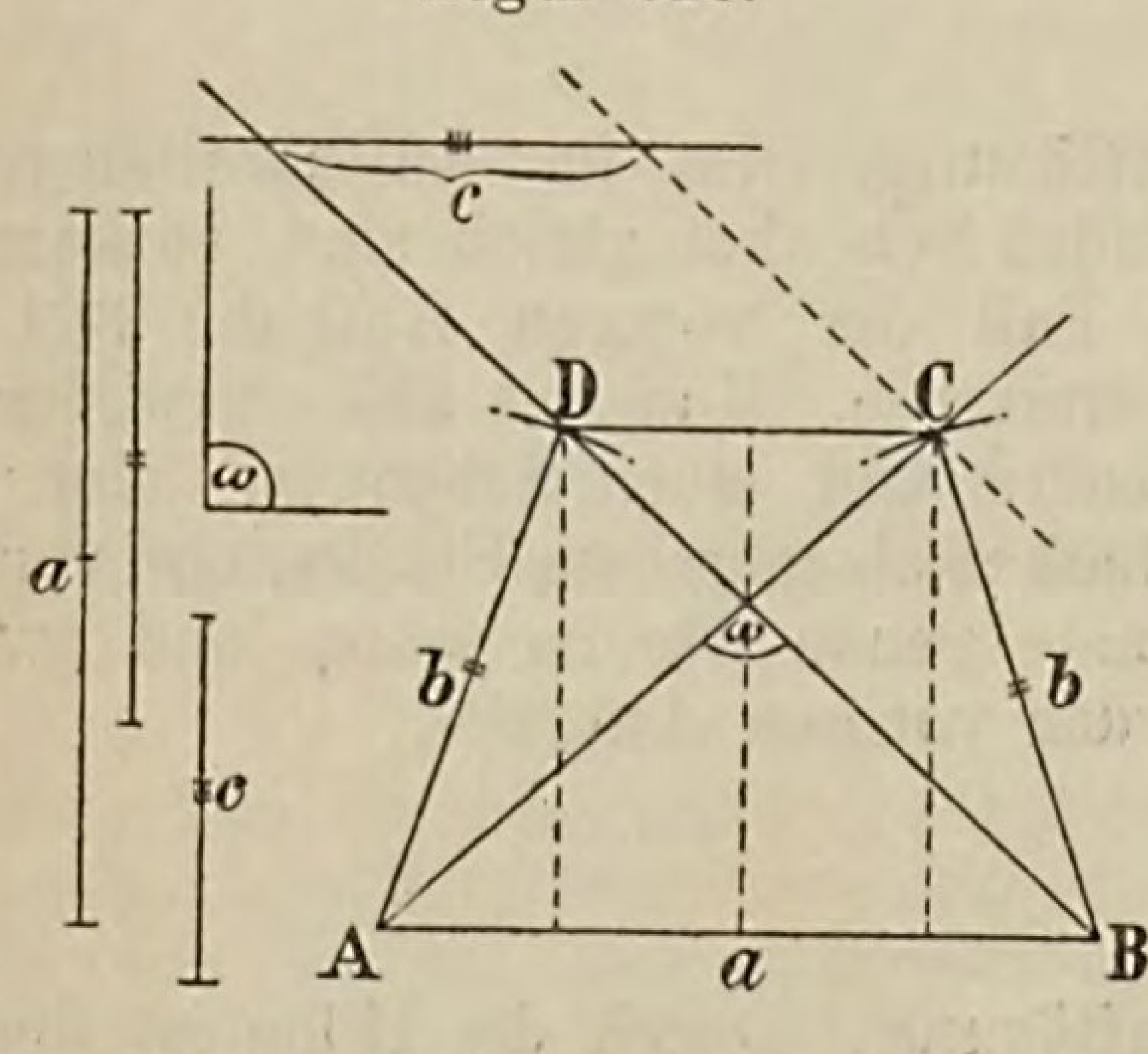
$$ABC_1D_1,\ ABC_2D_2,\ ABC_3D_3,\ ABC_4D_4.$$

und durch Kreisbogen um den einen Endpunkt mit einer Schenkelseite als Radius den einen Endpunkt der andern Grundseite bestimmen. Der andere Endpunkt derselben wird gefunden — wenn auch die zweite Grundseite gegeben ist, durch Abtragen derselben auf der zweiten Parallelen —, wenn die zweite Schenkelseite gegeben ist, durch einen ebensolchen Kreisbogen um den andern Endpunkt der ersten Grundseite (s. Fig. 327).

Man erhält zwei Lösungen, wenn ausser der Höhe zwei Grundseiten und ein Schenkel gegeben sind; vier Lösungen, wenn zwei Schenkel und eine Grundseite gegeben sind. Die gegebene Höhe ist unterste Grenze für die Länge der Schenkel; jede Schenkellänge muss gleich oder grösser sein, wie die Höhe.

Aufgabe 324. Man soll ein Antiparallelogramm konstruieren, von welchem zwei Seiten und der Schnittwinkel der Diagonalen gegeben sind.

Figur 328.



Erkl. 710. In Figur 328 sind beide Fälle der nebenstehenden Aufgabe gleichzeitig dargestellt. Die zweite Grundseite CD kann, wenn sie gegeben ist, auf verschiedene Weise angetragen werden. Ausser am Schenkel BD, auch an AC, oder es kann auf AB selbst ihre

Auflösung. Unter den zweierlei Seiten des Antiparallelogramms ist jedenfalls eine Grundseite. Man kennt also in dem von dieser Grundseite und den Diagonalen gebildeten gleichschenkligen Dreieck die Grundseite und den Winkel an der Spitze, also alle Winkel, so dass dasselbe konstruierbar ist aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Sodann ist die zweite gegebene Seite anzutragen. Ist diese die zweite Grundseite, so ist ihre Länge nach Aufgabe 54 parallel der ersten in den Scheitelwinkel der Diagonalen einzutragen; ist sie die Schenkellänge, so ist ihre Länge als Radius je eines Kreisbogens um die Grundseiteneckpunkte zu wählen, und deren Schnittpunkte mit den Schenkeln des Scheitelwinkels der Diagonalen sind als Eckpunkte der zweiten Grundseite zu bezeichnen.

Hälfte rechts und links vom Mittelpunkt angetragen werden und durch die Parallelen zur Mittelsenkrechten die Punkte C und D erhalten werden. — Sind die Schenkel gegeben, so kann man beide mittels Kreisbögen abtragen, oder nur einen, und dann den andern mittels der Parallelen zu AB.

Aufgabe 325. Man soll ein Antiparallelogramm konstruieren, von welchem die drei Seitenlängen gegeben sind.

Auflösung. Man verfahre wie in Aufgabe 318 und Antwort der Frage 150, konstruiere also das gleichschenklige Dreieck AED aus Grundseite $a - c$ und Schenkeln b; ziehe sodann durch dessen Spitze eine Parallele DC zur Grundseite von der Länge c, und verlängere die Grundseite zur Länge $AB = a$.

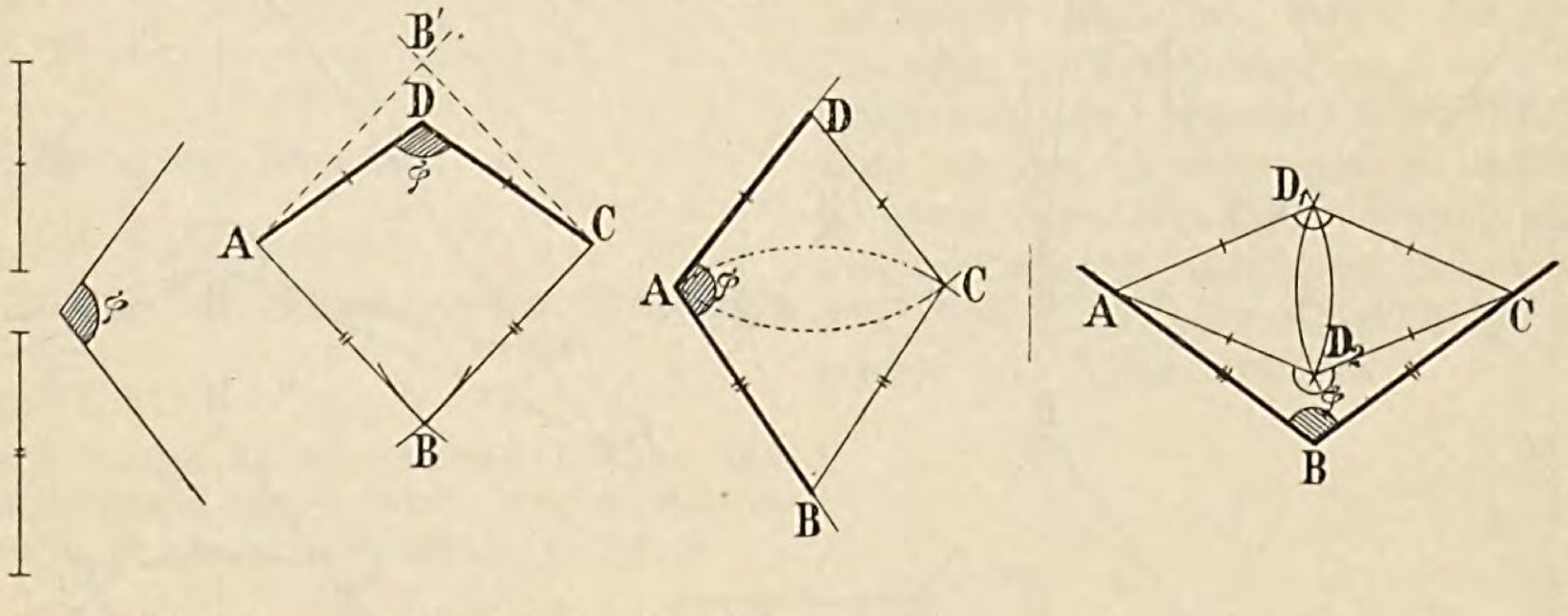
Aufgabe 326. Man soll ein Deltoid konstruieren, von welchem eine Seite und zwei, also alle vier Winkel gegeben sind.

Erkl. 711. Um alle vier Winkel des Deltoids zu finden, wenn zwei davon gegeben sind, beachte man, dass zu dem einen derselben ein gleichgrosser vorhanden sein muss, und dass der vierte Winkel die Summe der so erhaltenen drei ersten zu 360° ergänzt.

Auflösung. Man trägt an der gegebenen Seite in beiden Endpunkten die gegebenen Winkel an, auf dem Schenkel des zweiten die der ersten Seite gleichgrosse Seite, und in deren Endpunkt den dem ersten gleichgrossen Winkel.

Man erhält nur eine einzige Lösung.

Figur 329.



Aufgabe 327. Man soll ein Deltoid konstruieren, von welchem zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind.

Erkl. 712. Wenn der gegebene Winkel von den beiden kleineren Winkeln eingeschlossen wird, so umfassen beide Kreisbögen mit den grösseren Seiten als Radien dessen Scheitel; also liegt der zweite Schnittpunkt B' der beiden Kreise nicht in der Winkelöffnung des gegebenen Winkels, und deshalb ist nur der eine Schnittpunkt der beiden Kreise verwendbar. Denn für das mit dem andern Schnittpunkt gebildete Deltoid wäre der Gegenwinkel nicht mehr Innenwinkel. Dagegen ist die Aufgabe in diesem

Auflösung. Bei dieser Aufgabe sind dreierlei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich der gegebene Winkel zu Schenkeln haben soll die beiden kleineren Seiten, oder eine grössere und eine kleinere, oder die beiden grösseren Seiten.

1) Sind die beiden kleinen Seiten die einschliessenden des Winkels, so trägt man ihre Länge auf den Schenkeln des gegebenen Winkels ab und beschreibt um die Endpunkte Kreisbögen mit Radien, beidemale gleich der grösseren Seitenlänge. Der in

Falle immer lösbar, welche Grösse auch die gegebenen Stücke erhalten.

Erkl. 713. Auch im zweiten Falle erhält man bei jeglicher Grösse der gegebenen Stücke stets eine und zwar eine einzige Lösung, denn der zweite Schnittpunkt der zu zeichnenden Kreisbögen ist eben der Scheitel des gegebenen Winkels selbst.

Erkl. 714. Im dritten Falle können zwar zwei Lösungen entstehen, nämlich ein Deltoid mit einspringendem und eines mit ausspringendem Winkel; aber es ist demgegenüber eine Beschränkung der Lösbarkeit vorhanden, dass nämlich die kürzere Seitenlänge nicht kleiner werden darf, als die Hälfte der Verbindungslinie AC. Würde nämlich die kürzere Seite gleich oder kleiner als $\frac{AC}{2}$, so würden sich die beiden Kreise nur berühren oder gar nicht treffen, und man erhielte kein Viereck mehr.

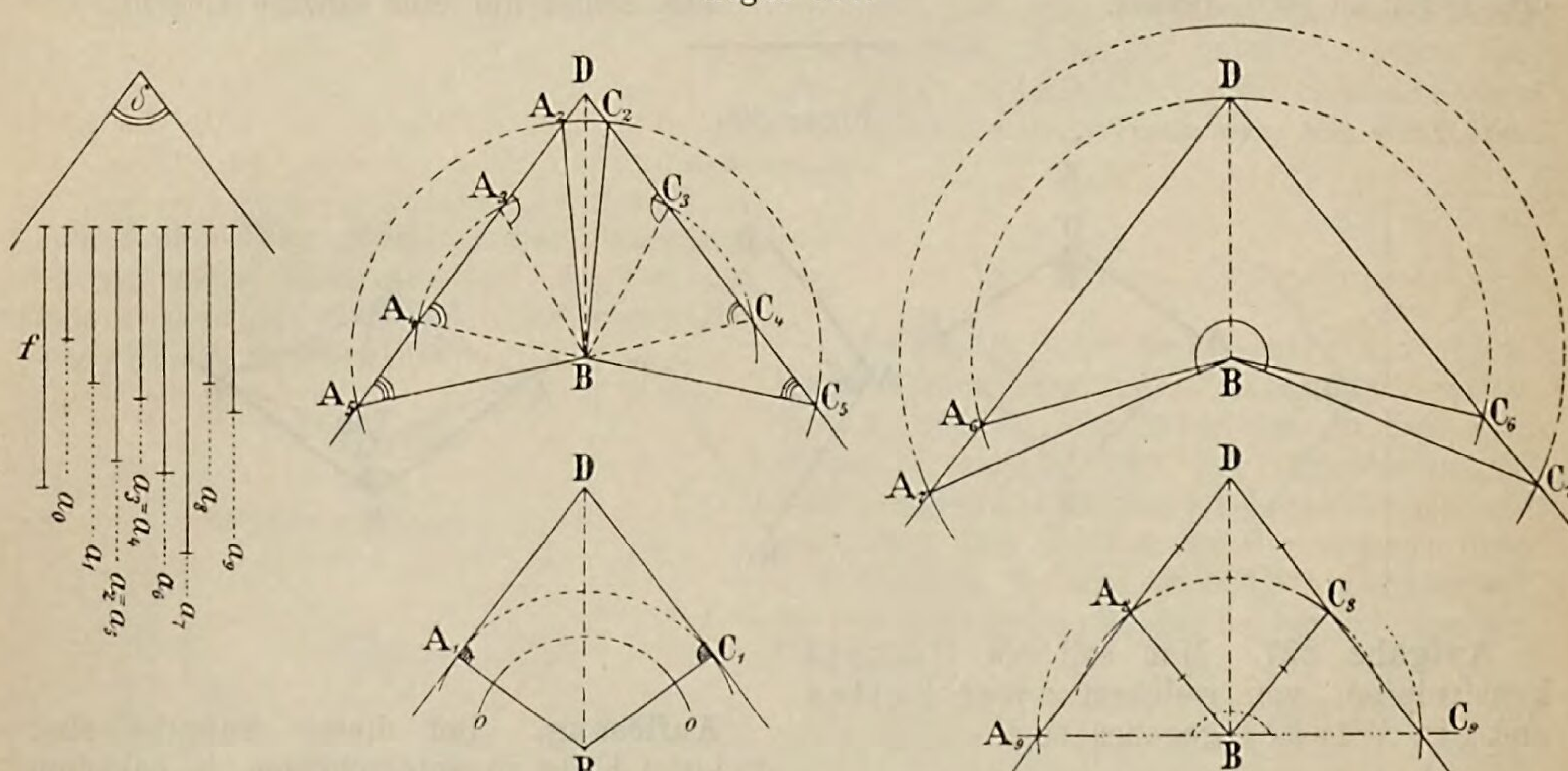
Werden einspringende Winkel ausgeschlossen, so erhielte man in jeglichem der drei Fälle eine einzige Lösung, in beiden ersten Fällen ohne Beschränkung der gegebenen Längen, im letzteren mit der angegebenen unteren Grenze für die kürzere Seite.

der Winkelöffnung liegende Schnittpunkt ist die vierte Ecke des Deltoids.

2) Sind die einschliessenden Seiten des gegebenen Winkels eine grosse und eine kleine Seite, so trägt man ebenfalls diese Längen auf den Schenkeln des gegebenen Winkels ab und beschreibt um die Endpunkte Kreisbögen mit Radius, einmal gleich der anstossenden kleineren, dann gleich der anstossenden grösseren Seite.

3) Sind die beiden grösseren Seiten die einschliessenden des Winkels, so trägt man dieselben auf den Schenkeln des gegebenen Winkels ab und beschreibt um die Endpunkte Kreisbögen mit Radien, beidemale gleich der kürzeren Seitenlänge. Diese Kreise umfassen aber nicht den Scheitel des Winkels selbst, so dass man zwei Schnittpunkte der Kreise innerhalb der Winkelöffnung erhält, also zwei Deltoide, welche den gegebenen Winkel enthalten als Innenwinkel der langen Seiten, die verlangten langen Seiten und die kurzen. Davon hat aber das eine als Innenwinkel der kürzeren Seiten einen hohlen, das andere einen erhabenen Winkel.

Figur 330.



Aufgabe 328. Man soll ein Deltoid konstruieren, von welchem gegeben sind die eine Seitenlänge a, der von den beiden andern Seiten eingeschlossene Winkel δ und die Diagonale f der ungleichen Winkel.

Erkl. 715. Ebenso wie in Antwort der Frage 119 durchgeführt wurde, haben die in

Auflösung. Da die Diagonale durch die ungleichen Winkel Symmetrieachse des Deltoids ist, also die beiden ungleichen Winkel halbiert, so kennt man von jedem der beiden symmetrischen Teildreiecke des Deltoids die gemeinsame Seite f, eine zweite Seite $= a$

den fünf Fällen nebenstehender Aufgabe entstehenden Lösungen besondere Eigenschaften.

Die eine Lösung (1), welche für $a = s$ entsteht, ist ein Deltoid mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln.

Von den beiden Lösungen, welche je für $s < a < c$ entstehen, hat die eine (2, 3) jedenfalls zwei stumpfe, die andere (4, 5) zwei spitze symmetrische Winkel. Die letztere (5) könnte daher am Punkte B einen einspringenden Winkel erhalten.

Die Lösung (6), welche für $a = f$ ensteht, hat infolgedessen besondere Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten. Sie hat nicht immer, wie in Figur 330, bei B einen einspringenden Winkel.

Nur für die Bedingung $a > f$ entsteht der allgemeine Fall des Deltoids in einziger Lösung. Dabei wird aber eine grössere Beschränkung für den Winkel δ eintreten, falls das Deltoid mit einspringendem Winkel ausgeschlossen bleiben soll. Ist dies aber nicht der Fall, so ist diese Aufgabe stets ohne Ausnahme möglich.

Erkl. 716. Mit Zuhilfenahme goniometrischer Funktionen kann man finden:

$$\text{für } a < f \sin\frac{\delta}{2} \text{ (0)} \cdots$$

keine Lösung,

$$\text{für } a = f \sin\frac{\delta}{2} \text{ (1)} \cdots$$

eine Lösnng mit rechten Gegenwinkeln,

$$\text{für } f > a > f \sin\frac{\delta}{2} \text{ (2,5)} \cdots$$

zwei Lösungen, und zwar davon:

$$\text{für } a = \frac{f}{2\cos\frac{\delta}{2}} \text{ (8)} \cdots$$

die eine Lösung ein Rhombus, oder,

$$\text{für } a > f\,tg\frac{\delta}{2} \text{ (5)} \cdots$$

die eine Lösung mit einspringendem Winkel β;

$$\text{für } a = f\,tg\frac{\delta}{2} \text{ (9)} \cdots$$

nnr eine Lösung, da die zweite Lösung ein gleichschenkliges Dreieck wird, wegen des in diesem Falle gestreckten Winkels β.

und den derselben gegenüberliegenden Winkel, nämlich die Hälfte des gegebenen $= \frac{\delta}{2}$. Man kann also beide Teildreiecke (und damit das Deltoid) konstruieren aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel.

Man trage also den gegebenen Winkel δ ab, zeichne seine Winkelhalbierende und mache auf derselben eine Strecke DB gleich der gegebenen Diagonalen, setze im Endpunkt B ein und schneide die Schenkel durch zwei Kreisbögen mit dem gemeinsamen Radius gleich der gegebenen Seite a. Die symmetrischen Schnittpunkte A und C mit den Schenkeln sind die andern Eckpunkte des gesuchten Deltoids.

Da die Konstruktion durch Anwendung der in Antwort der Frage 119 enthaltenen Konstruktion gelöst wird, so treten auch alle jene fünf verschiedenen Fälle auf, dass man nämlich erhalten kann:

0,	1 (1),	2 (2-5),	1 (6),	1 (7)

Lösungen für:

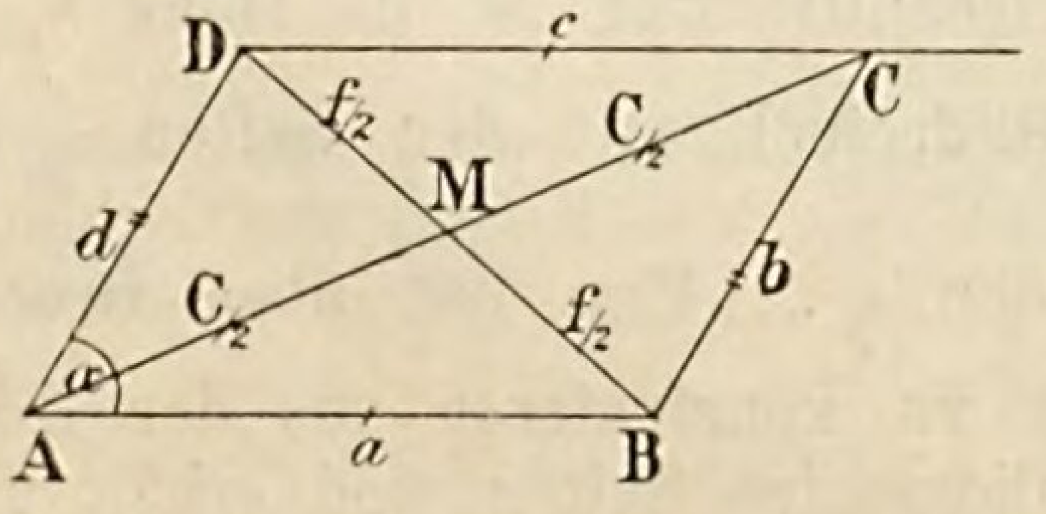
$a < s$.	$a = s$,	$s < a < f$,	$a = f$,	$a > f$

wobei die Bezeichnungen mit kleinen Ziffern für a, c und s die in Figur 330 angewandten sind: s bedeutet die Länge der Senkrechten von B auf die Schenkel der beiden Winkelhälften $\frac{\delta}{2}$ bei D.

Unter dem dritten dieser Fälle ist auch derjenige enthalten, wobei das Deltoid ein Rhombus wird, indem $a = b = c = d$ wird. Ziffernmässige Festsetzung der für die Einzelfälle nötigen Beziehungen zwischen den gegebenen Stücken a, f, δ sind nur mittels goniometrischer Hilfsmittel möglich. (Vergl. Erkl. 716 und Kleyers Lehrbücher der Goniometrie und Trigonometrie.)

Aufgabe 329. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, von welchem die zwei Seitengrössen und ein Winkel gegeben sind.

Figur 331.



Auflösung. Man trägt (Figur 331) auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die anstossenden Seiten ab und beschreibt um die Endpunkte Kreisbögen je mit der andern Seite. Der Schnittpunkt beider Kreisbögen ist der vierte Eckpunkt.

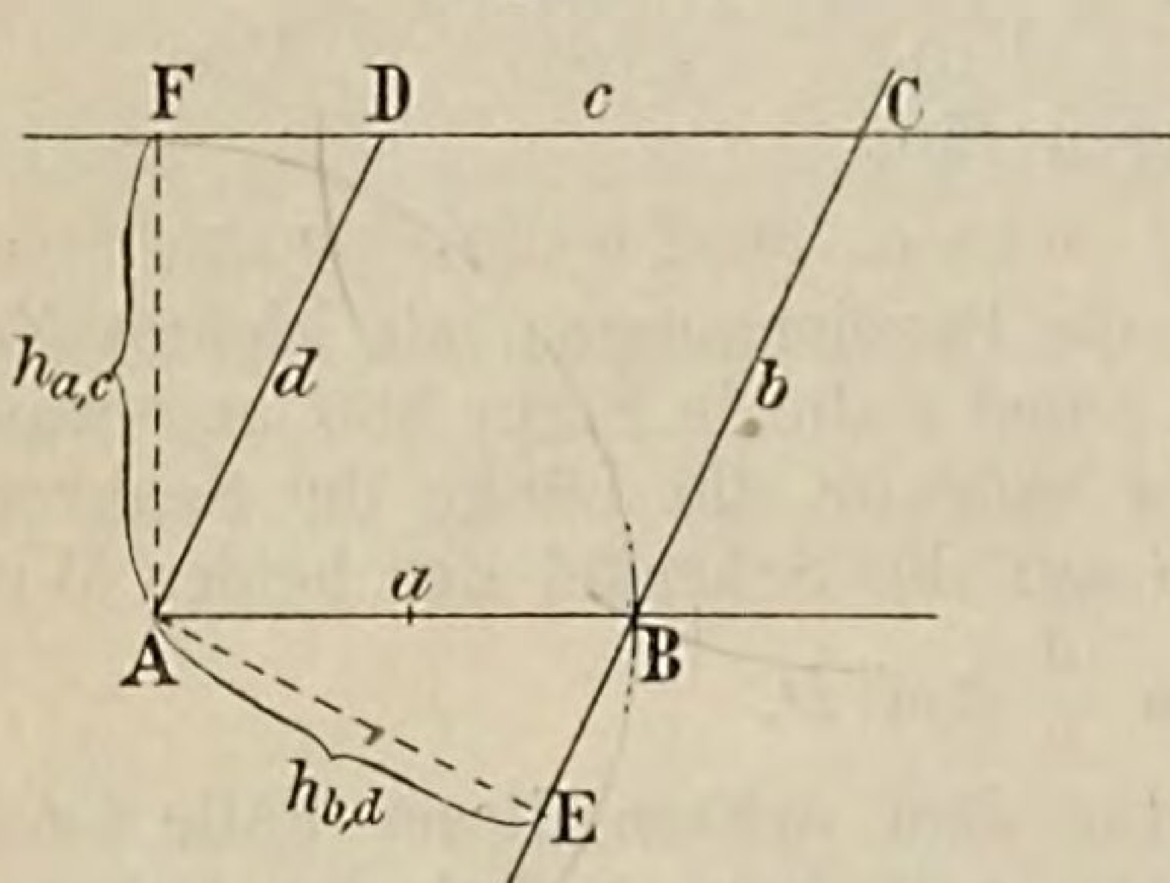
Aufgabe 330. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, von welchem eine Seite a und die beiden Diagonalen e und f gegeben sind.

Erkl. 717. Da aus diesen Stücken nur ein einziges Parallelogramm möglich ist, so kann man auch sagen, dass Parallelogramme kongruent sind, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und beiden Diagonalen.

Auflösung. Die Ecken an einer Seite a (Figur 331) bilden mit dem Diagonalenschnittpunkt M ein Dreieck, dessen Seiten sind $a, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}$. Man kann also dieses Dreieck eindeutig konstruieren aus seinen drei Seiten und erhält die beiden anderen Eckpunkte des Parallelogramms, indem man die Seiten $\frac{e}{2}$ und $\frac{f}{2}$ um sich selbst über M verlängert.

Aufgabe 331. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, von welchem eine Seite a, sowie die beiden Höhen $h_{a,c}$ und $h_{b,d}$ gegeben sind.

Figur 332.



Erkl. 718. Damit die Aufgabe überhaupt ausführbar ist, muss a grösser sein, als die nicht zugehörige Höhe $h_{b,d}$. Wenn dies aber zutrifft, so ist nur einerlei Parallelogramm möglich zu konstruieren. Daher kann man wieder sagen, dass Parallelogramme kongruent sind, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und beiden Höhen.

Erkl. 719. Die Dreiecke ABE und ADF enthalten gleichgrosse Winkel: $AEB = 90^0 = AFD$, $ABE = 180^0 - \beta = 180^0 - \delta = ADF$, $EAB = 90^0 - \alpha = FAD$, aber wegen $h_{a,c} \gtreqless h_{b,d}$ drei im gleichen Sinne ungleiche Seiten.

Auflösung. Zeichnet man beide Höhen eines Parallelogramms vom Eckpunkte A aus, so bildet die Seite a mit der Höhe $h_{b,d}$ ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem bekannt sind a, $h_{b,d}$ und $\sphericalangle(h, b) = 90^0$. Man kann also dieses Dreieck aus zwei Seiten und dem der grösseren von beiden gegenüberliegenden Winkel eindeutig konstruieren und hat dann noch die zweite Parallele zu a im Abstande $h_{a,c}$ zu zeichnen.

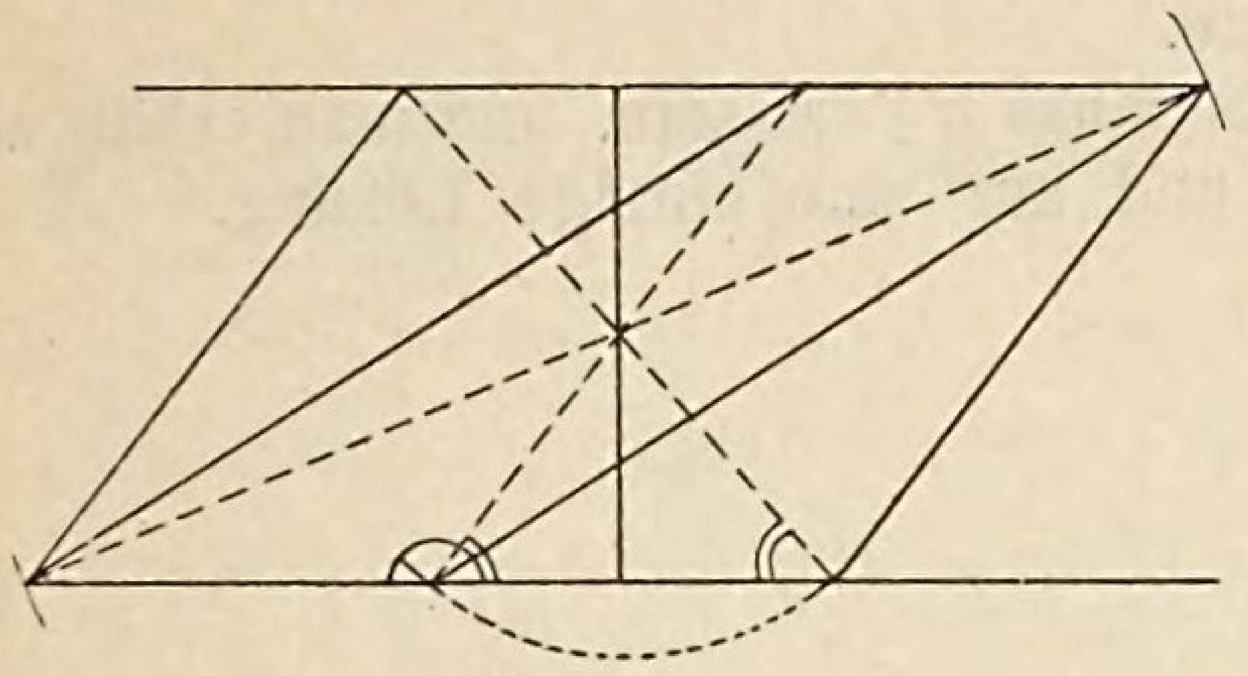
Man mache also auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels E eine Strecke $EA = h_{b,d}$ und schneide den andern Schenkel durch einen Kreisbogen um A mit Radius a. Auf dieser Verbindungsstrecke AB errichte man in A eine Senkrechte von der Länge $AF = h_{a,c}$ und ziehe durch F die Parallele zu AB, durch A diejenige zu EBC.

Aufgabe 332. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, von welchem die beiden Diagonalen und eine Höhe h gegeben sind.

Erkl. 720. Es ist gleichgültig, welches der Teildreiecke ABM oder CBM auf nebenstehende Weise konstruiert wird, denn das erstere hat zur Höhe $\frac{1}{2} h_{a,c}$, das letztere $\frac{1}{2} h_{b,d}$. Ob also die gegebene Höhe $h_{a,c}$ oder $h_{b,d}$ bedeuten soll, hat auf die Gestalt des Parallelogramms keinen Einfluss.

Auflösung. Zieht man durch den Diagonalenschnittpunkt M die Höhe h, so hat das Teildreieck mit den Seiten $\frac{e}{2}$ und $\frac{f}{2}$ die Höhe $\frac{h}{2}$. Man hat also dieses Teildreieck zu konstruieren aus der Höhe und den anliegenden Seiten, und erhält dann die

Figur 333.



Erkl. 721. Da man aus einer Höhe und zwei Seiten zweierlei Dreiecke zeichnen kann, eines mit spitzem und eines mit stumpfem Winkel an der Grundseite, so erhält man auch zwei Parallelogramme, welche dieselbe Höhe h haben und dieselben Diagonalen e und f. Von letzteren ist die grössere wegen des spitzen Winkels (nach Satz 53) beiden Parallelogrammen gemeinsam, die kürzere Diagonale bildet einmal einen spitzen, und einmal einen (zu ersterem supplementären) stumpfen Winkel mit den beiden Grundseiten.

übrigen Ecken des Parallelogramms auf beliebige Weise.

Man errichte also auf einer beliebigen Linie als Grundseite eine Senkrechte von der Länge h und beschreibe um ihren Mittelpunkt M Kreisbögen mit den Radien $\frac{e}{2}$ und $\frac{f}{2}$. Werden die Verbindungsstrecken von deren Schnittpunkten auf der Grundseite nach M um sich selbst verlängert, so liegen die Endpunkte zugleich auf einer Parallelen zur Grundseite durch den Endpunkt der Höhe.

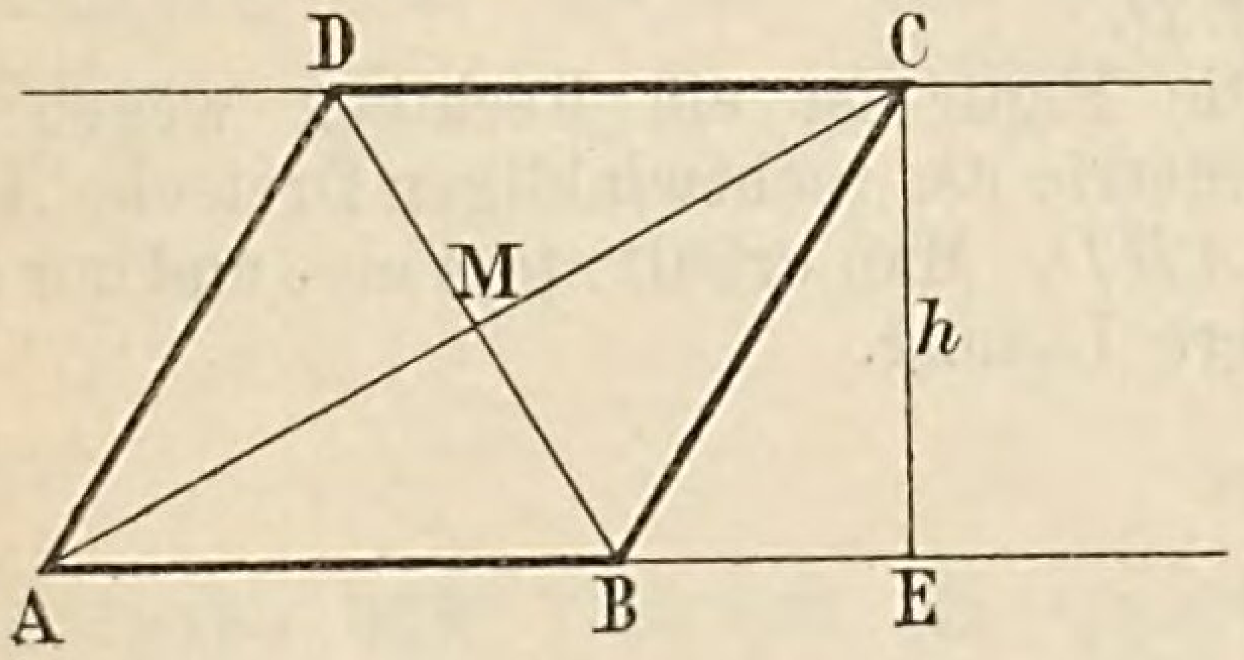
Man erhält stets zwei Lösungen, wenn die Bedingung erfüllt ist, dass $e > h < f$; sonst wäre die Aufgabe unmöglich.

Aufgabe 333. Man soll ein Rhombus konstruieren aus den beiden Diagonalen.

Auflösung. Man trage auf zwei einander senkrecht durchschneidenden Geraden vom Schnittpunkte aus die Stücke $\frac{e}{2}$ und $\frac{f}{2}$ je in entgegengesetzter Richtung ab und verbinde die Endpunkte.

Aufgabe 334. Man soll ein Rhombus konstruieren, von dem eine Diagonale und die Höhe h gegeben sind.

Figur 334.



Erkl. 722. Die entstehende Figur hat jeweils die verlangte Höhe h, die verlangte Diagonale e, und ist ein Rhombus nach Antwort 3 der Frage 173, weil $MA = MC$ und $MB = MD$.

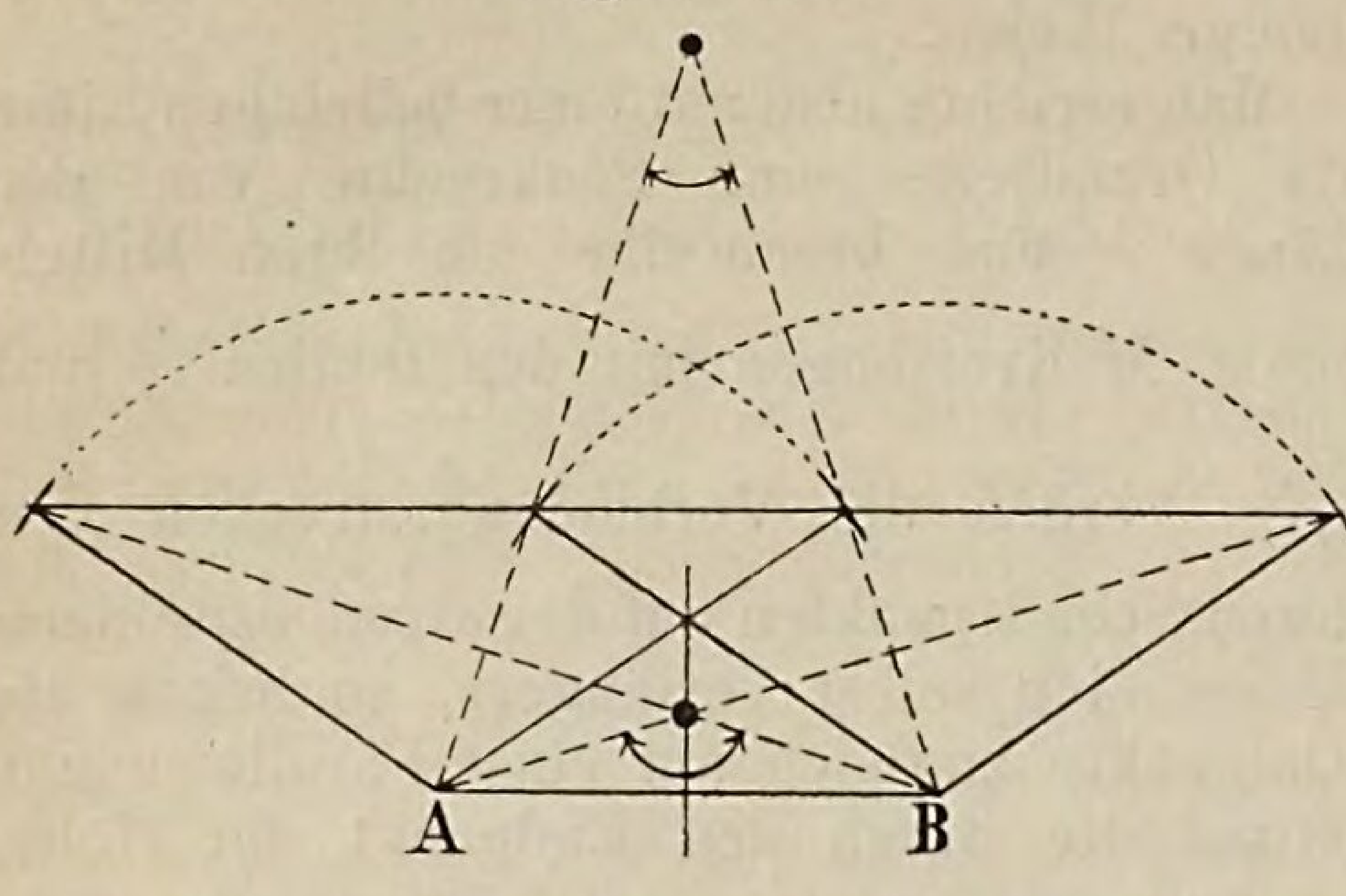
Auflösung. Man zeichne zwei Parallelen im Abstande h, trage zwischen dieselben die Diagonale e beliebig ein, konstruiere deren Mittelsenkrechte f und verbinde die Schnittpunkte derselben auf den Parallelen.

Oder: Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ACE mit Kathete $EC = h$ und Hypotenuse $AC = e$, errichte auf AC die Mittelsenkrechte $MB = MD$ und verbinde $ABCD$.

Aufgabe 335. Man soll ein Rhombus konstruieren, von dem Seite a und Höhe h gegeben sind.

Auflösung. Man ziehe zwei Parallelen im Abstande h, trage auf einer derselben an beliebiger Stelle die Seite a auf, trage dieselbe Strecke von beiden Eckpunkten aus zwischen

Figur 335.



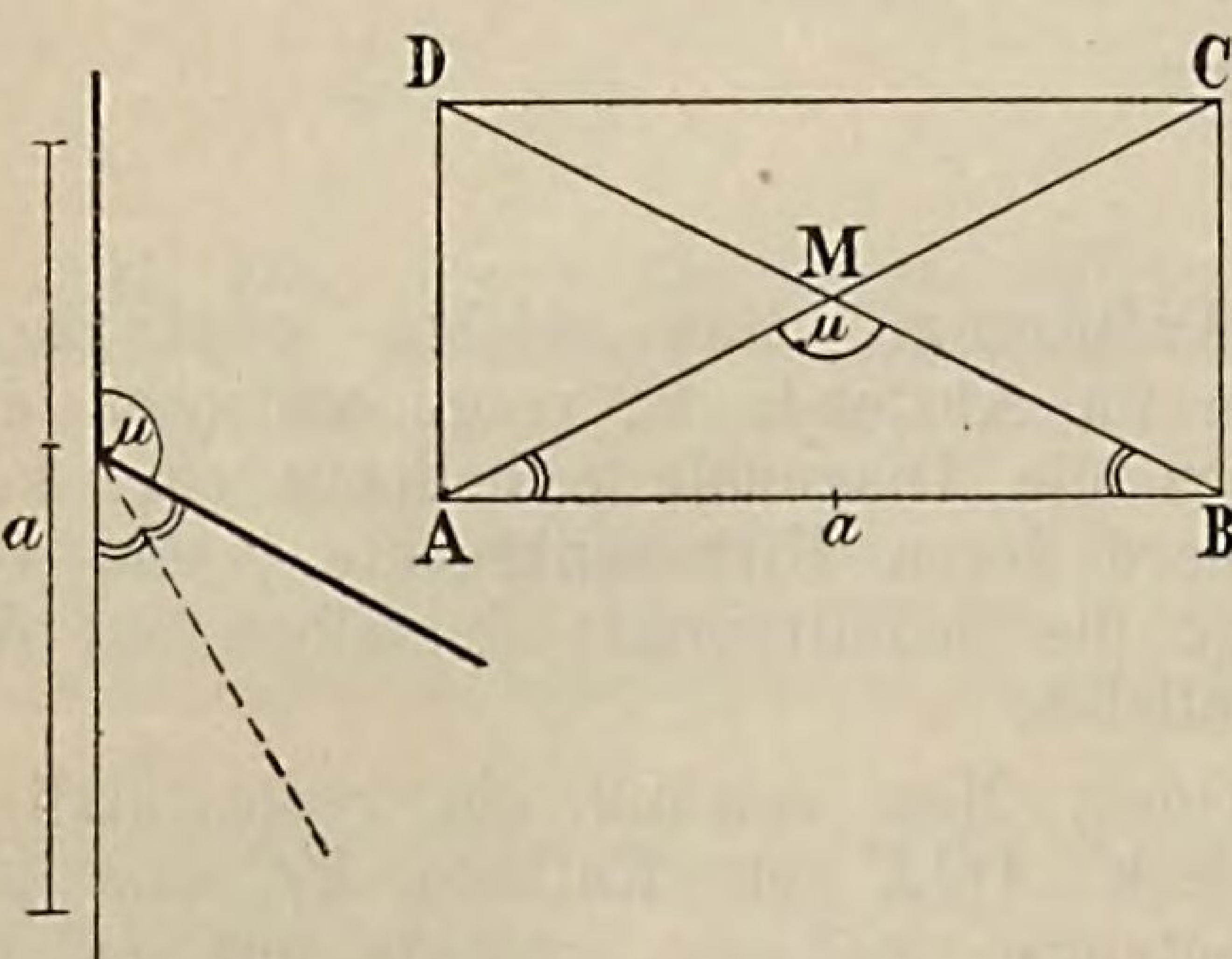
den Parallelen ein, und verbinde die Endpunkte.

Es muss $a > h$ sein, und man erhält stets eine und nur eine einzige Lösung.

Erkl. 723. Obwohl beim Eintragen der Strecke a zwischen der Parallelen zwei Schnittpunkte auf der zweiten Parallelen entstehen, ist doch nur einerlei Lösung vorhanden, denn durch Umwendung um die Mittelsenkrechte der Seite a oder durch Umdrehung um den Schnittpunkt entsprechender Diagonalen, kommen beide Rhomben zur kongruenten Deckung.

Aufgabe 336. Man soll ein Rechteck zeichnen, von welchem gegeben ist eine Seite a und der Schnittwinkel μ der Diagonalen über dieser Seite.

Figur 336.



Auflösung. Da die Seite a mit dem Winkel μ als Winkel an der Spitze ein gleichwinkliges Dreieck bildet, so findet man die Winkel der Diagonale mit a als:

$$\frac{1}{2}(180 - \mu).$$

Man trage also an der Seite a an beiden Endpunkten A und B die Hälfte des Supplementwinkels von μ an, schneide die Schenkel durch Senkrechte AD und BC in denselben Endpunkten und verbinde die Schnittpunkte $ABCD$.

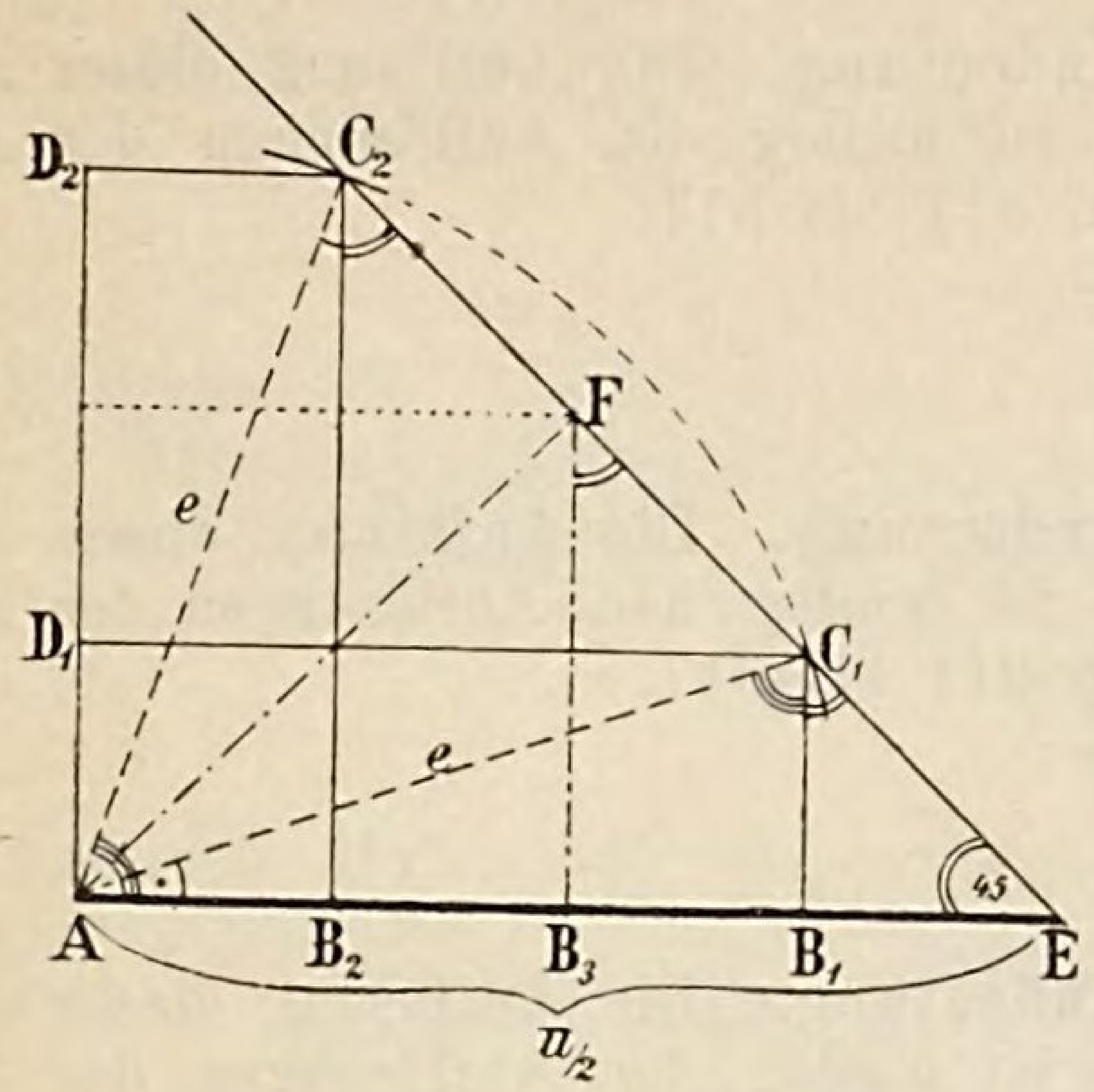
Die Figur ist ein Rechteck wegen der Symmetrie der rechtwinkligen Dreiecke ABC und ABD. Man erhält stets eine und nur eine einzige Lösung.

Erkl. 724. Auch beim Rhombus und Rechteck könnte man in allen den Fällen, wo eindeutige Lösungen der Konstruktionsaufgaben erfolgen, die Sätze aussprechen, dass zwei Rhomben bzw. Rechtecke kongruent sind, wenn sie in den jeweils gegebenen Stücken übereinstimmen

Aufgabe 337. Man soll ein Rechteck zeichnen, von welchem gegeben ist Umfang u und Diagonalenlänge e.

Auflösung. Die Hälfte des Umfanges ist die Summe der beiden Katheten eines der rechtwinkligen Dreiecke, in welche das Rechteck durch eine Diagonale geteilt wird. Man kann daher dieses Teildreieck zeichnen

Figur 337.



Erkl. 725. Dass die Rechtecke $AB_1C_1D_1$ und $AB_2C_2D_2$ kongruent sind, kann sowohl aus der Auflösung der Aufgabe 161 entnommen werden, oder auch folgendermassen direkt gezeigt werden, da $AC_1C_2 = AC_2C_1$. In den Dreiecken AB_1C_1 und AB_2C_2 ist $\sphericalangle B = 90^0$, und es ist $\sphericalangle AC_1B_1 = 180^0 - AC_1C_2 - B_1C_1E = 180^0 - AC_2C_1 - 45^0 = 135^0 - AC_2C_1$ und $\sphericalangle B_2AC_2 = 90^0 - AC_2B_2 = 90^0 - (AC_2C_1 - B_2C_2C_1) = 90^0 - AC_2C_1 + 45^0$. Also ist auch $AC_1B_1 = B_2AC_2$ und auch $B_1AC_1 = B_2C_2A$, oder $\triangle AB_1C_1 \cong C_2B_2A$. Demnach ist aber auch Rechteck $A_1B_1C_1D_1 \cong AB_2C_2D_2$.

Erkl. 726. Dass für den Fall $C = AF$ ein Quadrat entsteht, folgt aus der Winkelgleichheit $FAB_3 = 90^0 - AEF = EFB_3 = AFB_3 = 45^0$. Demnach ist nämlich auch $AB_3 = FB_3$, also hat das Rechteck mit Seiten AB_3 und FB_3 vier gleiche Seiten, und ist ein Quadrat.

nach Aufgabe 161, und daraus das ganze Rechteck konstruieren.

Man trage also in Figur 337 an einer Strecke AE von der Länge $\frac{u}{2}$ einerseits im Punkte E den Winkel von 45^0 an und schneide dessen Schenkel durch einen um den andern Endpunkt A beschriebenen Kreisbogen mit Radius e. Vom Schnittpunkt C fälle man die Senkrechte CB auf AE und zeichne durch C die Parallele $CD \parallel BA$ und durch A die Senkrechte AD.

Die erhaltene Figur $ABCD$ ist ein Rechteck wegen der konstruierten vier rechten Winkel und besitzt die Länge e als Diagonale. Da ferner $CB \perp AB$ ist und $\sphericalangle AEC = 45^0$, so muss auch $\sphericalangle BCE = 45^0$ sein, also $CB = EB$, und $AB + BC = AB + BE = \frac{u}{2}$. Folglich $AB + BC + CD + DE = u$. Man erhält zwei kongruente Lösungen, wenn e grösser ist als die Senkrechte von A auf den Schenkel des Winkels von 45^0, keine Lösung, wenn e kleiner ist als diese Senkrechte, und eine Lösung, wenn e gleich dieser Senkrechten ist, nämlich dann ein Quadrat.

Aufgabe 338. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden von gegebenem Umfang u.

Auflösung. Man teile die Strecke u in vier gleiche Teile, errichte in zwei benachbarten Teilpunkten Senkrechte von der Länge $\frac{1}{4}u$ und verbinde deren Endpunkte.

Aufgabe 339. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden von gegebener Diagonale e.

Erkl. 727. Nach Nebenstehendem sind auch Quadrate kongruent, wenn sie gleiche Diagonalen haben.

Auflösung. Man errichte die Mittelsenkrechte auf $AC = e$, mache $MB = MC$, und verbinde die Eckpunkte $ABCD$. — Stets möglich mit einziger Lösung.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 340. Man soll ein Viereck konstruieren, von wechem gegeben sind eine Seite, beide Diagonalen und die von ihnen mit dieser Seite gebildeten Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 311 bis 317.

Aufgabe 341. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind die vier Seiten und eine Diagonale.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 311 bis 317.

Aufgabe 342. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind drei Seiten und beide Diagonalen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 311 bis 317.

Aufgabe 343. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Diagonale, drei Seiten und ein Winkel an der vierten Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 311 bis 317.

Aufgabe 344. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Diagonale, zwei Seiten und zwei Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 311 bis 317.

Aufgabe 345. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Diagonale, eine Seite und alle Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 311 bis 317.

Aufgabe 346. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind die Diagonalen und eine Seite und zwei Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 311 bis 317.

Aufgabe 347. Man soll ein Viereck konstruieren, von welchem gegeben sind die Diagonalen, zwei Seiten und ein Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 311 bis 317.

Aufgabe 348. Man soll ein Paralleltrapez konstruieren aus drei Seiten und einer Diagonale.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 318 bis 321.

Aufgabe 349. Man soll ein Paralleltrapez konstruieren aus zwei Seiten und beiden Diagonalen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 318 bis 321.

Aufgabe 350. Man soll ein Paralleltrapez konstruieren aus zwei Seiten, einer Diagonale und einem Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 318 bis 321.

Aufgabe 351. Man soll ein Paralleltrapez bilden aus einer Seite, einer Diagonale und allen vier Winkeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 318 bis 321.

Aufgabe 352. Man soll ein Paralleltrapez konstruieren aus einer Seite, beiden Diagonalen und einem Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 318 bis 321.

Aufgabe 353. Man soll ein Paralleltrapez konstruieren aus der Höhe, beiden Diagonalen und einer Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 323.

Aufgabe 354. Man soll ein Paralleltrapez konstruieren aus der Höhe, einer Diagonalen und zwei Seiten u. s. w.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 323.

Aufgabe 355. Man soll ein Parallelogramm konstruieren aus zwei Seitenlängen und der Diagonalen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 322 bis 324.

Aufgabe 356. Man soll ein Parallelogramm konstruieren aus einer Seite, einer Diagonale und den vier Winkeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 322 bis 324.

Aufgabe 357. Man soll ein Parallelogramm konstruieren aus der Höhe, einer Seite und der Diagonale.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 322 bis 324.

Aufgabe 358. Man soll ein Parallelogramm konstruieren aus der Höhe, einer Diagonale und den Winkeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 322 bis 324.

Aufgabe 359. Man soll ein Deltoid konstruieren, von welchem gegeben sind beide Diagonalen und ein Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 325 bis 328.

Aufgabe 360. Man soll ein Deltoid konstruieren, von welchem gegeben sind beide Diagonalen und eine Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 325 bis 328.

Aufgabe 361. Man soll ein Deltoid konstruieren, von welchem gegeben sind die Diagonale der gleichen Winkel, die Grösse dieser Winkel und eine Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 325 bis 328.

Aufgabe 362. Man soll ein Deltoid konstruieren, von welchem gegeben sind die Diagonale der ungleichen Winkel und alle Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 325 bis 328.

Aufgabe 363. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, von welchem gegeben sind der Schnittwinkel und die Länge beider Diagonalen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 329 bis 332.

Aufgabe 364. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, von welchem gegeben sind ein Teilwinkel zwischen Diagonale und Seite und beide Diagonalen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 329 bis 332.

Aufgabe 365. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, von welchem gegeben sind ein Winkel und beide Höhen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 329 bis 332.

Aufgabe 366. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, von welchem gegeben sind beide Höhen und ihr Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 329 bis 332.

Aufgabe 367. Man soll ein Rhombus konstruieren, von welchem gegeben ist eine Diagonale und ein Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 333 bis 335.

Aufgabe 368. Man soll ein Rhombus konstruieren, von welchem Höhe und Winkel gegeben sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 333 bis 335.

Aufgabe 369. Man soll ein Rhombus konstruieren, von welchem gegeben ist eine Diagonale und Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 333 bis 335.

Aufgabe 370. Man soll ein Rhombus konstruieren, von welchem gegeben ist eine Diagonale und ihr Winkel mit einer Höhe.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 333 bis 335.

Aufgabe 371. Man soll ein Rechteck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Diagonale und Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 336 bis 337.

Aufgabe 372. Man soll ein Rechteck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Höhe mit ihren Winkeln mit den Diagonalen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 336 bis 337.

Aufgabe 373. Man soll ein Rechteck konstruieren, von welchem gegeben sind Schnittwinkel und Längen der Diagonalen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 336 bis 337.

Aufgabe 374. Man soll ein Rechteck konstruieren, von welchem gegeben sind Umfang und Diagonalenwinkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 336 bis 337.

Aufgabe 375. Man soll ein Quadrat konstruieren, von welchem gegeben ist der Umfang eines der durch die Diagonalen gebildeten Teildreiecke.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 338 und 339.

Aufgabe 376. Man soll ein Quadrat konstruieren, von welchem gegeben ist die Summe von Diagonale und Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 338 und 339.

Aufgabe 377. Man soll ein Quadrat konstruieren, von welchem gegeben ist die Differenz von Diagonale und Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 338 und 339.

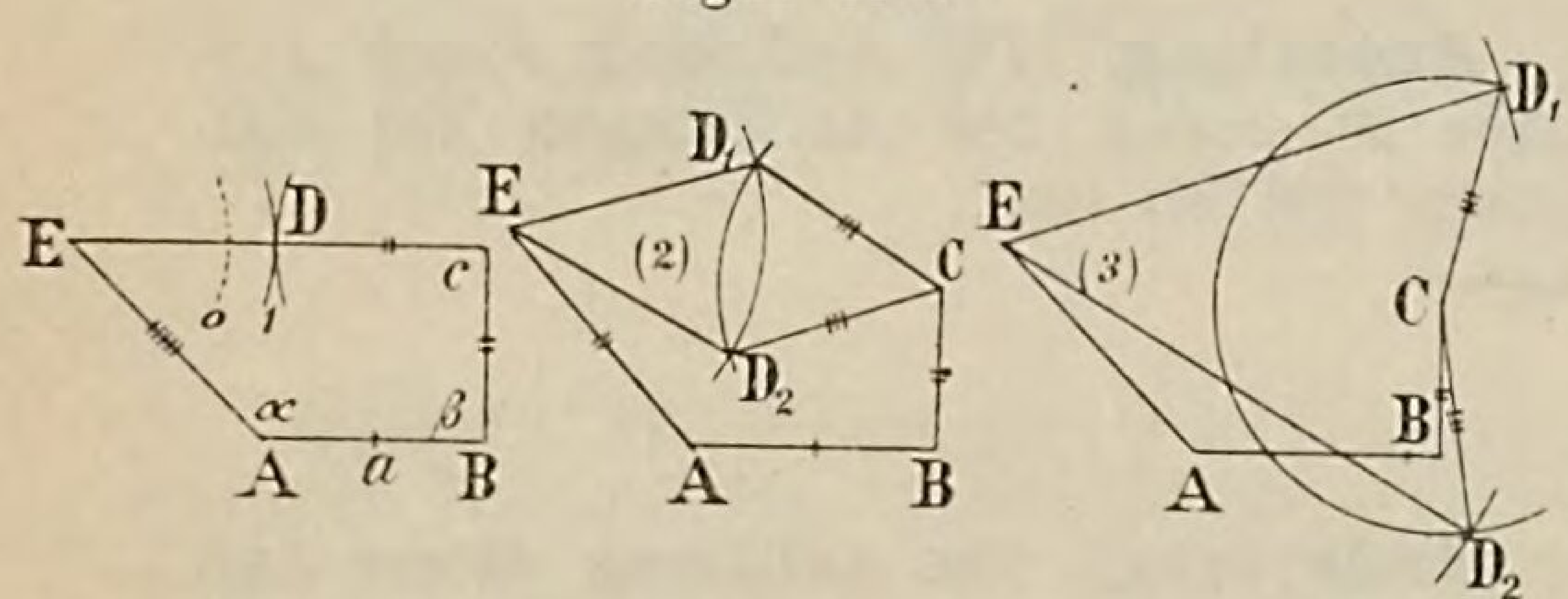
D. Aufgaben über die Konstruktion, Kongruenz und Symmetrie der Vielecke.

(Zu Abschnitt C 3.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 378. Man soll ein einfaches Fünfeck zeichnen, von welchem gegeben sind die fünf Seiten a, b, c, d, e und zwei aufeinanderfolgende Winkel α, β.

Figur 338.



Erkl. 728. In Figur 338 sind die Seiten a, b, c, e stets beibehalten und ebenso die Winkel α, β. Dagegen ist d so verändert, dass die verschiedenen Lösungsfälle nacheinander auftreten.

Aus derselben Konstruktion kann man auch Bedingungen aufsuchen, welche zwischen fünf Strecken bestehen müssen, damit aus diesen ein Fünfeck gezeichnet werden kann. Es geschieht dies in vollständig analoger Weise, wie in Frage 135 fürs Viereck.

Auflösung. Man trage auf den Schenkeln des gegebenen Winkels α die gegebenen Seitenstrecken $AE = e$ und $AB = a$ ab, am Endpunkt B des letzteren den Winkel β und auf dessen Schenkel die Seite $BC = b$. Sodann beschreibe man um E und C Kreisbögen mit Radius d bezw. c. Deren Schnittpunkt ist Eckpunkt D.

Damit die Aufgabe möglich ist, müssen die gegebenen Stücke so gewählt sein, dass sich die Kreisbögen treffen. Man erhält nämlich keine Lösung (0), wenn kein Schnittpunkt beider Kreisbögen auftritt, eine Lösung (1) (und zwar ein Viereck), wenn sich dieselben berühren, zwei Lösungen (2), wenn sie einander in zwei Punkten treffen. Von letzteren zwei Lösungen (3) kann noch die eine überschlagen werden, wenn nämlich der eine Schnittpunkt der Kreisbögen ausserhalb der Winkelräume α und β liegt.

Aufgabe 379. Es soll ein Sechseck gezeichnet werden, von welchem die sechs Seiten gegeben sind und drei beliebig gelegene Winkel.

Erkl. 729. Sind die Vielecke von noch höherer Seitenzahl, als 5 und 6, so werden auch die verschiedenen Zusammenstellungen der fehlenden Stücke verwickelter und zahlreicher. Daher erklärt sich die Unmöglichkeit, Kongruenzsätze für andere Zusammenstellungen, als die in Antwort der Frage 206 enthaltenen, kurzgefasst allgemein auszusprechen. Denn nur wenn die fehlenden Stücke leicht zusammengefasst werden können zu einem oder mehreren zusammenhängenden Dreiecken, ist eine Uebersicht der allgemeinen Vieleckskonstruktion möglich.

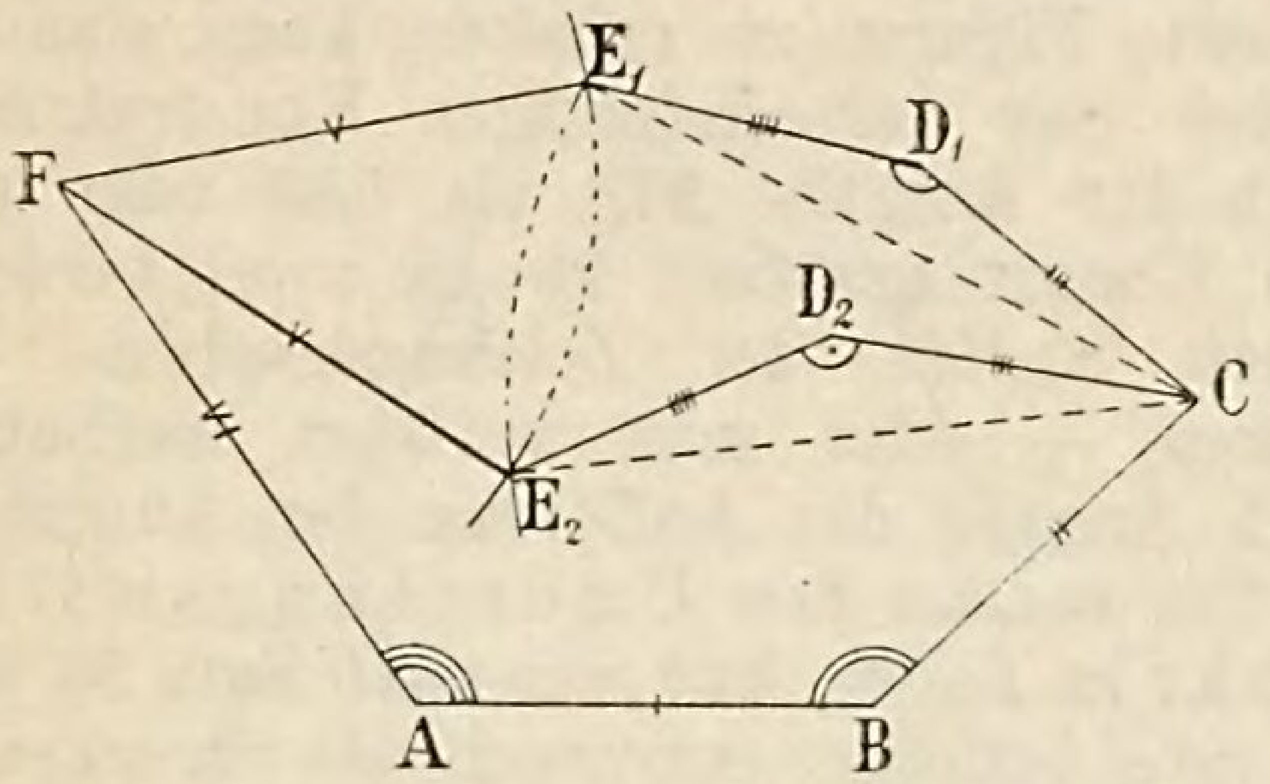
Auflösung. 1) Sind die drei Winkel aufeinanderfolgende, so verfährt man genau wie in der vorigen Aufgabe.

2) Sind zwei Winkel α, β aufeinanderfolgende, der dritte δ vom einen durch zwei, vom andern durch einen der Eckpunkte getrennt, so kann man in Figur 339 das Dreieck CDE für sich konstruieren und erhält die Diagonale CE. Diese bildet aber mit den Seiten f und a, b, c ein Fünfeck, von welchem die in voriger Aufgabe 378 gegebenen Stücke bekannt sind. — Man kann also das Fünfeck $ABCEF$ nach voriger Aufgabe konstruieren und dann an die Diagonale CE jeweils das

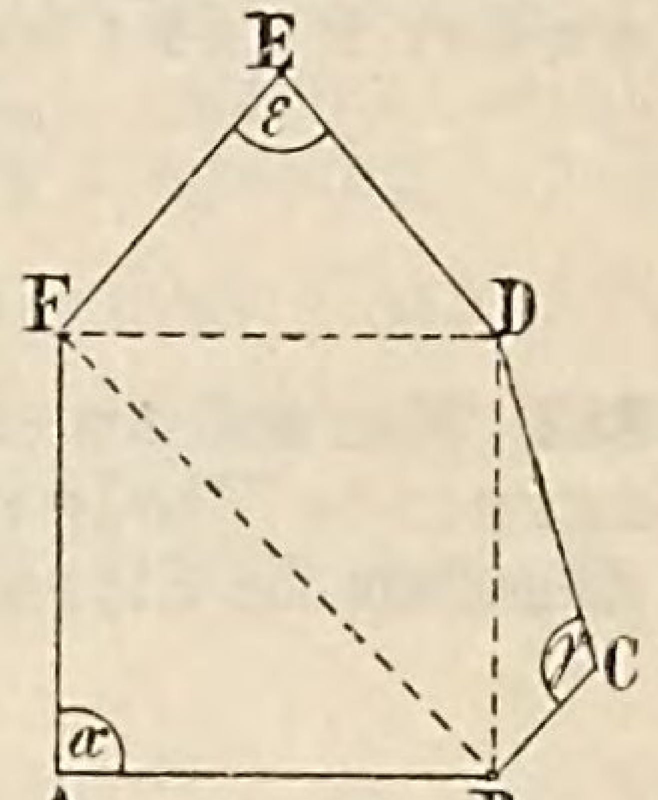
auf einer Nebenfigur konstruierte Dreieck CDE anlegen. — Lösungsbedingungen wie bei Aufgabe 378.

3) Sind die drei gegebenen Winkel α, γ, ε aber je durch einen unbekannten von einander getrennt, so bilden die Diagonalen BD, DF, FB ein Dreieck BDF. Da man nunmehr die Dreiecke ABF, BCD, DEF einzeln aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel konstruieren kann, so erhält man auch die drei Diagonalen, kann also aus ihnen das Dreieck BDF konstruieren aus drei Seiten, und an jede dieser Seiten das zugehörige Dreieck anlegen.

Figur 339.



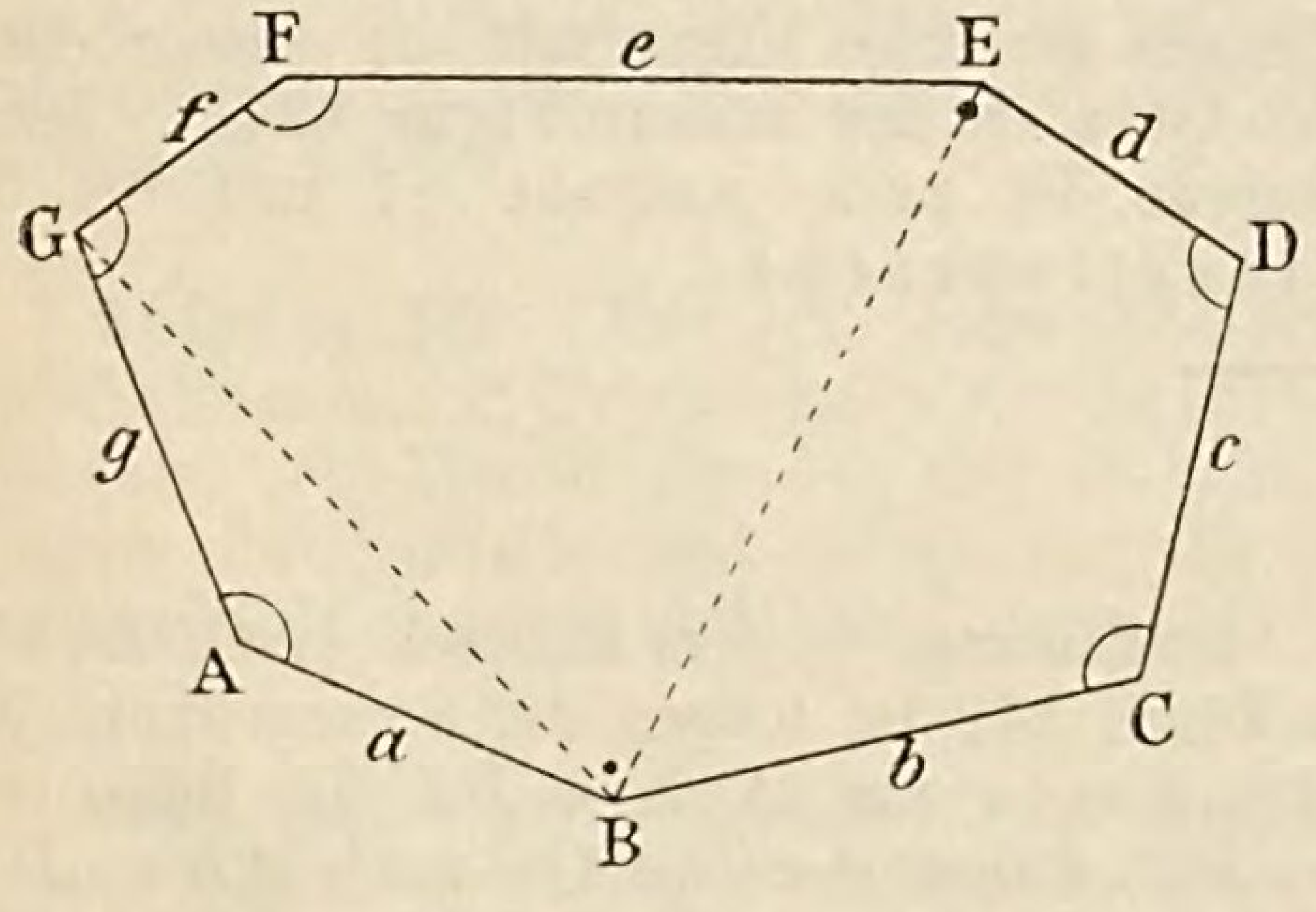
Figur 340.



Erkl. 730. Bei Vielecken höherer Eckenzahl kann es vorkommen, dass statt des Dreiecks BDF in Figur 340 ein solches zu zeichnen ist, welches eine Vielecksseite und zwei konstruierbare Diagonalen zu Seiten hat.

Aufgabe 380. Es soll ein Siebeneck gezeichnet werden, von welchem gegeben sind sechs Seiten, nämlich alle bis auf die Seite f und fünf Winkel, nämlich alle Winkel bis auf β und ε.

Figur 341.



Erkl. 731. Diejenigen Aufgaben, bei welchen von einem Vieleck die in den Kongruenzsätzen in Antwort der Frage 206 vorkommenden Stücke gegeben sind, haben gegenüber den unregelmässigen Gruppierungen der fehlenden Stücke in vorliegenden Aufgaben 379 und 380 durchaus keine Schwierigkeiten. Man findet noch weitere Aufgaben in „Müller, Konstruktionsaufgaben“ und in dem dieser Encyklopädie angehörigen „Lehrbuch über Polygonometrie“.

Auflösung. Wenn in Figur 341 bekannt sind die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EF = e$ und $GA = g$, und die Winkel bis auf β und ε, so bilden die Diagonalen BG und BE mit den Seiten EF und FG ein Viereck, in welchem bekannt sind GB als Seite des konstruierbaren Dreiecks GAB, Diagonale BE als Seite des konstruierbaren Vierecks $BCDE$, der Winkel bei F, und der Winkel FGB als Differenz des gegebenen Siebeneckwinkels AGF und des konstruierbaren Dreieckswinkels AGB. — Man kann also das Viereck $BEFG$ konsruieren aus drei Seiten und den beiden an der vierten anliegenden Winkeln nach Auflösung der Aufgabe 314, und hat dann an die Seiten BG und BE das Dreieck GAB bezw. das Viereck $BEDC$ anzulegen.

Aufgabe 381. Man soll zwei gleichwendig kongruente Vielecke zeichnen, und soll für dieselben den Umdrehungsmittelpunkt oder Situationspunkt suchen.

Erkl. 732. Als Ueberlegungsfigur zu nebenstehender Auflösung kann man Figur 162 benutzen. Der gesuchte Umdrehungsmittelpunkt oder Situationspunkt hat ausser der Eigenschaft dieser zentrischen Symmetrie, oder vielmehr infolge dieser Eigenschaft auch alle die merkwürdigen Beziehungen zu beiden Figuren, welche in den Erklärungen 433 bis 435 ausgeführt sind. Rechnet man ihn selbst als Punkt der einen und andern Figur ein, so zeigt er sich bei der Vergleichung beider Gesamtfiguren als selbstentsprechender Punkt beider Figurensysteme.

Auflösung. Um zwei gleichwendig kongruente Figuren zu erhalten, kann man entweder eine der eindeutigen Konstruktionen nach der Aufgabe 378 bis 380 oder nach den Kongruenzsätzen 95 an zwei verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene ausführen — oder man verfährt mechanisch nach Angabe der Auflösung der Aufgabe 3.

Um sodann den Umdrehungsmittelpunkt zu finden, hat man nach Satz 96 bloss für zwei beliebige entsprechende Strecken die Mittelsenkrechten — oder für zwei beliebige entsprechende Winkel die Nebenwinkelhalbierenden — oder eine solche Mittelsenkrechte mit einer solchen Nebenwinkelhalbierenden — zum Schnitt zu bringen.

Aufgabe 382. Man soll zwei ungleichwendig kongruente Vielecke zeichnen und soll für dieselben die Situationsachse suchen.

Erkl. 733. Als Ueberlegungsfigur zu nebenstehender Aufgabe ist Figur 209 geeignet. Die gefundene Linie besitzt die Eigenschaft, dass durch eine Verschiebung längs derselben beide Vielecke in achsig-symmetrische Lage zu ihr gelangen.

Rechnet man die Achse selbst als Gerade der einen und andern Figur ein, so zeigt sie sich bei der Vergleichung beider Gesamtfiguren als selbstentsprechende Gerade beider Figurensysteme.

Auflösung. Um zwei ungleichwendig kongruente Figuren zu erhalten, kann man entweder eine eindeutige Vieleckskonstruktion an zwei verschiedenen Stellen der Zeichnungsebene in umgekehrtem Drehungssinne ausführen — oder man verfährt mechanisch nach Angabe der Auflösung der Aufgabe 3.

Um sodann die Situationsachse zu finden, hat man nach Auflösung der Aufgaben 87 und 88 erst den Mittelpunkt M zweier entsprechenden Punkte zu suchen, und durch diesen eine Parallele zu ziehen zur Winkelhalbierenden des Winkels, welchen eine Gerade der einen Figur mit der entsprechenden Geraden der andern Figur bildet. Diese Gerade ist nach Aufgabe 87 und 88 die Situationsachse.

Aufgabe 383. Man soll an dem Achteck $ABCDEFGH$ in Figur 342, welches nach Auflösung der Aufgabe 296 (bezw. 246) entstand, die Sätze 97 bestätigen.

Erkl. 734. Die Tabelle, welche in Erkl. 441 für die besonderen Vierecke aufgestellt wurde, behält Gültigkeit für dieses Achteck wie für das Quadrat, nämlich:

$$\varphi = \frac{180}{4} = 45^0, \quad m = \frac{180}{45} = \frac{360}{90} = 4,$$

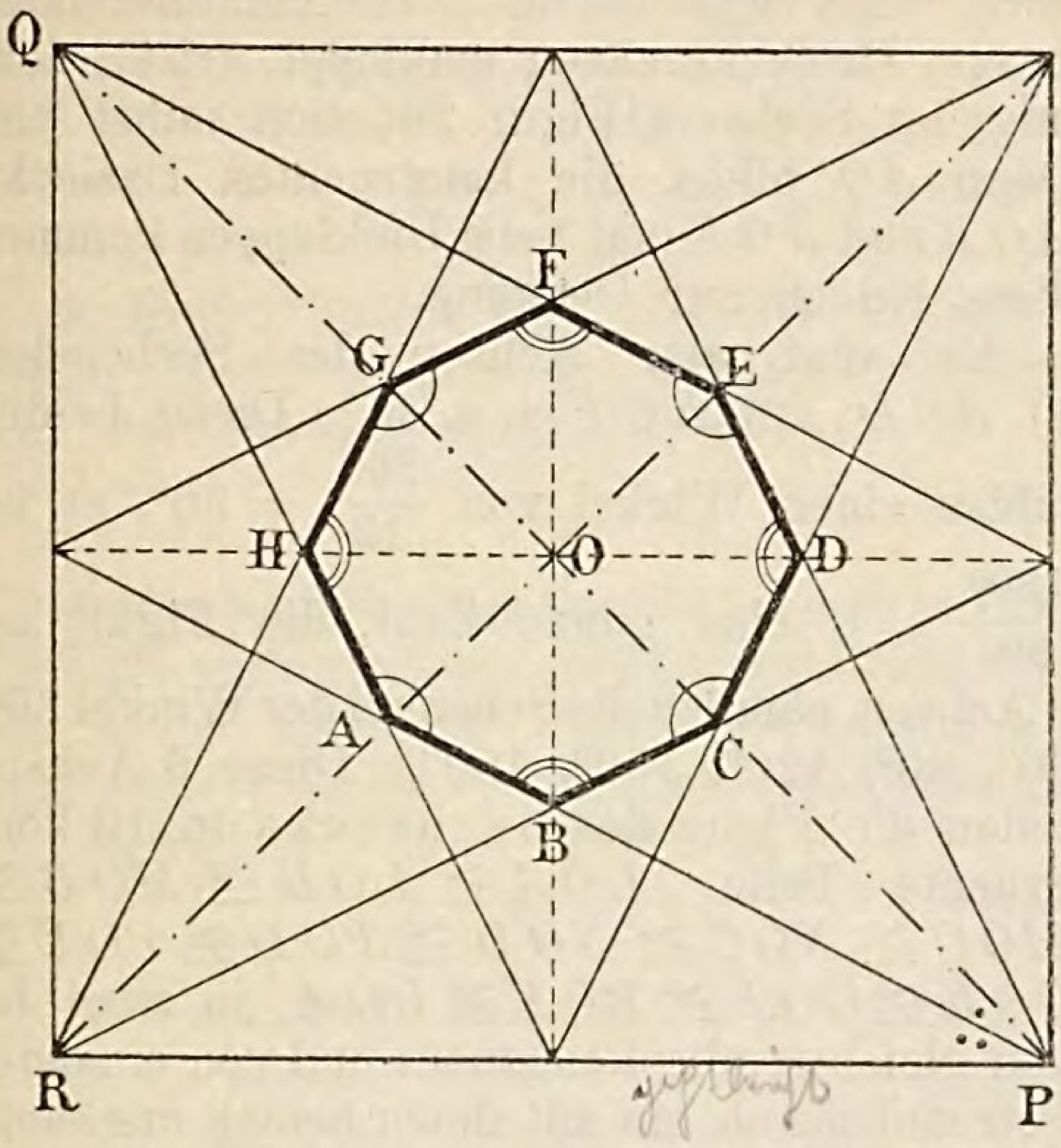
$$\psi = \frac{360}{4} = 90^0, \; 2m = 8.$$

Man hat sich vor dem Irrtum zu hüten, dass wegen der acht gleichen Seiten dieses Achteck auch durch Drehung um den Winkel AOB oder

Auflösung. In dem Achteck $ABCDEFGH$ in Figur 342 ist wegen der Symmetrie des Quadrats zur Achse BF die Seite $AB = BC$, wegen Achse CG auch $AB = DE$, $BC = CD$, also $AB = BC = CD = DE$, wegen Achse DH auch $AB = GF$, und diese Strecke wegen der schon genannten Achsen auch gleich $FE = GH = HA$. Also ist $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA$.

Ebenso ist wegen Achse BF: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, wegen Achse CG auch $\sphericalangle A = \sphericalangle E$ und $\sphericalangle B = \sphericalangle D$, wegen Achse DH endlich $\sphericalangle A = \sphericalangle G$, $\sphericalangle B = \sphericalangle F$, $\sphericalangle C = \sphericalangle E$.

Figur 342.



45⁰ zur Deckung käme. Denn da $\sphericalangle A$ nicht gleich $\sphericalangle B$ ist, so käme bei dieser Drehung HAB nicht auf ABC. Vielmehr ist $\sphericalangle A$ im gleichschenkligen Dreieck $PAQ = 180^0 - 2\cdot\sphericalangle BPC$, und $\sphericalangle B$ als Scheitelwinkel des gleichschenkligen Dreiecks $PBR = 180^0 - 2\cdot\sphericalangle BPR$.

Da aber die Linie PB den $\sphericalangle RPC = 45^0$ keineswegs halbiert, sondern $\sphericalangle BPC$ kleiner ist, als $\sphericalangle BPR$, so ist $\sphericalangle A$ grösser als $\sphericalangle B$. Auch sind die Strecken $OA = OC = OE = OG$ unter sich gleich, aber etwas kürzer, als die ebenfalls unter sich gleichen Strecken $OB = OD = OF = OH$.

Erkl. 735. Achtecke mit nicht nur vier, sondern acht Symmetrieachsen, welche wirklich durch Drehung um 45⁰ zur Deckung gelangen, werden im nächsten Teile dieses Lehrbuches behandelt werden.

Also hat das Achteck die Winkel $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle E = \sphericalangle G$ und $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle F = \sphericalangle H$; daher im ganzen acht gleiche Seiten, aber zweierlei verschiedene Winkel, nämlich je vier von der Grösse A und je vier von der Grösse B.

Es wird also jede der vier Geraden AE, BF, CG, DH eine Symmetrieachse des Achtecks, je zwei benachbarte bilden einen Winkel von $\frac{360}{8} = 45^0$, und $\frac{180}{45} = 4$ ist eine ganze Zahl, und die Anzahl der Achsen ist eben $= 4$, nämlich die Schenkel der Winkel 45⁰, 90⁰, 135⁰, 180⁰, 225⁰, 270⁰, 315⁰, 360⁰. Diese vier Achsen teilen die Figur in 8 kongruente Teile $AOB \cong COB \cong COD \cong EOD \cong EOF \cong GOF \cong GOH \cong AOH$, je zwei gleichwendige getrennt durch je zwei ungleichwendig kongruente. Durch Umdrehung um den Punkt O um den Betrag von $\frac{360}{4} = 90^0$ gelangt die Figur mit sich selbst zur Deckung, nämlich:

$$ABCDEFGH \text{ auf } CDEFGHAB$$

oder:

$$BCDEFGHA \text{ auf } DEFGHABC.$$

Aufgabe 384. Man teile jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks in drei gleiche Teile, verbinde die den Ecken benachbarten Teilpunkte und untersuche das entstehende Sechseck auf Grund der Sätze 97.

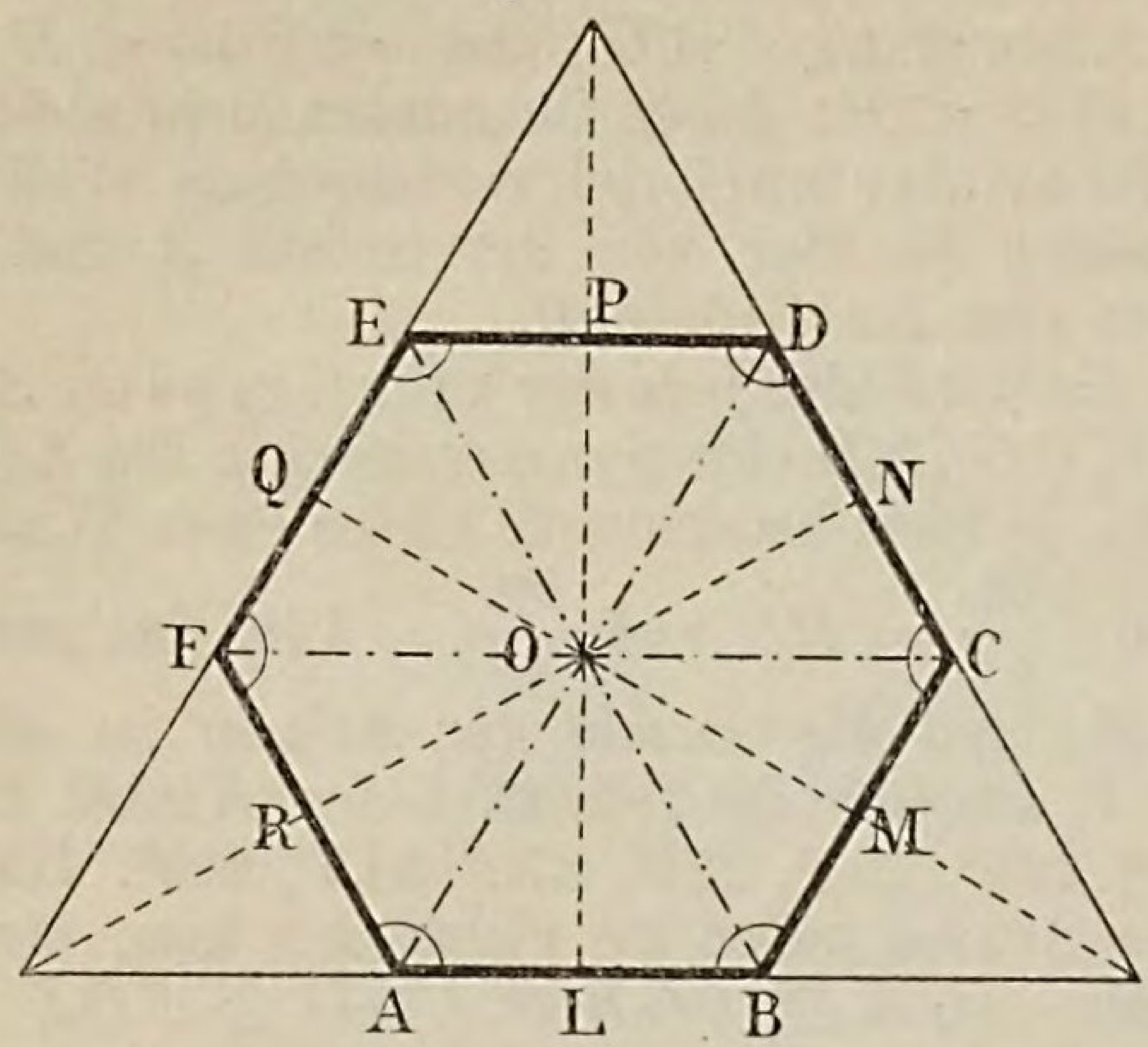
Erkl. 736. Das Sechseck in Figur 343 unterscheidet sich in mehrfachen wesentlichen Punkten von dem Achteck in Figur 342. Denn nicht nur, dass jenes bloss vier Achsen hatte, während das Sechseck deren sechs hat, so sind bei beiden Figuren zwar alle Seiten gleichgross, aber beim Achteck sind die Winkel nicht alle gleich, während dies beim Sechseck der Fall ist.

Ferner sind beim Achteck die Linien von O nach den Ecken verschieden gross von zweierlei Art, beim Sechseck aber sind die Linien nach den Ecken alle gleichgross, $OA = OB = OC = OD = OE = OF$, und nur die Linien nach den

Auflösung. Da die Winkel des grossen Dreiecks je 60⁰ betragen, so müssen die an den Ecken abgeschnittenen Dreiecke selbst wieder gleichschenklige mit Winkel 60⁰ an der Spitze, also geichseitige Dreiecke sein. Folglich müssen die Verbindungsstücke $BC = DE = FA$ auch gleich den Dritteln der Seiten sein, also gleich $AB = CD = EF$, so dass das Sechseck sechs gleiche Seiten hat. Ferner sind aber auch alle Innenwinkel des Sechsecks Nebenwinkel zu Winkeln von 60⁰, also sämtlich gleichgross, nämlich gleich 120⁰.

Klappt man daher um eine der Symmetrieachsen des Dreiecks um, so kommt auch das

Figur 343.



Seitenmitten sind von ihnen verschieden, aber unter sich auch alle gleich: $OL = OM = ON = OP = OQ = OR$.

Ein weiterer Umstand aber, der nicht übersehen werden darf, ist der, dass beim Achteck die Achsen des Achtecks auch alle vier gleichzeitig Achsen des Vierecks sind, wogegen beim Sechseck nur drei Achsen des Sechsecks zugleich Achsen des Dreiecks sind, nämlich nur die Mittelsenkrechten der Seiten des Sechsecks.

Sechseck mit sich selbst zur Deckung. Aber auch wenn man um die Winkelhalbierenden zweier Dreiecksachsen umklappt, tritt Deckung der Sechseck-Figur mit sich selbst ein. Denn AO bildet die kongruenten Dreiecke AOB und AOF und beim Umklappen kommen diese beiden zur Deckung.

Es sind also Achsen des Sechsecks: 1) AOD, 2) LOP u. s. w. Diese beiden bilden einen Winkel von $\frac{360}{12} = 30^0$, es ist $\frac{180^0}{30^0} = 6$ eine ganze Zahl, die Figur hat 6 Achsen, nämlich die Schenkel der Winkel 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0, 180^0. Diese 6 Achsen teilen die Figur des Sechsecks in 12 kongruente Teile, $LOA \cong LOB \cong MOB \cong MOC \cong NOC \cong NOD \cong POD \cong POE \cong QOE \cong QOF \cong ROF \cong ROA$, je zwei davon gleichwendig kongruent und von einander getrennt durch ein mit ihnen beiden ungleichwendig kongruentes Figurenstück. Und durch Umdrehung um den Mittelpunkt um den Betrag von $\frac{360}{6} = 60^0$ kommt die Figur des Sechsecks mit sich selbst zur Deckung.

Erkl. 737. Die Tabelle der Werte φ, m, ψ liefert für das Sechseck und das Dreieck in Figur 343 folgende Werte:

Sechseck . . . $\varphi = \frac{180}{6} = 30^0, \quad m = \frac{180}{30} = \frac{360}{60} = 6, \quad \psi = \frac{360}{6} = 60^0, \quad 2m = 12.$

Dreieck . . . $\varphi = \frac{180}{3} = 60^0, \quad m = \frac{180}{60} = \frac{360}{120} = 3, \quad \psi = \frac{360}{3} = 120^0, \quad 2m = 6.$

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 385. Man soll ein einfaches Fünfeck zeichnen, von welchem gegeben sind vier Seiten und drei Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 378.

Aufgabe 386. Man soll ein einfaches Fünfeck zeichnen, von welchem gegeben sind drei Seiten und alle Winkel.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 387. Man soll ein einfaches Sechseck zeichnen, von welchem gegeben sind fünf Seiten und vier Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 379.

Aufgabe 388. Man soll ein einfaches Sechseck zeichnen, von welchem gegeben sind vier Seiten und alle Winkel.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 389. Man soll ein einfaches Siebeneck zeichnen, von welchem gegeben sind sieben Seiten und vier Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 380.

Aufgabe 390. Man soll ein einfaches Siebeneck zeichnen, von welchem gegeben sind fünf Seiten und alle Winkel.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 391. Man zeichne ein beliebiges Vieleck, verbinde seine sämtlichen Eckpunkte mit einem einzelnen Punkte O ausserhalb, und lasse jeden dieser Strahlen eine Drehung um denselben Winkel ausführen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 381.

Aufgabe 392. Man zeichne ein beliebiges Vieleck, klappe dasselbe um eine beliebige Gerade um und verschiebe es sodann noch um eine gegebene Strecke längs ebendieser Geraden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 382.

Aufgabe 393. Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck, lasse dasselbe um seinen Mittelpunkt eine Drehung von 60^0 ausführen und untersuche das durch die ursprüngliche und die neue Lage gebildete Sechseck auf Grund der Sätze 97.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 383 und 384.

Aufgabe 394. Man zeichne n gerade Linien durch einen Punkt O, welche je einen gleichgrossen Winkel von $\frac{180^0}{n}$ mit einander bilden, trage auf jeder eine gleiche Strecke von O aus ab und beweise, dass diese Figur als ganze die in den Sätzen 97 enthaltenen Eigenschaften besitzt.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Anhang.

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

Aufgabe 4. Man erhält im ganzen 60 verschiedene Sechsecke, eine einzelne Verbindungsstrecke tritt dabei 30 mal als Seite eines Sechsecks auf.

Aufgabe 5. Man erhält im ganzen 60 verschiedene Sechsseite; ein einzelner Schnittpunkt tritt dabei 30 mal als Ecke eines Sechsseits auf.

Aufgabe 6. Man verfahre nach der Aufgabe und wende die Vorsicht an, nach jedem Punkt der einen Figur sofort eine Gerade in der zweiten zu ziehen, und nach Zeichnung einer (blauen) Verbindungslinie in der ersten sofort auch einen (blauen) Schnittpunkt in der zweiten als den entsprechenden zu bezeichnen.

Aufgabe 7. 1) Man schneide mit der Schere längs der Geraden das Papierblatt auf, stecke zwei Nadeln durch den Schlitz, verschiebe das Blatt, und pause wieder durch.

2) Man stecke in den Punkt eine Nadel, drehe das Blatt um dasselbe, und pause wieder durch.

3) Man schneide längs der Geraden auf, stecke Nadeln ein, nehme das Papierblatt heraus, lege es umgewendet wieder an die Nadeln an, und pause wieder durch.

Aufgabe 8. Man verfahre wie zuvor:
1) unter Verbindung des ersten und zweiten,
2) unter Verbindung des ersten und dritten,
3) unter Verbindung des zweiten und dritten Verfahrens.

Aufgabe 26. Man erhält beiderseits jeglicher als Achse gewählten Geraden symmetrisch-gleiche Winkel, also zur Deckung gelangende Strahlen.

Aufgabe 27. Man verbindet jeden Eckpunkt des Dreiecks mit beiden gegebenen symmetrischen Punkten und zieht die Linien durch den Achsenschnittpunkt und den symmetrischen Punkt. Die Schnittpunkte bilden das entsprechende Dreieck.

Aufgabe 28. Man bringe die Dreieckseiten zum Schnitt mit beiden Geraden, messe die Abstände zwischen Schnittpunkt und Achsenpunkt, und trage sie auf den symmetrischen Geraden ab. Die Verbindungsgeraden bilden das entsprechende Dreiseit.

Aufgabe 29. Beim Umklappen wird sowohl die Senkrechte auf der Winkelhalbierenden mit sich selbst, als ein Schenkel mit dem andern zur Deckung kommen, folglich decken sich auch die genannten Elemente.

Aufgabe 30. Die Umwendung um die Winkelhalbierende ergibt das Aufeinanderfallen der entsprechenden Endpunkte. Folglich müssen ihre Verbindungslinien sämtlich Achsensenkrechte sein.

Aufgabe 31. Die Mittelsenkrechte der ersten Strecke muss zusammenfallen mit der Mittelsenkrechten der zweiten Strecke, und beide mit der Winkelhalbierenden.

Aufgabe 32. Nach Aufgabe 30 sind die beiderlei Verbindungslinien senkrecht auf den Winkelhalbierenden des Winkels bezw. seines Nebenwinkels, folglich auch aufeinander senkrecht.

Aufgabe 33. Die erste bezw. zweite Gerade ist senkrecht auf der Winkelhalbierenden des Winkels bezw. Nebenwinkels, folglich beide zu einander senkrecht.

Aufgabe 34. Man erhält zu den gleichen korrespondierenden Winkeln einerseits der Achse auch korrespondierende gleiche Winkel andererseits derselben, folglich parallele Geraden.

Aufgabe 35. Man erhält gleiche innere Wechselwinkel und deswegen beiderseits gleiche Winkel mit der Achse, also symmetrische Geraden.

Aufgabe 36. Man erhält gleiche Winkelsummen an den beiderseitigen Schnittpunkten mit der Verbindungslinie. Folglich fällt die Mittelsenkrechte zusammen mit der Winkelhalbierenden beider Geraden.

Aufgabe 37. Man wendet um die Winkelhalbierende der gleichen Strecken um und findet, dass sie zusammenfällt mit der Winkelhalbierenden der gegebenen Geraden.

Aufgabe 38. Man findet, dass die Mittelsenkrechte der gefundenen Punkte zusammenfällt mit der Mittelsenkrechten der gegebenen Punkte.

Aufgabe 39. Man findet, dass der eine Punkt auf einen solchen in gleichem Abstande vom symmetrischen fallen muss. Solcher gibt es im ganzen zwei, also unter Ausschluss des zweiten nur einen ersten.

Aufgabe 40. Man schneidet die Achse und die gegebene Gerade durch zwei Achsensenkrechte, konstruiert die symmetrischen Schnittpunkte und verbindet dieselben.

Aufgabe 41. Man zeichne den symmetrischen Punkt zu Ball II in Bezug auf die Bande II, zu diesem den symmetrischen Punkt zu Bande I und verbinde mit letzterem Punkte den Ball I.

Aufgabe 42. Man zeichne dasselbe für Ball I selbst, also für Bande III, Bande II, Bande I und ziele nach dem letzten Punkt.

Aufgabe 43. Die drei gegebenen Geraden und die Symmetrieachsen gehen durch den unendlich fernen Punkt und schneiden auf jeder gemeinsamen Senkrechten gleiche Hälften der Transversalstrecken aus.

Aufgabe 44. Man verbinde den Sitzpunkt mit dem symmetrischen Punkte zur Thür in Bezug auf die Spiegelwand und bringe den Spiegel an die Stelle, wo die Verbindungslinie die Wand trifft.

Aufgabe 45. Man stelle den Zierbaum an die Stelle der Wand, wo die Verbindungslinie des Fensters mit dem symmetrischen Punkte zum Gegenstande die Wand durchsetzt.

Aufgabe 46. Man dreht den Spiegel um 45^0.

Aufgabe 61. Bei jeder Drehung um 45^0 fallen benachbarte Strahlen und Winkel aufeinander.

Aufgabe 62. Man zieht durch die Dreieckspunkte die Zentralen und zieht die Parallelen zu den Verbindungslinien der Eckpunkte mit dem einen gegebenen Punkt durch den andern. Die Schnittpunkte sind die Ecken des symmetrischen Dreiecks.

Aufgabe 63. Man bringt jede Seite des Dreiecks mit den beiden Parallelen zum Schnitt, zieht die Zentralen beider Schnittpunkte und verbindet deren zweite Schnittpunkte mit den Parallelen. Diese drei Verbindungsgeraden bilden das symmetrische Dreieck.

Aufgabe 64. Die beiden Richtungen müssen wegen gleicher innerer Wechselwinkel parallel sein. Da sie beide durchs Zentrum gehen, müssen sie auf derselben Geraden liegen.

Aufgabe 65. Bei der Umdrehung fällt der eine Punkt auf einen solchen, der denselben Abstand hat und gleichartige Winkel bildet. Solchen gibt es nur einen, also muss dies der entsprechende sein.

Aufgabe 66. Man verbindet den Punkt P mit dem andern Schnittpunkt der Parallelen, den Mittelpunkt dieser Strecke mit dem einen, und verbindet P mit dem Schnittpunkt der letzten als Zentralen.

Aufgabe 67. Man trage auf dem andern Rande des Papierstreifens vom Schnittpunkte aus die entgegengesetzt gleiche Strecke ab, und verbinde deren Endpunkt mit dem gegebenen.

Aufgabe 68. Man setze mit dem Zirkel im gegebenen Punkte ein und beschreibe einen Kreisbogen, dessen Radius die Hälfte der gegebenen Strecke ist. Den Schnittpunkt verbinde man mit dem Zentrum.

Aufgabe 69. Von den drei Parallelen ist diejenige durch das Zentrum Mittelparallele, schneidet also die transversale Strecke im Mittelpunkt.

Aufgabe 70. Man ziehe die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte.

Aufgabe 71. Man ziehe die Mittelparallele durch den gegebenen Mittelpunkt.

Aufgabe 72. Man zeichne eine zweite Transversale, suche deren Mittelpunkt und verbinde sie mit demjenigen der ersten.

Aufgabe 73. Man befestige die Kugel im Mittelpunkte einer beliebig langen Stange und lasse deren Endpunkte auf den beiderseitigen Schienen laufen.

Aufgabe 74. Man ziehe durch P die Parallele zur gegebenen Transversalen.

Aufgabe 75. Man trage s irgendwo zwischen den Parallelen ein und ziehe durch P die Parallele dazu.

Aufgabe 76. Das Schiff läuft auf der Parallelen zum Ufer durch den Endpunkt der Stange (den Standpunkt des Schiffes).

Aufgabe 77. Die Telegraphenstangen müssen gleichhoch über den Boden hervorragen.

Aufgabe 78. Bei Figur 52 und 53 deckt α oder β den Scheitelwinkel der andern, bei Figur 54, 55 und 56 kommt α mit

β zur Deckung, bei Figur 57 und 58 wird α bezw. β zum Nebenwinkel des andern.

Aufgabe 79. Man drehe jedesmal um den Schnittpunkt der Halbierungslinie der Nebenwinkel der Geraden (a, c) und (b, d) oder um den Schnittpunkt einer dieser Nebenwinkelhalbierenden mit der Mittelsenkrechten der Scheitel beider Winkel. — Drehungsbetrag gleich der Grösse der Winkel.

Aufgabe 80. Man suche den Schnittpunkt der Geraden mit der Mittelsenkrechten beider Punkte.

Aufgabe 81. Man schneide beide Strecken durch einen beliebigen Kreis um den Umdrehungsmittelpunkt.

Aufgabe 82. Man schneide die Mittelsenkrechte des Anfangspunktes mit der Mittelsenkrechten zweier Punkte im gleichen Abstand von ihm auf beiden Strecken.

Aufgabe 83. Man setzt die Einzelwinkel je gleich ihren gleichgrossen Drehungswinkeln am Umdrehungsmittelpunkt. Dort ist die Summe aller gleich dem ganzen Winkel.

Aufgabe 84. Der Umdrehungsmittelpunkt für die Strecke $A - B$ und $C - D$ hat die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 89. Jeder beliebige Punkt durchläuft eine Parallele zur Unterlage von gleicher Länge wie alle andern.

Aufgabe 90. Eine Parallele zu den Schienen müsste in gleicher Geschwindigkeit rückwärts durchlaufen werden, in welcher der Wagen selbst vorwärts fährt.

Aufgabe 91. Die Kurbel dreht sich auf einer Kreislinie, der Kolben aber muss aufs genaueste geradlinig geführt werden.

Aufgabe 92. Die Verbindungsstrecke zweier entsprechenden Punkte ist symmetrisch kongruent derjenigen der beiden symmetrischen Punkte.

Aufgabe 93. Man verschiebt längs der Achse, bis das Hindernis die Umwendung zulässt, und schiebt anderseits wieder um ebensoviel zurück.

Aufgabe 94. Man wählt auf irgend einem der andern Stäbe eine gleichgrosse Strecke als Leitlinie.

Aufgabe 95. Da jeder Punkt der Verbindungslinie als Teil der Gesamtfigur dieselbe Bewegung mitmacht, so gilt dasselbe von deren Endpunkt, also einem Punkt der zweiten Figur und damit auch von der ganzen zweiten Figur.

Aufgabe 96. Da jede Gerade der letzten Lage parallel zur vorletzten, diese zur drittletzten u. s. w. sein muss, so ist es auch die letzte zur ersten, also braucht bloss ein Punkt der letzten mit dem entsprechenden der ersten verbunden zu werden, um die Leitstrecke zu erhalten.

Aufgabe 97. Die Tropfen scheinen schief zu fallen, von vorne oben nach hinten unten.

Aufgabe 98. Je näher man beim vorbeifahrenden Zuge steht, desto rascher scheint er vorbeizufahren. Umgekehrt scheinen vom Zuge aus gesehen alle Punkte rückwärts sich zu bewegen, die nahen rascher, als die fernen. Dadurch scheint sich alles im Kreise rückwärts zu bewegen.

Aufgabe 111. a) Zwischen 4 und 22, b) 2 und 60, c) 260 und 460, d) 6 und 40.

Aufgabe 112. a) Zwischen 17 und 23, b) 20 und 30, c) 40 und 41.

Aufgabe 113. a) Zwischen 6 und 17, b) 10 und 20, c) unmöglich, denn wenn zwei Seiten 10 und 30 sind, so muss die dritte über 20 liegen, also unmöglich unter 10.

Aufgabe 114. a) Zwischen 23 und 40, b) 30 und 40, c) 41 und 42.

Aufgabe 115. 17, 23, 30 gibt halbe Summe 35, also grösser als jede.

Aufgabe 116. Das Dreieck der Seitenmitten hat halben Umfang, dasjenige der Parallelen zu den Seiten durch die Ecken hat doppelten Umfang.

Aufgabe 117. Man verbinde A und B durch eine gerade Linie.

Aufgabe 118. Man verbinde den einen Punkt mit dem achsig-symmetrischen des andern und den zweiten selbst mit dem Schnittpunkt dieser Verbindungslinie.

Aufgabe 119. Die Abschnitte der Winkelhalbierenden sind genau die in Aufgabe 105 behandelten Abschnitte einer Tansversalen.

Aufgabe 120. Dieselben Ergebnisse, wie in Aufgabe 107 und 108, nur mit Ersetzung des stumpfen Winkels durch sein Supplement.

Aufgabe 139. Man erhält dieselben Ergebnisse wie in Aufgabe 120.

Aufgabe 140. Untere Höhenabschnitte vom Schnittpunkt der Höhen bis zum Fusspunkt, obere vom Schnittpunkt der Höhen

bis zum Eckpunkt — überdecken einander teilweise.

Aufgabe 141. Die Linie ist senkrecht zur Grundseite, parallel zur Symmetrieachse senkrecht zur Winkelhalbierenden des Nebenwinkels, sie bildet gleiche Winkel mit Schenkel und Verlängerung u. s. w.

Aufgabe 142. Das Stück der Senkrechten, welches über den Schenkel hinausragt bis zum Fusspunkt auf dem anderen, ist mitzurechnen.

Aufgabe 143. Nein, denn sonst müsste $AC \parallel BC$ werden.

Aufgabe 144 und 145. 36^0, 72^0, 72^0.

Aufgabe 146. Die Bedingungen der beiden vorigen Aufgaben treffen zusammen.

Aufgabe 147. Die Summe der drei gleichgrossen unteren Abschnitte ist gleich der ganzen, also ihr oberer Abschnitt gleich der Summe zweier unteren.

Aufgabe 148. Es entsteht ein gleichseitiges und zwei gleichschenklige Dreiecke, also hat das ganze Dreieck die Winkel 30^0, 30^0, 120^0.

Aufgabe 149 und 150. Der Schnittwinkel einerseits ist gleich der Winkelhälfte anderseits der Winkelhalbierenden.

Aufgabe 151. Die zweite Winkelhalbierende ist Halbierende des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks.

Aufgabe 152. $DA = b$, $DB = b + c$, $DE = a + b + c$ u. s. w.

Aufgabe 153. Jede Summe ist gleich der Schenkellänge selbst.

Aufgabe 154, 155, 156. Das kleine Stück wird in gleicher Grösse von der grossen Strecke abgeschnitten.

Aufgabe 157 und 158. Die Seiten der neuen Dreiecke sind Summen bezw. Differenzen der vorigen; die Winkel sind bezw. $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, 45^0, $90 - \frac{\alpha}{2}$ u. s. w.

Aufgabe 177. Man konstruiere zuerst das rechtwinklige Dreieck mit dem Winkel und der Höhe.

Aufgabe 178. Man erhält den Mittelpunkt der Gegenseite und muss zwischen die Schenkel des Winkels diese so einlegen, dass sie in jenem Punkte halbiert wird.

Aufgabe 179. Man konstruiert erst das Teildreieck aus Schenkel, Winkelhalbierender und Hälfte des Winkels.

Aufgabe 180. Man konstruiert erst das Teildreieck aus der Differenz der zwei Seiten, der dritten Seite und dem gegebenen Winkel.

Aufgabe 181. Man konstruiert das Teildreick aus der gegebenen Seite mit dem gegebenen Winkel und der Differenz des andern. — Man kann auch wegen der Winkelsumme 180^0 die drei Winkel finden.

Aufgabe 182. Man konstruiert erst das rechtwinklige Teildreieck aus Höhe und Winkelhalbierender, dann jenes mit Halbierender und Abschnitten.

Aufgabe 183. Man konstruiert erst die rechtwinkligen Teildreiecke aus Höhe und Seite oder Mittellinie.

Aufgabe 184. Man konstruiere die Hälfte des Winkels an der Spitze und trage diese beiderseits der Höhe an.

Aufgabe 185. Man trage beiderseits der Umfangslänge die Hälfte eines Grundseitenwinkels an.

Aufgabe 186. Man trägt am Umfang den Winkel von 30^0 an, an der Höhe ebenfalls Winkel von 30^0.

Aufgabe 187. Man konstruiere einen rechten Winkel mit einem Schenkel gleich der Kathete und trage vom Endpunkt die Hypotenuse gleich der doppelten Mittellinie ein.

Aufgabe 188. Man konstruiere das rechtwinklige Teildreieck aus Höhe und Mittellinie, letztere gleich der halben Hypotenuse.

Aufgabe 189. Man trage am Umfang Winkel von $22^1/_2{}^0$, an der Höhe Winkel von 45^0 an.

Aufgabe 190. Man erhält die Höhe selbst als 3faches des unteren oder $1^1/_2$faches des oberen Abschnitts.

Aufgabe 191. Man schneide die Gerade g durch eine zweite von P aus und trage den Winkel als Wechselwinkel in P an.

Aufgabe 192. Man konstruiere auf irgend eine der Weisen der Aufgaben 170 bis 173 eine Senkrechte auf g, trage darauf den Abstand ab und im Endpunkt wieder eine Senkrechte.

Aufgabe 193. Man trage den gleichen Winkel ausserhalb eines Schenkels des gegebenen noch einmal, zweimal, dreimal, $\cdots$ an.

Aufgabe 194. Man konstruiere mittels Zirkel allein genau wie in Aufgabe 19.

Aufgabe 195. Man verfahre nach Erkl. 598 und lege E zwischen C und AB.

Aufgabe 196. Man verfahre nach Aufgabe 173 zweimal nach einander mit verschieden grossen Winkelöffnungen, und erhält so zwei Punkte der gesuchten Senkrechten.

Aufgabe 203. 1) Gleiche Grundseiten, 2) gleiche Schenkel, 3) gleiche Winkel.

Aufgabe 204. Das Dreieck mit grösseren Schenkeln hat kleineren Scheitelwinkel, das mit kleineren Grundseitenwinkeln hat kleinere Schenkel.

Aufgabe 205. Das Dreieck mit grösserer Grundseite hat auch grösseren Scheitelwinkel, das mit grösseren Grundseitenwinkeln hat kleinere Grundseite.

Aufgabe 206. Gleicheit: 1) einer Kathete, 2) der Hypotenuse, 3) der Winkel.

Aufgabe 207. Zusammenfassung der Aufgaben 133, 134 und 199.

Aufgabe 208. Das Dreieck mit grösserer Grundseite hat auch grösseren Scheitelwinkel, das mit grösserem Grundseitenwinkel kleinere Grundseite.

Aufgabe 220. a) 0 bis 9, b) 0 bis 70, c) 77 bis 123, d) 87 bis 93.

Aufgabe 221. Zwischen 9 und 11.

Aufgabe 222. Zwischen 30 und 50.

Aufgabe 223. Die gegebenen Seiten bilden einen Winkel, und in diesen legt man eine Seite ein, die im Punkte halbiert wird.

Aufgabe 224. Die Linien bilden Dreiecke mit Winkeln $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ bezw. $\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{\delta}{2}$. Da also $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4\,\mathrm{R}$, so muss die Summe des jeweiligen dritten Winkels dieser beiden Dreiecke zusammen 2 R betragen.

Aufgabe 225. Je zwei Dreiecke über Gegenseiten des Vierecks haben zu Winkeln $\frac{180-\alpha}{2}$ und $\frac{180-\beta}{2}$ bezw. $\frac{180-\gamma}{2}$ und $\frac{180-\delta}{2}$, also zu dritten Winkeln $\frac{\alpha+\beta}{2}$ bezw. $\frac{\gamma+\delta}{2}$. Daher sind ihre Summen gleich 2 R.

Aufgabe 226 und 227. Ein Viereck mit denselben Winkeln, wie das ursprüngliche.

Aufgabe 228. Die Linie durch zwei der Endpunkte geht durch alle.

Aufgabe 229. Man mache den Abstand je zweier folgenden doppelt so gross, als den der vorhergehenden.

Aufgabe 230. Halb so rasch, als der äussere Körper.

Aufgabe 231. Die Schnittpunkte der Geraden mit den im gegebenen Abstand zur andern gezogenen Parallelen.

Aufgabe 232. Einen Parallelstreifen von 3 Meter Breite.

Aufgabe 233. Auf der zweiten das zweifache, der dritten das dreifache, $\cdots$ der nten das nfache, als wie auf der ersten.

Aufgabe 258. Die vierte Seite wird bezw. das halbe, doppelte, der Grundseite. Im ersten und letzten Fall 0 und ∞.

Aufgabe 259 und 260. Je zwei Winkel von 60^0, und zwei von 120^0.

Aufgabe 261. Die eine $\frac{2a+c}{3}$, die andere $\frac{a+2c}{3}$.

Aufgabe 262. Entweder ein Antiparallelogramm, oder ein Parallelogramm.

Aufgabe 263. Supplementwinkel.

Aufgabe 264. Man mache zwei anstossende Seiten ungleicher Winkel gleichgross.

Aufgabe 265. 30^0, 30^0, 60^0, 240^0.

Aufgabe 266. In demjenigen Teildreieck, welches den k l e i n e r e n der ungleichen Winkel hat.

Aufgabe 267 und 268. Der Punkt muss von allen vier Ecken des Antiparallelogramms bezw. von allen vier Seiten des Deltoids gleichen Abstand haben.

Aufgabe 269. Man ziehe durch P eine Parallele zu einer der Diagonalen des von beiden Streifen gebildeten Parallelogramms.

Aufgabe 270. Man verbinde P mit dem Endpunkte der um sich selbst verlängerten zwischen den Parallelen liegenden Transversalenstrecke.

Aufgabe 271. Man trage auf der Verlängerung der Seiten des Parallelogramms das n-fache der Seite an und verbinde die Endpunkte.

Aufgabe 272. Man trage auf der Verlängerung der Seiten des Parallelogramms $\frac{1}{n}$ der Seitenlängen an und verbinde die Endpunkte.

Aufgabe 273. Man teile die beiden Parallelogrammseiten in n gleiche Teile und verbinde die beiden ersten Teilpunkte von den Gegenecken aus oder die ersten von der gemeinsamen Ecke aus.

Aufgabe 274. Die Vierecke haben zweimal zwei gleichgrosse Gegenseiten.

Aufgabe 275. Durch Kongruenz von Dreiecken aus zwei Seiten und eingeschlossenem Winkel beweist man, dass zweimal zwei gleichgrosse Gegenseiten entstehen.

Aufgabe 276. Durch die eine Diagonale gehen zwischen den Eckpunkten $m+n$, durch die andere $m-n$ oder $n-m$ Parallelen, die sämtlich gleiche Abstände haben.

Aufgabe 277. Je zwei Gegenecken sind zentrisch-symmetrische Punkte.

Aufgabe 300. Je vier bilden ein grösseres Rhombus oder Rechteck, auf deren Diagonale die erste Ecke liegt.

Aufgabe 301. Parallelogramm und Rechteck bezw. Parallelogramm, Rechteck und Rhombus.

Aufgabe 302. Stets Rhombus bezw. stets allgemeines Parallelogramm.

Aufgabe 303. Man zieht durch die Gegenecke Parallelen, durch die Nachbarecke Senkrechte.

Aufgabe 304. Man zieht Parallelen zu den Seiten durch die Gegenecken.

Aufgabe 305. Man trage eine Strecke gleich der gegebenen zwischen die Schenkel des Gegenwinkels ein.

Aufgabe 306. Man trägt im Umlauf an jeder Ecke die gleiche Strecke ab.

Aufgabe 307. Der Eckpunkt wird ausgeschnitten vom Halbkreis über einer Seite.

Aufgabe 308. Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck über der Grundseite des Quadrats und ziehe durch die Ecken Parallelen.

Aufgabe 309. Man ziehe die Höhe und trage deren Hälfte rechts und links vom Fusspunkte an.

Aufgabe 310. Dasselbe hat gleiche Seiten und Winkel.

Aufgabe 340. Man konstruiere die vier Eckpunkte mittels der Seite und der Winkel.

Aufgabe 341 und 342. Man konstruiere die beiden Teildreiecke aus drei Seiten.

Aufgabe 343 und 344. Man konstruiere ein Teildreieck aus drei Seiten, ein anderes aus zwei Seiten und einem Winkel.

Aufgabe 345 bis 347. Man konstruiere ein Teildreieck aus zwei Seiten und einem Winkel, das andere aus einer Seite und drei Winkeln.

Aufgabe 348 bis 352. Man konstruiere die Teildreiecke aus ihren gegebenen Stücken.

Aufgabe 353 und 354. Man konstruiere erst zwei Parallelen im gegebenen Abstand, trage dazwischen die Seite bezw. Diagonale ein.

Aufgabe 355 bis 358. Wie bei den Aufgaben 348 bis 354.

Aufgabe 359 bis 362. Man konstruiere ein Teildreieck und beachte die achsige Symmetrie.

Aufgabe 363 bis 366. Man konstruiere ein Teildreieck und beachte die zentrische Symmetrie.

Aufgabe 367 bis 370 und 371 bis 374. Wie bei den vorigen Aufgaben.

Aufgabe 375 bis 377. Man konstruiere eines der Teildreiecke nach Auflösung der Aufgaben 161 und 176.

Aufgabe 385 und 386. Man findet konstruierbare Teildreiecke, aus denen das Fünfeck entstehen kann.

Aufgabe 387 und 388. Man findet konstruierbare Teildreiecke, aus denen das Sechseck zusammengesetzt wird.

Aufgabe 389 und 390. Das Siebeneck wird zusammengesetzt aus einzelnen Dreiecken, die konstruierbar sind.

Aufgabe 391. Jeder Punkt und jede Strecke des Vielecks macht um O eine Drehung um den gegebenen Winkel.

Aufgabe 392. Die gegebene Gerade wird die „Symmetrieachse“ der Figuren.

Aufgabe 393. Das Sechseck hat lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel.

Aufgabe 394. Die entstehende Figur hat n Symmetrieachsen, sie kommt mit sich selbst zur Deckung durch Drehung um den Mittelpunkt um einen Betrag von $\frac{360^0}{n}$, auch um einen Betrag von $2\cdot\frac{360}{n}$, $3\cdot\frac{360}{n}\cdots$ bis $\frac{n}{2}\cdot\frac{360}{n}=180^0$, sie ist also mehrfach achsig und auch zentrisch-symmetrisch.

Berichtigungen.

Seite 34 in Erkl. 73, Zeile 8 von oben, statt D lies B.

Seite 42 in Erkl. 91, Zeile 4 von oben und 5 von oben, statt c lies d und statt d lies c.

Seite 61 in Erkl. 143, Zeile 10 von oben, statt 41 lies 101 bis 106.

Seite 77 in Figur 74 fehlt ein Kreisbogen um die Spitze als Mittelpunkt, welcher durch beide Grundseitenecken geht.

Seite 99 bis 107 in der Ueberschrift der Seiten statt Konstruktion lies Kongruenz.

Seite 108 in Figur 101 sind die Buchstaben F und G zu vertauschen.

Verlag von L. v. Vangerow, Bremerhaven und Leipzig.

Verzeichnis
der bisher erschienenen Bände
von

Kleyers Encyklopädie

der gesamten

mathematischen technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herausgegeben unter Mitwirkung bewährter Fachmänner.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M., St. Louis, Athen.

Wer niedere und höhere Mathematik, z. B.: **bürgerliches und kaufmännisches Rechnen, Buchstabenrechnung, Gleichungen 1. 2. 3. und 4. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Differential- und Integralrechnung etc., Planimetrie, Stereometrie, analytische Geometrie, Projektionszeichnen (darstellende Geometrie). ebene uud sphärische Trigonometrie, Goniometrie (Winkelmessungslehre), Vermessungskunde (Geodäsie), Astronomie, Physik, Mechanik, Geostatik, Geodynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik, Elektrizität, Chemie und deren Hilfswissenschaften** studieren, oder wer, in der Praxis stehend, in diesen Fächern sich weiterbilden oder seine Kenntnisse auffrischen will, erhält durch

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften : : :

mit ca. 10,000 in den Text gedruckten Figuren,

herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner,

eine auch auf die praktischen Bedürfnisse des Technikers Rücksicht nehmende Auswahl von leichtverständlichen Lehrbüchern, die sowohl **dem Studierenden, dem Fachlehrer, als dem ausübenden Techniker** ein wohlvorbereitetes Material zum Studium und zum Nachschlagen darbieten; besonders wertvoll erscheinen dieselben dadurch, dass durch sie die Befähigung zur Lösung mathematischer und technischer Probleme ausserordentlich gefördert wird.

Jeder Band ist einzeln käuflich, und zu beziehen durch jede Buchhandlung des In- und Auslandes.

P. P.

Hiermit beehre ich mich, Ihnen das neueste Verzeichnis von:

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften

zu überreichen.

Aus der überaus großen Zahl der anerkennendsten Besprechungen, welche in Schul-, technischen und Tagesblättern erschienen und von welchen eine kleine Anzahl dem Kataloge beigegeben sind, bringe ich besonders den folgenden Ausspruch des „Pf. Courier“ zum Abdruck:

„In einzig dastehender Weise werden hier die mathematischen und die damit verwandten technischen und exakten Natur-Wissenschaften in ihrem ganzen Umfang von den elementarsten Regeln der Arithmetik bis zu dem stolzen Gebäude der höheren Mathematik behandelt. Das Werk dient gleichmässig den Zwecken des Schulunterrichts, wie denjenigen des Selbststudiums. Es enthält nicht nur die sonst in jedem Lehrbuch vorkommenden Definitionen, Lehrsätze, Formeln usw., sondern auch ausser vielen ungelösten Aufgaben eine Reihe Aufgabenlösungen, die in Bezug auf die Exaktheit und Sauberkeit der Darstellung unübertroffen dastehen, daneben häufig historische Exkursionen. Wer an der Hand dieser Lehrmittel von Stufe zu Stufe fortschreitend die mathematischen Disziplinen durcharbeitet, wird unstreitig schöne Erfolge erzielen, und die oft verhängnisvolle Ansicht, dass es zum Betrieb der trockenen Mathematik besonderer Talente bedürfe, wird dann von manchem als unzutreffend aufgegeben werden müssen.“

Die Lehrbücher der Kleyerschen Encyklopädie eignen sich ganz besonders zur Unterstützung des Unterrichts und Vortrags an den verschiedensten Lehranstalten, zum Selbststudium, zur Forthilfe bei Schularbeiten, zur Repetition, zur Vorbereitung für Examina und zum Nachschlagen für Fachleute, da bei den ausführlichen Lösungen gut gewählter Aufgaben, welche alle Teile dieser Encyklopädie enthalten, überall die Anwendungen der Gesetze, der Sätze, Regeln, Formeln etc. gezeigt werden.

Jährlich erscheinen von diesem Werke eine Anzahl neuer Bände, und sowohl die beteiligten Autoren, als auch die Verlagsbuchhandlung lassen es sich angelegen sein, den Ausbau des grossen Unternehmens nach Möglichkeit zu fördern.

Hochachtungsvoll

Bremerhaven. **L. v. Vangerow**, Verlagsbuchhandlung.

I. Mathematik.

(Grundrechnungsarten, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Astronomie, Nautik).

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.** Mit 71 Erkl. und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **A. Frömter.** Preis: Mk. 3,—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Zweites Buch: **Das Rechnen mit benannten Zahlen.** Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Frömter** und **Neubüser.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Drittes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.)** Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. G. Maier.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), **der Verhältnisse und Proportionen.** Erster Teil: Mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen. Zweiter Teil: **Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen.** Mit einer Sammlung von 277 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. **Hans Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: **Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen.** Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer **Münz-, Mass- und Gewichtstabelle.** Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Richard Olbricht.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Zweiter Teil: **Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente.** Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet von **Dr. R. Olbricht.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Adolf Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Otto Prange.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades. (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des **Bachez de Méziriac,** im französischen Originale mit beigefügter deutscher Übersetzung. Bearbeitet zum Teil nach **System Kleyer** von **W. Fr. Schüler.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten (Quadratische Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Dr. Aug. Blind.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit zwei und mehreren Unbekannten. (Quadratische Gleichungen.) Sammlung von 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Erstes Buch: Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 Figuren. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Zweites Buch: Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erklärungen und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen, nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen. (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren. Von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Logarithmen nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: in einfachem Leineneinband Mk. 2.50.

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: kartonniert 60 Pfg.

Lehrbuch der Integralrechnung. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Integralrechnung. Zweiter Teil: Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie auf zahlreiche gelöste praktische Aufgaben aus der **Mechanik und Technik.** Mit 245 vollständig gelösten Aufgaben, 163 Figuren und 137 Erklärungen, nebst ausführlichem Formelverzeichnis. Zum Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil: **Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variablen.** Ohne Anwendung der Grenzen und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben und Formelverzeichnis. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—

Lehrbuch der Differentialrechnung. Zweiter Teil: **Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima.** Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren, 230 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Dritter Teil: **Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven.** Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren, 138 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen. Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Krüger.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 Figuren. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 1.50. In einfachem Leinenband Mk. 2.—.

Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie. Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. G. Weichold.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Erster Teil: **Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 1.80. Geb. nur mit Teil II zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Zweiter Teil: **Der Winkel und die parallelen Linien.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 2.20. Geb. nur mit Teil I zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Dritter Teil: **Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie)). Vierter Teil: **Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Örter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Fünfter Teil: **Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Sechster Teil: **Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Siebenter Teil: **Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Achter Teil: **Die Anwendung der Ähnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 505 Erklärungen und 135 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. —.50.

Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil: **Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Seipp.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: **Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Zweiter Teil: **Aufgaben, gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 Figuren. Bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Dritter Teil: **Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren.** Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 Figuren. Bearbeitet von **Prof. E. R. Müller.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Erster Teil: **Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden.** Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Zweiter Teil: **Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades.** Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie). Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Faches, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte usw. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach **System Kleyer** durchaus neu bearbeitet. Zweite Auflage. Von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von **Richard Klimpert.** Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem ausführlichen Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 18.—. Geb. Mk. 19.50.

Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erklärungen und 52 Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Erster Teil: **Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 361 Erklärungen und 97 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Zweiter Teil: **Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 445 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Dritter Teil: **Pol und Polare. Mittelpunktseigenschaften. Involution. Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 550 Erklärungen und 172 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen. Mit 259 Fragen und Antworten, 199 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. A. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Erster Teil: **Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Zweiter Teil: **Über die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper.** Mit 130 Erklärungen und 99 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Dritter Teil: Erste Hälfte: **Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie.** Mit 195 Erklärungen und 169 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Dritter Teil: Zweite Hälfte: **Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.** Mit 218 Erklärungen und 210 Figuren. Von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Vierter Teil: Erste Hälfte: **Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre.** Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Vierter Teil: Zweite Hälfte: In Vorbereitung.

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie. Erster Teil: **Sphärische Astronomie.** Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten, bearbeitet von **Prof. Dr. W. Laska.** Preis Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Die Nautik in elementarer Behandlung. Einführung in die Schiffahrtkunde. Zur Förderung des Verständnisses der Schiffahrt in weiteren Kreisen, sowie zum Unterricht an Lehranstalten. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst 88 Figuren, sowie Erklärung der Kunstausdrücke der Seemannssprache. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Fr. Bolte,** Direktor der Navigationsschule in Hamburg. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Kartographie. Die Kartographie nach Einführung der Terraindarstellung in Karten und Plänen. Erster Teil. Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Victor Wessely.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

II. Physik, Elektrizität, Chemie, Akustik.

Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Mit 35 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Mit 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckten Figuren und 10 Karten. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik) mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik) mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis· Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.

Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Elastizität und Festigkeit mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.50. Geb. Mk. 6.50.

Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik) mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 13.50. Geb. 14.50.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Erster Band: **Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter, sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen.** Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Erste Hälfte: **Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand.** Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Zweite Hälfte: **Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger.** Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch der Reibungselektrizität (Friktions-Elektrizität, statischen oder ruhenden Elektrizität), erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Lehrbuch der Kontaktelektrizität (Galvanismus) nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Induktionselektrizität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik). Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Ad. Krebs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Elektrodynamik. Erster Teil: Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch des Elektromagnetismus. Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. O. May** und **Ad. Krebs.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band. **Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band. **Die Metalle.** Mit 573 Erklärungen 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.

Lehrbuch der Akustik. Erster Band: **Periodische Bewegungen, insbesondere Schallwellen.** Mit 257 Erklärungen und 106 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 70 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 4,50. Geb. Mk. 5,50.

Lehrbuch der Akustik. Zweiter Band: **Die verschiedenen Tonerreger.** Mit 465 Erklärungen und 315 in den Text eingedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 114 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Erste Hälfte: **Die Fortpflanzungserscheinungen des Schalles, nebst den Erscheinungen zusammengesetzter Schwingungsbewegungen.** Mit 393 Erklärungen und 235 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 66 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Zweite Hälfte: **Praktische Akustik d. i. die Akustik in großen begrenzten Räumen, in Konzert- und Hörsälen, in Kirchen und Theatern.** Mit 136 Erklärungen und 85 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 3,50. Geb. Mk. 4,50.

Entstehung und Entladung der Gewitter, sowie ihre Zerstreuung durch den „Blitzkamm" (Fulgura frango). Eine metereologische Betrachtung von **Richard Klimpert.** Preis gebunden Mk. 2.—.

Anerkennungen aus dem Publikum
über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herr Pfarrer Kaspar-Altlussheim schreibt: „Ich werde dieses vorzügliche Werk Ihres Verlages empfehlen, wo ich kann. Ich habe es als das einzige kennen gelernt, das die für Manchen etwas trockene Wissenschaft der Algebra und Geometrie mit Geist und Leben füllt und imstande ist, auch ohne Lehrer die größten Schwierigkeiten überwinden zu helfen. Es ist ein gewaltiges Stück Arbeit, das in den verschiedenen, nach einheitlichem, erprobtem Plane verfaßten Bänden liegt und für das jeder Lernende den Bearbeitern und dem Verlag vielen Dank schuldet. Ich wünsche Ihrem Unternehmen im Interesse der Lernenden die weiteste Verbreitung."

Bonn. Mit vielem Interesse habe ich Ihre Unternehmung verfolgt, eine praktische math.-naturwissenschaftliche Bibliothek zu schaffen, und in der Erkenntnis, wie sehr eine solche billige Bibliothek dem allgemeinen Bedürfnis entspricht, werde ich nach Kräften für ihre weitere Verbreitung mich bemühen. Ich bin Ihnen dankbar für die Erleichterung, welche Sie auch mir durch Ihr Werk bei meinen Studien geschaffen haben. Namentlich freue ich mich, dass in der Differentialrechnung, bei welcher ja eine einfache, dem Wissen des Anfängers entsprechende Darstellung große Schwierigkeiten bietet, eine so praktische, mit Konsequenz durchgeführte Darstellungsweise von Ihnen gegeben worden ist u. s. f.

Fr. Blencke, stud. rer. nat.

Dahbruch b. Siegen. Im Uebrigen kann ich von Ihren Lehrbüchern nur lobenswertes erwähnen und wünsche nur, dass dieselben ein Jahrzehnt eher zur Welt gekommen wären. Es ist mir bis jetzt noch kein Werk in die Hände gekommen, das in so leicht faßlicher Weise dem Schüler die exakten Wissenschaften beizubringen imstand wäre, u. s. f.

W. Altpeter, Ing.

Budapest. Vor allem sei es mir gestattet, Ihnen für den Verlag der Kleyerschen Encyklopädie meine vollste Anerkennung auszusprechen. — Einem Bedürfnis in wirklich vorzüglicher Weise abhelfend, behandeln die Publikationen der erwähnten Sammlung, die mathematischen Disziplinen nach theoretisch und praktisch richtiger Lehrmethode, was ich aus eigener Erfahrung als Lehrer an einer Militärbildungsanstalt vollauf bestätigen kann; indem die handlichen Heftchen mit ihrem reichen Stoff ein wirkliches Lehrbuch für den Schüler und ein vorzügliches Hilfsbuch für den Lehrer bilden.

Ferd. von Jerzabek, k. k. Leutnant.

Engelberg, Benediktiner-Stift. Da Ihr Werk „math.-tech.-naturwissenschaftliche Encyklopädie", soweit es bis heute vollendet vorliegt, auch an unserem Gymnasium allseitig wohlverdiente Anerkennung gefunden hat, so möchte speziell ich, als Lehrer der Mathematik, Ihnen heute die Gefühle meines Dankes und meiner Hochachtung für das treffliche Werk bekunden. Die bis ins Detail gehende, dabei doch so übersichtlich geordnete, leicht faßliche, klare Entwicklung der Beweise ist es ganz besonders, die mir Ihr Werk lieb und teuer macht, deswegen meinen herzlichsten Dank für Ihre mühevolle, so meisterhaft ausgeführte Arbeit, u. s. f.

P. Basilius Fellmann, O. S. B.

Oberwinterthur. Vor allem empfangen Sie meinen wärmsten Dank für die Initiative und im allgemeinen glückliche Ausführung der Idee. Gewiß kann jeder mit fleißiger Benutzung Ihrer geschätzten Hefte durch Selbstunterricht schöne Erfolge in dieser Disziplin erzielen, u. s. f.

Jacob Flur, Lehrer.

Hartford (Connecticut). Ich wünsche Ihnen unaufgefordert meinen Gefallen über den Vorteil auszudrücken, welchen ich bei verschiedentlichem Gebrauch bei der Behandlung Ihrer wirklich ausgezeichneten Kleyerschen mathematisch-technischen-naturwissenschaftlichen Encyklopädie gehabt habe. Ich habe nicht allein eine große persönliche Begeisterung für sie, sondern ich habe dieselbe mit Nutzen auch in meiner Schule gebraucht. Ich bin Lehrer der Mathematik an der Public Highe School (gleichbedeutend mit Ihren Gymnasien und Realschulen), u. s. f. Homer W. Brainard.

Berlin. Seit zwei Jahren beziehe ich nun schon von meiner Buchhandlung Ihre Kleyer-Bandausgaben. Welche Dienste sie mir geleistet, vermag ich auf diesem kleinen Raume nicht auszusprechen. H. Schaepel jr., Gymnasiast.

Herr **Dr. Otto Willareth in Sand i. Elsass** schreibt an den Verleger: Vermutlich mache es Ihnen Freude und ist es in Ihrem Geschäfts-Interesse wichtig, meine Anzeige über Ihr Verlagsunternehmen **Kleyers Encyklopädie** zu erhalten, welche ich in der **„Straßburger Post"**, dem größten Blatt von Südwest-Deutschland, No. 809 vom 11. September 1901, habe erscheinen lassen. Deshalb gestatte ich mir, Ihnen diese Besprechung als Drucksache zu übersenden. Mit dieser Besprechung möchte ich Ihnen und den Verfassern dieser Encyklopädie eine Dankesschuld abtragen für eines der segensreichsten litterarischen Unternehmen der Gegenwart. Ich besitze einen bedeutenden Teil Ihrer Encyklopädie und stets ist es mir eine Freude, darin zu arbeiten. Jedenfalls liegt es im Interesse der Sache, dass sie möglichst bekannt und verbreitet wird, damit Ihnen und den Herren Verfassern die Lust nicht an dem mühevollen Unternehmen ausgeht etc.

Berlin. Durch einen glücklichen Zufall wurde ich vor Kurzem mit Kleyers Encyklopädie bekannt und ich bemerkte nach kurzem Studium derselben, dass ein vortreffliches Werk im Erscheinen begriffen sei, u. s. f. Edm. Koebke, stud. math.

Währing b. Wien. Da das unter Ihrer werten Leitung erscheinende voluminöse Werk leider erst einige Teile vollständig enthält, aber entschieden das Vortrefflichste in Bezug auf Selbststudium leistet, u. s. f. Joseph Hackenberg, Beamter.

Traunstein. Es würde mich herzlich freuen, wenn es mir in meiner Besprechung gelungen wäre, das Interesse eines weiteren Leserkreises für Ihr großartiges, wahrhaft zeitgemäßes und eminent praktisches Unternehmen nachhaltig anzuregen.
R. Knilling, Lehrer.

Braunschweig ich war überrascht und hocherfreut über ein Unternehmen (bezieht sich auf den chemischen Teil der Encyklopädie. Die Redakt.), welches mir so ganz aus der Seele herausgeschrieben war. . . . Wie Sie den Stoff behandeln, wird er noch von keiner Seite auch nur annähernd gehandhabt, abgesehen von Katechismen, u. s. f. Gestatten Sie mir als praktischem Lehrer der Chemie, der viele heterogene Elemente zu unterrichten hat, Ihnen zu diesem schönen Werke meinen verbindlichsten Glückwunsch auszusprechen. Möge es Ihnen vergönnt sein, das Werk in dem Sinne des Prospektus zu Ende zu führen, und glaube ich fest, dass die wirklichen Lehrer der Chemie Ihnen zu vollem Dank verpflichtet sein werden, u. s. f.
Dr. Ed. Freise, Direktor der Droguisten-Fachakademie.

Cambridge (England). Während meines Besuches in Kreuznach habe ich mich interessiert, einige deutsche Schulbücher mit unseren englischen zu vergleichen. Ich habe mehrere Hefte der Kleyerschen Encyklopädie durchgeblättert und finde, dass dieselben höchst praktisch und brauchbar sind, besonders für die zuwachsende Anzahl selbstunterrichtender Studenten. Ich bin ein Sachkenner in der reinen und angewandten Mathematik, Ehrengraduatus (etwa wie deutscher Ph.-Doktor) und Dozent in der Cambridge Universität und würde sehr gerne helfen, einige Hefte zu übersetzen. Ich werde auch Mitarbeiter finden können, dass es möglich wird, nach und nach vielleicht das ganze Werk in englisch herauszugeben. Wenn Ihnen dieser Vorschlag gefällt, können wir später Näheres darüber erörtern. Ich glaube, dass eine Uebersetzung einen sehr guten Verkauf haben würde, nicht nur in Großbritannien und Irland, sondern auch in Amerika und in den britischen Kolonien.
Theodore E. Worlledge.

Wien. Gestatten Sie uns, Ihnen unsern Dank für Ihre einzig dastehende Aufgabensammlung, die wir schon bei ihrem ersten Erscheinen mit Freuden begrüßten, u. s. f. . . . Genehmigen Sie deshalb den Dank für Ihre ausgezeichnete Encyklopädie.
Mehrere Studierende der Wiener Universität.

Sundswall (Schweden). Im Besitze einiger Hefte der ausgezeichneten Kleyerschen Encyklopädie bin ich so frei gewesen, in der beigefügten Zeitung die Aufmerksamkeit des schwedischen Publikums darauf zu richten und ist es meine Hoffnung, sowohl den Interessenten, als Ihnen einen Dienst erwiesen zu haben. Das Werk ist in Schweden leider zu wenig bekannt. D. F. Lundgren.

Brünn. Als erster Abnehmer Ihrer in der Tat sehr vortrefflichen Encyklopädie, u. s. f. Meine zahlreichen Schüler machen den besten Gebrauch von dieser einzig dastehenden Aufgabensammlung und bitten unaufhörlich, zu veranlassen, dass weitere Teile erscheinen. Franz Schwaben, Lehrer.

Bergedorf bei Hamburg. Bereits im Besitze mehrerer Bände der Kleyerschen Encyklopädie habe ich die vortrefflichen Werke schon vielen Interessenten mit Erfolg empfohlen. Albert Zander, Lehrer an der Hansaschule.

Gleiwitz.; deshalb habe ich mit Freuden Ihr Werk begrüßt, u. s. f.; ich aber mit förmlicher Begierde Ihre so klar gelösten Aufgaben, u. s. f. George Feumer.

Coburg. Bitte um sehr gefl. Mitteilung, bis wann die Lehrbücher über Bau- und Ingenieurwissenschaften nach System Kleyer erscheinen werden. Mit derartigen Büchern würden Sie die ganze Welt erfreuen. Ist Integralrechnung II. Teil erschienen? J. Eichhorn, Zivilingenieur und Patentanwalt.

Selmeczbanya (Ungarn). und ich muß offen gestehen, dass, wenn ich mich auch der deutschen Sprache noch nicht mächtig genug fühle, so werde ich doch am schnellsten aus diesem Werke zum Ziel gereichen, und eher lerne ich die Sprache, als dass ich das Werk nicht benutze, u. s. f. Ludwig Veress.

Linz. Anschließend spreche ich Euer Wohlgeboren meinen herzlichsten Dank aus für die Herausgabe Ihrer trefflichen Aufgabenhefte, die mir Gelegenheit verschaffen, mir privat und ohne große Auslagen Kenntnis von allen Partien der reinen und angewandten Mathematik zu verschaffen, u. s. f. Herrmann Bauernberger, stud. theol.

Bochum i. W. Ew. Hochwohlgeboren im Erscheinen begriffenes, so lehrreiches und auch von Laien leichtverständlich gehaltenes Werk: „Die elektrischen Erscheinungen und Wirkungen“ habe ich mit Freuden begrüßt, u. s. f. C. P. Kupfer.

Urteile der Presse

über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Pädagogisches Jahrbuch von Emil Schneider. Dem Verlage von L. v. Vangerow, Bremerhaven, gebührt das Verdienst, durch Herausgabe der Kleyerschen Encyklopädie ein Werk geschaffen zu haben, das durch die Art seines Erscheinens und durch die Eigentümlichkeit in der Behandlung des Stoffes auch diejenigen, die keine gelehrte Schule besucht haben, in den Stand setzt, sich durch eigenen Fleiß ein reiches und gründliches Wissen zu erwerben. Der vorliegende Band ist in jeder Beziehung eine Musterleistung und wird hiermit wie das ganze Werk nachdrücklichst empfohlen. Man kann nur wünschen, dass uns der rühmlichst bekannte Verfasser bald mit einem nach demselben Plane bearbeiteten Lieferungswerke über die beschreibenden Naturwissenschaften beschenken möge.

Naturae Novitates. Die Kleyersche Encyklopädie ist dem Studierenden schon längst ein wohlbekanntes, unentbehrliches Hilfsmittel geworden, so dass man als die beste Empfehlung der neu vorliegenden Bände bezeichnen kann, dass diese sich in Inhalt und Form würdig ihren Vorgängern anschließen.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Literaturblatt für höhere Schulen. Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil. Wenn man nach der vorliegenden Schrift die ganze Kleyersche Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften beurteilen darf, so verdient dieses Unternehmen weit mehr Beachtung und Unterstützung, als es bislang in Kollegenkreisen gefunden hat. Offen gestanden bin ich mit dem Verdachte an die Lektüre dieses Buches herangetreten, dass es, als für den Selbstunterricht und die elementare Technik berechnet, in wissenschaftlicher Beziehung manches zu wünschen übrig lassen werde. Aber ich bin sehr angenehm enttäuscht worden; das Buch ist durchaus wissenschaftlich angelegt und weit gründlicher durchdacht, als die meisten Lehrbücher der Stereometrie; dass es dabei auch vielfach auf die Praxis des Lebens eingeht, kann ihm nur zur weiteren Empfehlung gereichen. Mir ist keine Schrift bekannt, welche die räumlichen Lageverhältnisse von Geraden und Ebenen mit der Allgemeinheit und Gründlichkeit untersucht, wie die vorliegende Stereometrie. Ganz besonderen Wert hat das Buch auch dadurch, dass eine große Menge konstruktiver Aufgaben erschöpfend oder wenigstens mit Andeutungen zur Lösung vorgeführt wird; besonders sorgfältig ist stets die Determination behandelt. Allen Kollegen, die bislang die konstruktive Seite der Stereometrie weniger beachtet haben, sei hiermit das Seippsche Buch nachdrücklichst empfohlen; ebenso seien die Studierenden zur Ausbildung ihrer Raumanschauung darauf hingewiesen, um so lieber, als die Zeichnungen durchweg mustergültig sind.

Pfälzische Lehrerzeitung. Von diesem großartigen, bis jetzt unerreicht dastehenden Unternehmen liegen uns weitere Bände vor. Für die Zwecke des Selbststudiums sind diese Werke das Beste, was es giebt. Auch in Schulen dürften sie mit großem Nutzen zu gebrauchen sein.

Literaturblatt für katholische Erzieher. Bezüglich dieser nach Kleyers System bearbeiteten Lehrbücher können wir uns kurz fassen. „Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen etc. Wissenschafen bietet, wie bereits allgemein anerkannt, die besten Unterrichtsmittel.“

Pädagogisches Literaturblatt. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Anlage und Ausführung des Sachsschen Lehrbuchs sind vorzüglich. Der Verleger hat für eine gute Ausstattung Sorge getragen, die Figuren insbesondere zeichnen sich durch wohltuende Klarheit und Schärfe aus. Gesamturteil: das Buch ist für den Selbstunterricht, wie auch zum Gebrauch an entsprechenden Unterrichtsanstalten nach jeder Richtung hin aufs beste geeignet.

Der Techniker, New York. Die systematische Einteilung und Behandlung des umfangreichen Lehrmaterials mit zahlreichen erläuternden Aufgaben und Beispielen, wie in dem vorliegenden Werke, ist sehr fördernd und anregend für das Studium und ein allseitig anerkannter Vorzug der Kleyerschen Unterrichtsmethode; so verfaßte Lehrbücher sind nicht allein für Schulunterricht, sondern auch zum Selbststudium und als Nachschlagebücher für den praktischen Fachmann von hohem Nutzen.

Zeitschrift für Realschulwesen, Wien. Hovestadt, Lehrbuch der absoluten Masse u. Dimensionen der physikalischen Größen. Das Buch, welches den Gegenstand mit der möglichsten Vollständigkeit behandelt, zeigt bei einer anfangs ausführlichen, später knappen Darstellung doch durchgehends jene Klarheit, die gerade für diesen Teil der Wissenschaft nötig ist. Es wird sich dasselbe daher überall als eine gute Einleitung in das wissenschaftliche Studium der Physik empfehlen.

Magazin für Pädagogik. Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster und Zweiter Teil. An solchen Werken haben wir freilich noch keinen Ueberfluß und wir möchten einem jeden raten, der sich ohne Hilfe eines Lehrers tiefer in dieses Gebiet einzuarbeiten wünschte, sei es zum Zwecke der Erstehung einer Prüfung, sei es aus besonderer Liebhaberei zu diesem schönen Zweig der Mathematik, zu diesem ausgezeichneten Werke zu greifen. Nur mit hoher Befriedigung und reichem Gewinn wird er dasselbe aus der Hand legen.

Prakt. Physik. Der Verfasser hält vollkommen, was er verspricht; er ist ein Meister in der Entwicklung und Klarstellung der Grundbegriffe und macht dadurch seine Arbeit vor allem für den angehenden Lehrer und für die Selbstausbildung geeignet, und mancher ältere Lernende wird sagen: Hätte man mir solches in meiner Jugend geboten!

Baukunde.

Statik für Hoch- und Tiefbautechniker. Ein Lehrbuch für den Unterricht an bautechnischen Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und Nachschlagen mit 194 Uebungsaufgaben und 486 Figuren nebst einem Anhang von Tabellen. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 3. Auflage. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 5,50.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Erster Teil: **Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen.** Mit 345 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn.** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W.. 2. Auflage. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Zweiter Teil: **Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmlings, Steinschnitt, Centralperspektive.** Anhang: **Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.** Mit 354 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 2. Auflage. Preis: 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen. Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen usw. **12 Tafeln mit erläuterndem Texte.** Entworfen und gezeichnet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. In Mappe: Mk. 5,50.

Das Zeichnen der Stereometrie. Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. Von **Prof. A. Brude.** Preis: Mk. 6.—.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

/ Kleyer, Adolph / Sachs, Joseph

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie) für den Schulunterricht und das Selbststudium

Bd.: 3

1891

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.150-m(2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841069-1